Université Savoie Mont Blanc — **2021/2022**
UFR SceM — **L1 MISPI – S1**

MATH103_MISPI (Mathématiques & applications)
Contrôle des connaissances
jeudi 28 octobre 2021 (10:00–11:30)

Documents, calculatrice, téléphone portable et montre intelligente interdits.
Lors de l'appréciation des copies, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation, de la clarté de la rédaction et de la précision des démonstrations.

Exercice 1 (questions de cours).

1. Donner la contraposée de l'assertion $P \Rightarrow Q$.
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer l'égalité $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
3. Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$: énoncer avec précision le théorème.
4. Quels sont les nombres complexes z tels que $|z|^2 = z^2$?

1. La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
2. Soit $0 \leqslant k \leqslant n-1$. On a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1)}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

3.

Théorème. *Soient A, $B \in \mathbf{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors,*

$$\exists!(Q,R) \in \mathbf{R}[X]^2, A = BQ + R \text{ avec } \deg R < \deg B.$$

4. Soit $z \in \mathbf{C}$. On a

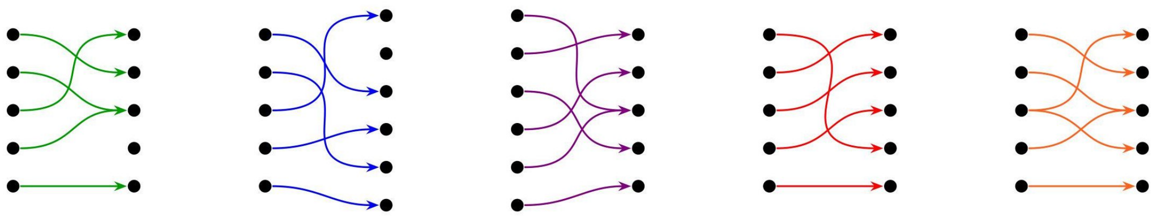
$$|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \bar{z} = z, z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z \in \mathbf{R}^* \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}.$$

Exercice 2 (négation). Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $x \geqslant -1$ et $x \leqslant 1$.
2. $\exists x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 1 = 0$.
3. $\forall x \in \mathbf{C}$, $x^2 + 1 \neq 0$.
4. Il existe un entier dont la racine carrée est aussi un entier.
5. $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$.

1. $\neg(x \geqslant -1$ et $x \leqslant 1) \Leftrightarrow (x < -1$ ou $x > 1)$.
2. $\neg(\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \neq 0$.
3. $\neg(\forall x \in \mathbf{C}, x^2 + 1 \neq 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{C}, x^2 + 1 = 0$.
4. $\neg$(Il existe un entier dont la racine carrée est aussi un entier) $\Leftrightarrow$ quel que soit l'entier, sa racine carrée n'est pas un entier : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sqrt{n} \notin \mathbf{N}$.
5. $\neg(\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)) \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbf{R}^2, (x < y$ et $x^2 \geqslant y^2)$.

Exercice 3 (fonction/application). Pour chacune des relations suivantes, dire celles qui illustrent une fonction, une application, injective, surjective ou bijective.



f_1 $\quad$ f_2 $\quad$ f_3 $\quad$ f_4 $\quad$ f_5

1. f_1 est une fonction, un application, non injective et non surjective (donc n'est pas une bijection).
2. f_2 est une fonction, une application, injective et non surjective (donc n'est pas une bijection).
3. f_3 est une fonction, une application, non injective et surjective (donc n'est pas une bijection).
4. f_4 est une fonction, un application, injective et surjective donc bijective.
5. f_5 n'est pas une fonction donc les autres questions n'ont pas de sens.

Exercice 4 (nombre/inégalité). On considère la fonction f définie par

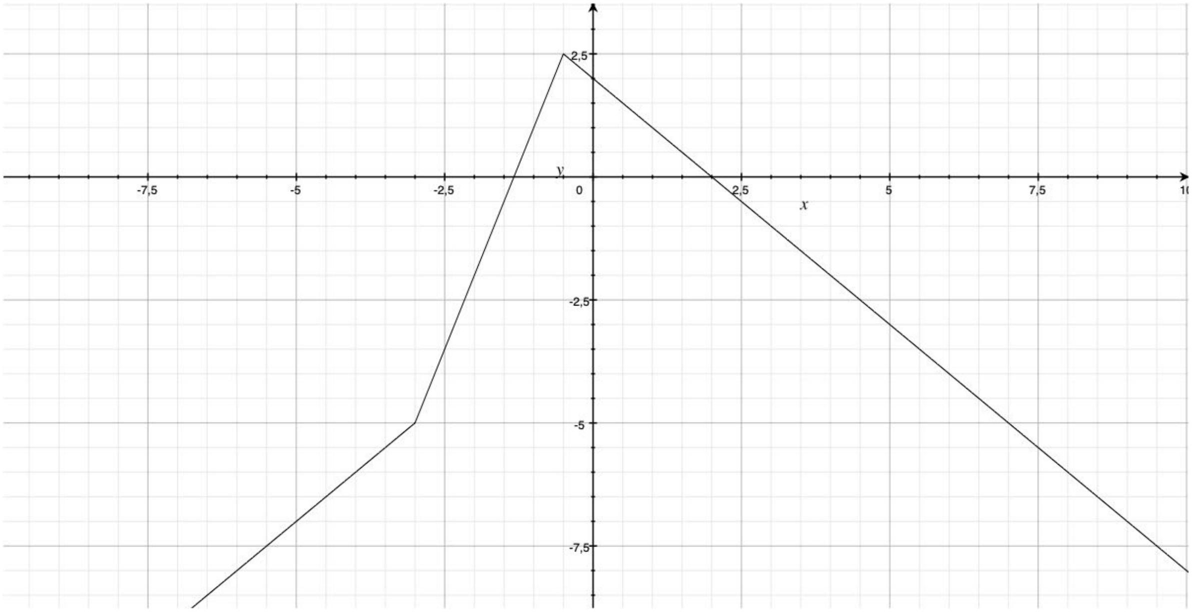
$$f(x) = |x+3| - |2x+1|.$$

1. Exprimer f sans utiliser de valeur absolue (on pourra distinguer différents intervalles).
2. Déterminer l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} : f(x) = 0\}$.
3. Déterminer l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} : f(x) < 0\}$.
4. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.
5. Déterminer $f(\mathbf{R})$ puis $f^{-1}(\mathbf{R}^-)$; l'application f est-elle surjective ?

1.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert x+3\rvert$		$-x-3$	0	$x+3$	$\frac{5}{2}$	$x+3$	
$\lvert 2x+1\rvert$		$-2x-1$	5	$-2x-1$	0	$2x+1$	
f		$x-2$	-5	$3x+4$	$\frac{5}{2}$	$-x+2$	

2. $\{f=0\} = \left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$.
3. $\{f<0\} = \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

4. 

5. $f(\mathbf{R}) = \left] -\infty, \frac{5}{2} \right]$;
$f^{-1}(\mathbf{R}_-) = \left] -\infty, -\frac{4}{3} \right] \cup \left[2, +\infty \right[$.
L'application f n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) < 3$.

Exercice 5 (récurrence/binôme). On considère l'inégalité

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \forall n \in \mathbf{N}, (1+x)^n \geqslant 1 + nx. \qquad (1)$$

1. Démontrer (1) par récurrence sur n.
2. Démontrer (1) en utilisant la formule du binôme.

1. (a) $n = 0$: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0x \geqslant 1 + 0x$
   (b) Supposons la propriété établie pour un entier $n \in \mathbf{N}$.
   Comme $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ par l'hypothèse de récurrence, il vient en multipliant de part et d'autre de cette inégalité par $1 + x \geqslant 0$ (car $x \in \mathbf{R}_+$) :
   $$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x.$$
   La conjonction de (a) et (b) permet de conclure :
   $$\forall x \in \mathbf{R}_+, \forall n \in \mathbf{N}, (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$
2. Si $n = 0$ ou $n = 1$ alors
   $$(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 + 0x \text{ et } (1+x)^1 = 1 + x \geqslant 1 + 1x$$
   d'où l'inégalité dans ces 2 cas.
   Si $n \in [\![2, +\infty[\![$ alors on a, par la formule du binôme de Newton :
   $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant 1 + nx$$
   car $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{k} \geqslant 0$ et $x^k \geqslant 0$.

Exercice 6 (trigonométrie). On considère l'équation

$$2\cos^2\theta - 3\sin\theta - 3 = 0. \qquad (2)$$

1. Montrer que (2) peut s'écrire avec uniquement des $\sin\theta$.
2. Déterminer les racines du polynôme $P(X) = -2X^2 - 3X - 1$.
3. Résoudre (2).

1. Comme $\cos^2 = 1 - \sin^2$, (2) s'écrit
$$-2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 1 = 0.$$
2. Les racines (qui sont réelles) de P sont -1 et $-\dfrac{1}{2}$.
3. L'équation (2) s'écrit $P(\sin\theta) = 0$. Compte tenu de 2., il reste à résoudre $\sin\theta = -1$ et $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$. Par conséquent :
$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Exercice 7 (polynôme).

1. Effectuer la division euclidienne de $A := X^5 - X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 2X + 4$ par $B := X^3 + 2X + 3$.
2. Sans effectuer la division euclidienne de A par $X+1$, montrer que $X+1$ divise A.
3. Déduire de 1. le quotient et le reste de la division de A par $X+1$.

1. On obtient $A = B(X^2 - X + 1) + 2X^2 + 3X + 1$ où $Q = X^2 - X + 1$ est le quotient et $R = 2X^2 + 3X + 1$ est le reste de la division euclidienne de A par B (on a bien $\deg R = 2 < 3 = \deg B$).
2. On a $B(-1) = 0$ et $R(-1) = 0$ donc $A(-1) = 0$; A est donc divisible par $X+1$.
3. De plus, $B = (X+1)(X^2 - X + 3)$ et $R = (X+1)(2X+1)$. Il s'ensuit que
$$A = (X+1)[(X^2 - X + 3)(X^2 - X + 1) + 2X + 1] = (X+1)(X^4 - 2X^3 + 5X^2 - 2X + 4)$$
Le quotient de A par $X+1$ est donc égal à $X^4 - 2X^3 + 5X^2 - 2X + 4$ et le reste est nul.

Exercice 8 (complexe/racine).

1. Résoudre l'équation $\delta^2 = -3 + 4i$ dans $\mathbf{C}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $z^2 - (1-2i)z - 2i = 0$.

1. Posons $\delta = x + iy$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Il vient :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} (x,y) & = & (1,2) \\ & \text{ou} & \\ (x,y) & = & (-1,-2) \end{array}$$
Autrement dit, $\delta = \pm(1+2i)$.
2. On a $\Delta = (-(1-2i))^2 - 4(-2i) = 1 - 4 - 4i + 8i = -3 + 4i$. D'après 1,
$$z_1 = \frac{1 - 2i + 1 + 2i}{2} = 1 \text{ et } z_2 = \frac{1 - 2i - (1+2i)}{2} = -2i$$
On conclut $\mathcal{S} = \{1, -2i\}$.

Fin de l'épreuve