L3 SPI

TRAITEMENT DU SIGNAL ANALOGIQUE (ETRS 521)

Épreuve de TP

Date : 11/12/2023

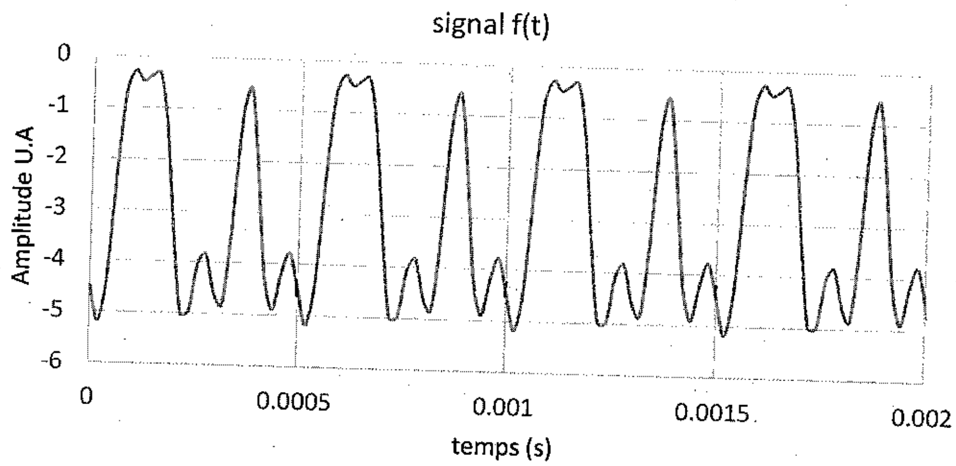
Durée : 1h30

Autorisées pour l'épreuve :

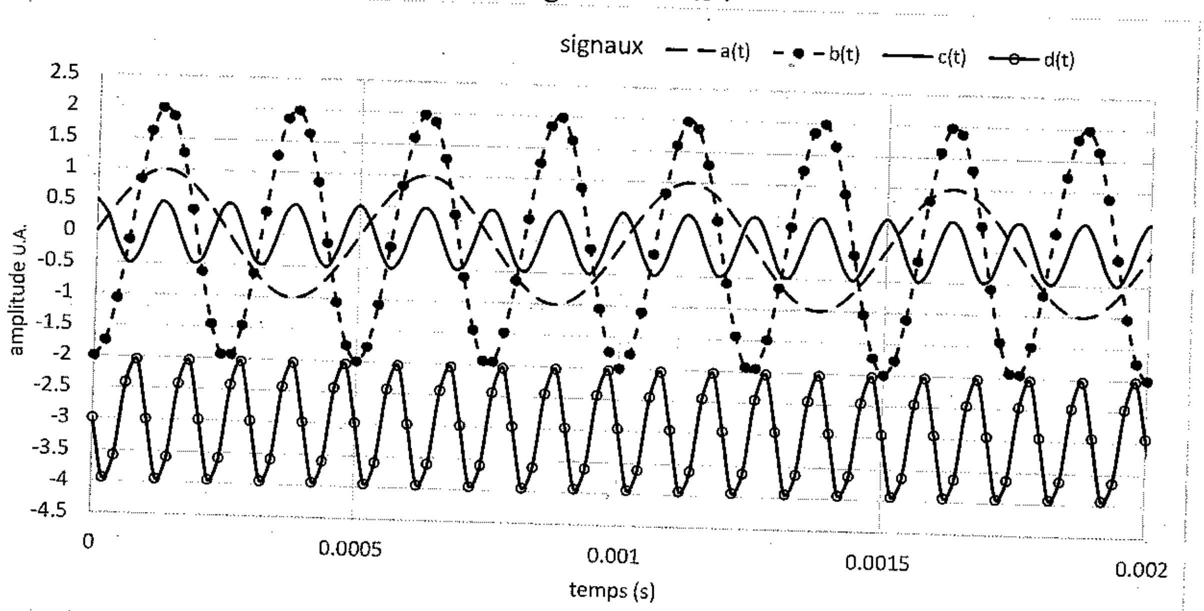
- Calculatrice
- 1 feuille A4 manuscrite
- Formulaire des TF usuelles

1. Etude d'un signal périodique

On considère le signal périodique f(t) suivant :



On sait que $f(t) = a(t) + b(t) + c(t) + d(t)$; où les signaux at(t), b(t), c(t) et d(t) sont donnés par leurs représentations temporelles dans la figure suivante :



Q1. Sans calcul que peut-on dire sur l'allure du spectre de f(t) ?

Q2. Quelle est la fréquence fondamentale de f(t) ?

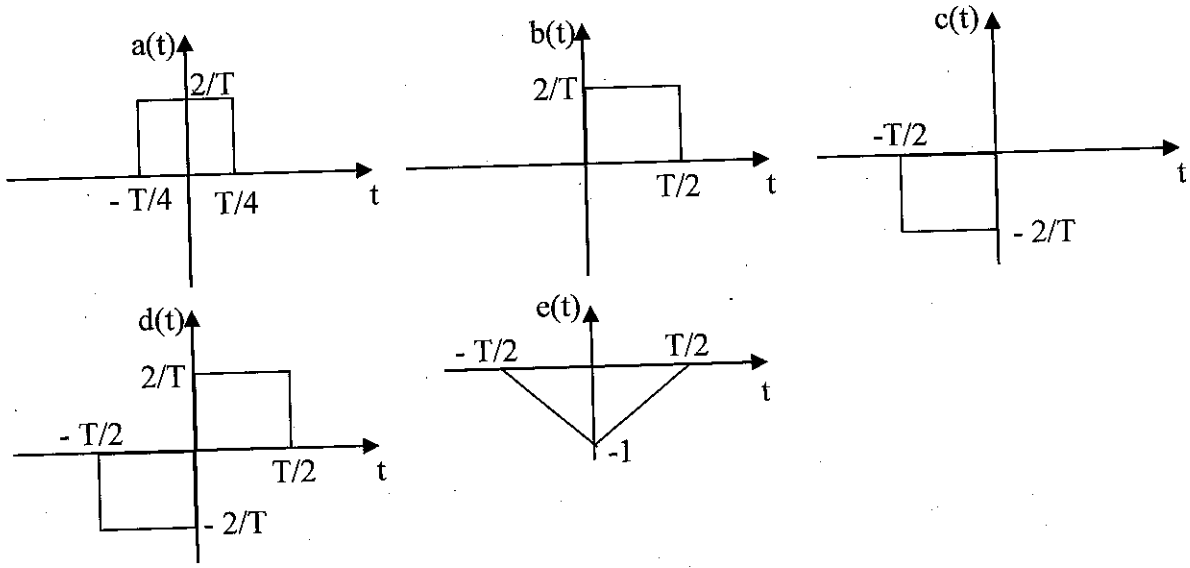
Q3. Exprimer f(t) sous sa forme de décomposition en **série de Fourier à coefficients réels** après avoir exprimé **ses différents coefficients (a_n et b_n)**.

Q4. Exprimer f(t) sous sa forme de décomposition en **série de Fourier à coefficients complexes** après avoir exprimé **ses différents coefficients (C_n)**.

Q5. Représenter le spectre de **f(t) en module/phase.**

Q6. Quelle est la puissance véhiculée par la **composante continue** et **chacun des harmoniques** ?

2. Transformée de Fourier



Q7. Sans calcul que peut-on dire sur l'allure du spectre de a(t) ?

Q8. Démontrer que la Transformée de Fourier du signal a(t) est $A(f) = \sin c\left(\pi f \frac{T}{2}\right)$

Q9. En déduire les Transformées de Fourier des signaux b(t) et c(t) puis d(t).

Q10. Donnez une relation simple entre d(t) et e(t). En déduire la Transformée de Fourier du signal e(t).

Q11. Le signal e(t) peut être écrit sous la forme de convolution de deux signaux ; donnez cette formule.

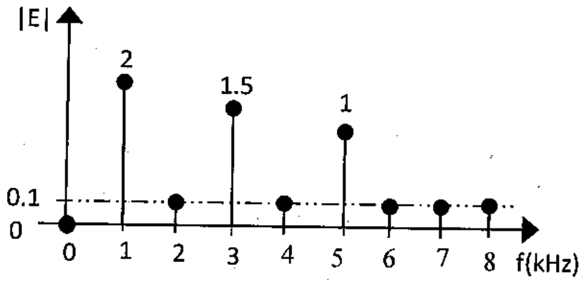
Q12. Représenter le spectre de a(t)

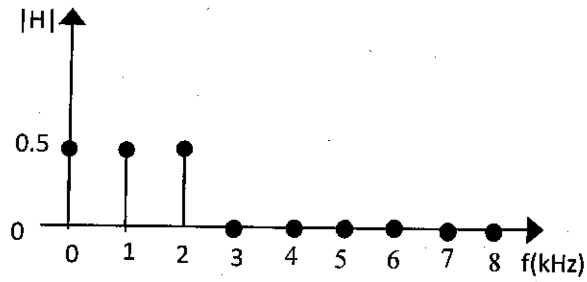
Q13. Le signal a(t) est périodisé avec une période T_p pour devenir $a_p(t)$. Tracer $a_p(t)$ dans le domaine temporel puis tracer le spectre de ce nouveau signal $a_p(t)$ sachant que T_p=T.

3. Filtrage

Un signal e(t) entre dans un SLIT (système linéaire invariant dans le temps) dont la fonction de transfert est définie par H(f).

Q14. Déterminez et tracez |S(f)|, le module du spectre du signal en sortie du SLIT, sachant que les modules des spectres E(f) et H(f) sont les suivants (seule la partie positive du spectre est donné ; la partie négative, non représentée ici, existe aussi bien évidemment !) :





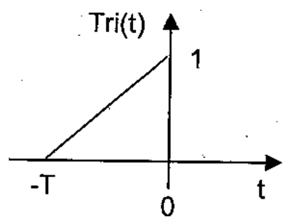
Q15. Quelle est la fonction réalisée par le SLIT ?

Q16. Quelle est l'allure du signal temporel s(t) ?

4. Convolution

Q17. Représentez, dans le domaine temporel, le produit de convolution suivant : $c_{p\delta}(t) = \Pi_T(t) * \delta(t - \tau_1)$.

Q18. Représentez, dans le domaine temporel, le produit de convolution $c_{Trip}(t) = Tri(t) * \Pi_T$ où la fonction Tri(t) est :



Pour cela représentez graphiquement les différentes étapes.

Rappel des formules importantes :

L'énergie d'un signal x(t) s'exprime : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$; sa puissance : $P = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} |x(t)|^2 \, dt$

Formule d'Euler : $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

Expression d'un complexe : $\rho e^{jx} = \rho \cos x + j\rho \sin x$ où ρ est le module et x la phase.

Série de Fourier :

$$v_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi n f_p t\right) + b_n \sin\left(2\pi n f_p t\right) \right]$$

avec : $a_0 = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} v_p(t) dt$; $a_n = \frac{2}{T_p} \int_{T_p} v_p(t) \cos\left(2\pi n f_p t\right) dt$ et $b_n = \frac{2}{T_p} \int_{T_p} v_p(t) \sin\left(2\pi n f_p t\right) dt$

$$v_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_p t} \text{ avec } C_0 = a_0 \text{ et } C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \text{ pour } n \neq 0$$

Transformée de Fourier :

$$TF \quad : \quad V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$TF^{-1} : \quad v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) e^{j2\pi f t} df$$

Convolution :

$$c(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Licence Sciences et technologies

L3 ESET et TRI Semestre 5

Unité d'enseignement UAF501

Module **ETRS522-ETRS** Bases des Mathématiques pour l'ingénieur

Épreuve du lundi 9 octobre 2023 – session 1

Durée 1h

***Autorisés** : Une feuille de primitives usuelles.*

Recommandations importantes :

- Lisez la totalité du sujet avant de commencer (5mn). Faites des réponses courtes, et des phrases compréhensibles.

- Écrivez lisiblement les réponses.

EXERCICE 1 : on pose j tel que $j^2 = -1$

1. $z_1 = \left(\sqrt{3} + j\right)$, trouver le module et l'argument de z_1,
2. Trouver z_2 tel que $z_2 = \left(z_1\right)^4$ puis écrire z_2 sous la forme a+jb
3. Déterminer le module ρ et l'argument θ de z_3 tels que $z_3 = \rho e^{j\theta} = \sqrt{z_1}$
4. Chercher un nombre complexe z=a+jb qui soit aussi racine carrée de z_1 (c'est-à-dire : $z^2=z_1$)
5. En déduire une expression analytique de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

EXERCICE 2 :

6. Dans le corps des complexes, résoudre $z^2 - 2jz - 1 + 2j = 0$. On mettra les solutions sous la forme z=a+jb ; pour cela on devra déterminer aussi les racines de -8*j*.

EXERCICE 3 :

7. Calculer l'intégrale de $\int_1^4 \frac{1 - x + 2x^2}{x} dx$
8. Trouver la primitive de $\frac{\ln x}{x}$ en utilisant l'intégration par partie
9. Trouver la primitive de $\frac{\ln x}{x}$ en utilisant un changement de variable
10. Calculer l'intégrale $\int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
11. Montrer que $\frac{d(arctan(t))}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$
12. En déduire que $-t + 2\arctan(t)$ est une primitive de $\int \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt$
13. Calculer l'intégrale $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$. Pour cela on utilisera le changement de variable u=cos(x) puis le résultat de la question 12.

QUESTION DE COURS :

14. Dans le corps des complexes, résoudre $z^5 = -j$. Combien de solutions devez-vous trouver ? Représenter graphiquement les différentes solutions.