Outils mathématiques pour les sciences

CM 5

MATH203

6 CM + 6 TD + 3 TP

Maria Kazakova (LAMA)
Bât. 21, bur. 21

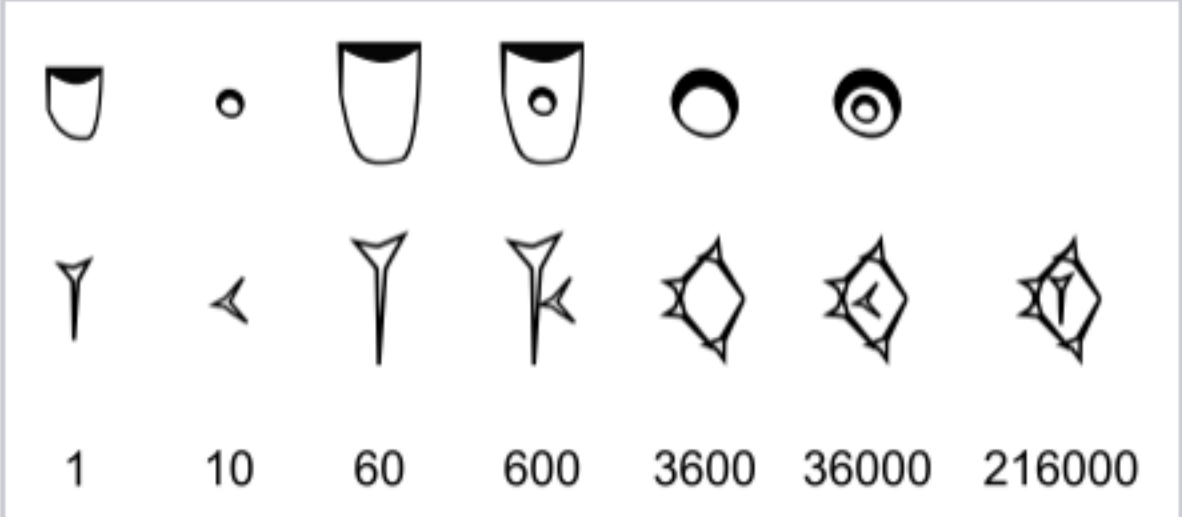
Ce support est en construction, pour toutes remarques maria.kazakova@univ-smb.fr

Chapitre 3.
Développements limités (DL)

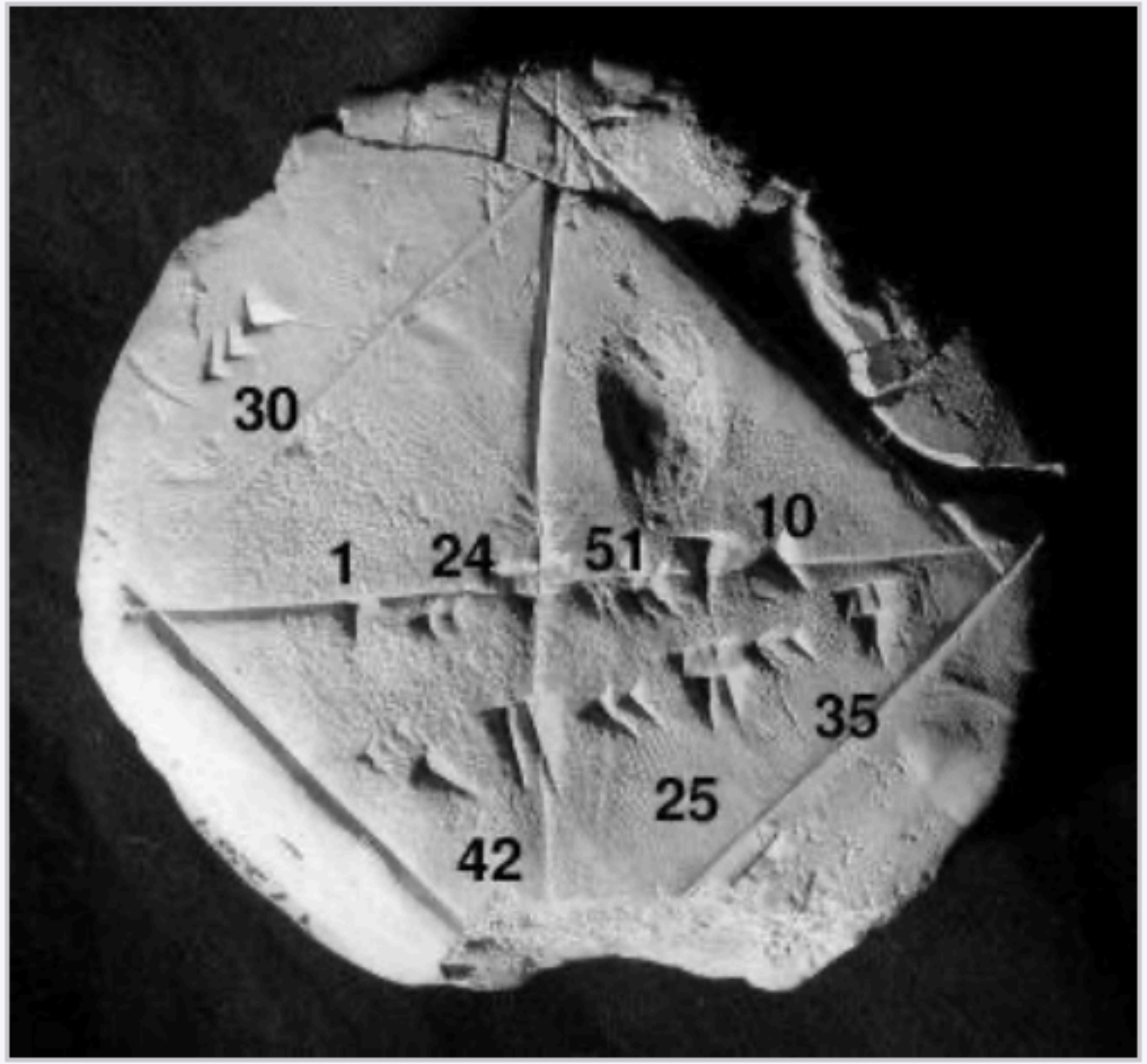
Calcul de $\sqrt{2}$ développements limités

Exemple : calcul de $\sqrt{2}$

Les babyloniens il y a 2500 ans…



Signes numériques « proto-cunéiformes » avec le système sexagésimal (60, 600, 3600, etc.).



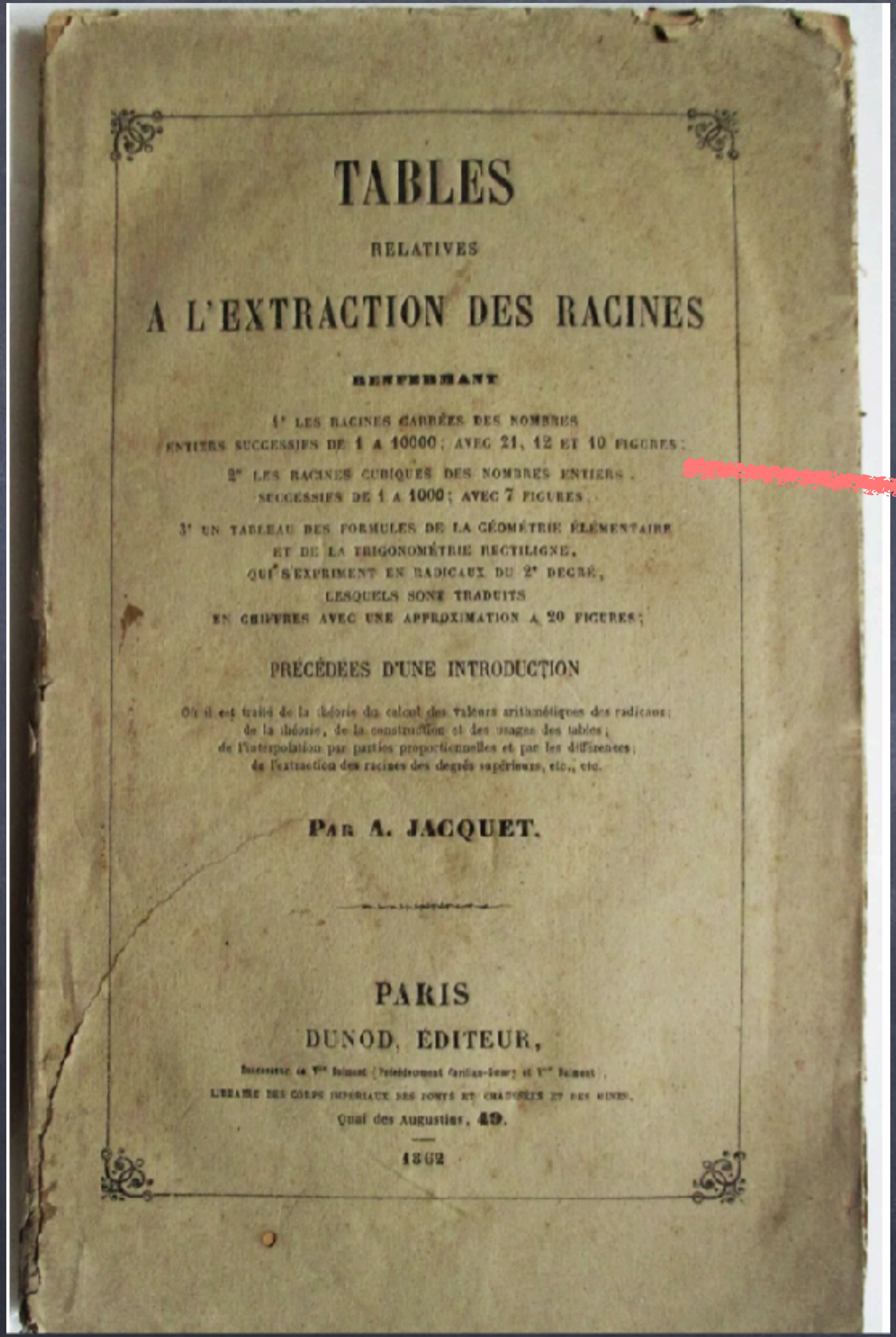
Photographie de la tablette YBC 7289 annotée. Les nombres écrits dans le système babylonien donnent la racine carrée de 2 avec quatre chiffres sexagésimaux significatifs, soit près de six chiffres décimaux :

$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1{,}41421296...$ (crédit : Bill Casselman).

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mathematiques_mesopotamiennes

https://fr.wikipedia.org/wiki/Systeme_sexagesimal

Calcul de $\sqrt{2}$ = 1.414213562373095



TABLES

RELATIVES

A L'EXTRACTION DES RACINES

RENFERMANT

1° LES RACINES CARRÉES DES NOMBRES ENTIERS SUCCESSIFS DE 1 A 10000; AVEC 21, 12 ET 10 FIGURES;

2° LES RACINES CUBIQUES DES NOMBRES ENTIERS SUCCESSIFS DE 1 A 1000; AVEC 7 FIGURES;

3° UN TABLEAU DES FORMULES DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ET DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE, QUI S'EXPRIMENT EN RADICAUX DU 2° DEGRÉ, LESQUELS SONT TRADUITS EN CHIFFRES AVEC UNE APPROXIMATION A 20 FIGURES;

PRÉCÉDÉES D'UNE INTRODUCTION

Où il est traité de la théorie du calcul des valeurs arithmétiques des radicaux; de la théorie, de la construction et des usages des tables; de l'interpolation par parties proportionnelles et par les différences; de l'extraction des racines des degrés supérieurs, etc., etc.

PAR A. JACQUET.

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR,

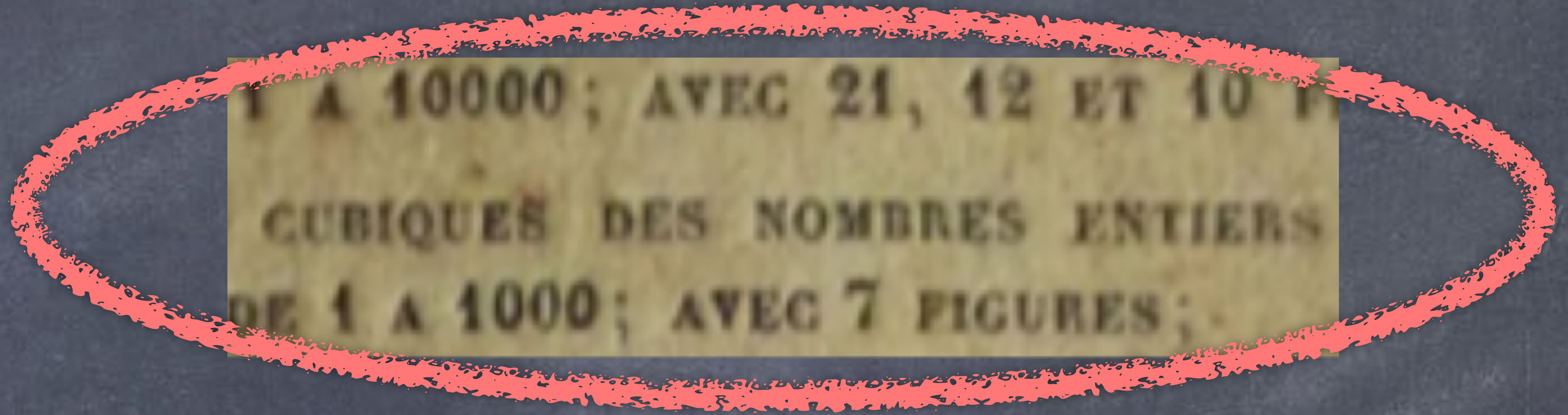
[illegible]

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, 49.

1862

Livre Dunod 1862 tables racines



Calcul de $\sqrt{2}$ = 1.414213562373095

Méthode 1

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} \quad \to \sqrt{2}$$

Méthode 2

$$y_0 = 1, \quad y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 2}{2y_n} \to \sqrt{2}$$

Calcul de $\sqrt{2}$ = 1.414213562373095

iteration 1,	$x = 1.5$,	$y = 1.5$
iteration 2,	$x = 1.4$,	$y = 1.416666666666667$
iteration 3,	$x = 1.416666666666667$	$y = 1.414215686274510$
iteration 4,	$x = 1.413793103448276$	$y = 1.414213562374690$
iteration 5,	$x = 1.414285714285714$	$y = 1.414213562373095$
iteration 6,	$x = 1.414201183431953$	$y = 1.414213562373095$
iteration 7,	$x = 1.41421568627451$	$y = 1.414213562373095$
iteration 8,	$x = 1.414213197969543$	$y = 1.414213562373095$
iteration 9,	$x = 1.41421362489487$	$y = 1.414213562373095$
iteration 10,	$x = 1.414213551646055$,	$y = 1.414213562373095$

Développements limités

On cherche à donner une approximation de f autour d'un point x_0 par un polynôme, de la forme

$$f(x_0+h) \approx P(h)$$

où P est un polynôme de degré n et h est proche de 0

$$P(h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n.$$

Le signe ≈ signifie

$$f(x+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

où $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

Écriture alternative

$x = x_0 + h$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n (x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(h)$$

Il est possible(mais absolument pas nécessaire) de noter $\varepsilon(x - x_0)$

on retient seulement que c'est une quantité qui tend vers 0.

On dit que n est l'ordre de l'approximation.

Peut-on construire cette approximation à partir de $f(x_0)$ et des dérivées de f en x_0 ?

Exemples

Exemple : tangente en un point.

Exemple : approximation par une parabole en un point.

[Au tableau]

Exemples $f(x) = e^x$ autour de $x_0 = 0$:

$e^x \approx 1$, précisément

$$e^x = 1 + \varepsilon(x)$$

$e^x \approx 1 + x$, précisément

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$$

$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, précisément

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

Ordres de grandeur

f est préponderant devant g en x_0 ou g est négligeable devant f en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \to 0$$

ou $g(x) = f(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0$.

Exemple : puissances en 0. Puissances en x_0.

Notation : $g(x) = o_{(x_0)}(f(x))$, ou $g(x) = f(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to x_0$.

Si x_0 est implicitement connu, on note juste $g(x) = o(f(x))$. En particulier quand $x_0 = 0$ on ne le met pas.

Dans l'exemple $f(x) = e^x$ on a donc:

$e^x \approx 1$, précisément

$$e^x = 1 + o(1)$$

$e^x \approx 1 + x$, précisément

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, précisément

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Exemple d'un polynôme

Soit $f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$

En $x_0 = 0$

Pour $x = 0{,}01$, $f(x) = 1 + 2 \times 0{,}01 - 0{,}0001 + 0{,}000001$

- $f(x) = 1 + o(1)$
- $f(x) = 1 + 2x + o(x)$
- $f(x) = 1 + 2x - x^2 + o(x^2)$
- $f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3 + \underbrace{o(x^3)}_{=0}$

Comportement au voisinage de 1

$f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$, $x_0 = 1$, $x = 1 + h$,

h petit, donc x est autour de 1, $h = x - 1$ est autour de 0

$f(x) = f(1 + h) = 3 + 3h + 2h^2 + h^3$

- $f(x) = 1 + o(1)$
- $f(x) = 1 + 3(x-1) + o((x-1))$
- $f(x) = 1 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + o((x-1)^2)$
- $f(x) = 3 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3 + \underbrace{o((x-1)^3)}_{=0}$

D'où viennent les coefficients ?

$$f(x) = 3 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + \ldots$$

- La constante : valeur en x_0, $f(x_0) = 3$
- Le terme d'ordre 1 : dérivée en x_0, $f'(x_0) = 3$
- Les termes d'ordre supérieur en lien avec les dérivées d'ordre supérieur ?

$$f''(x_0) = 4 \text{ et donc } \frac{f''(x_0)}{2} = 2$$

Si f est un polynôme de degré n,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Vérification pour $x_0 = 0$!

En particulier, pour tout k,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x-x_0)^k)$$

Exemple : le cas de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de $x_0 = 0$.

On sait que

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 \dots + x^n$$

On peut vérifier si la formule précédente, pour des polynômes, est toujours valable.

Formule de Taylor

Théorème 1

Si f est k fois dérivable en x_0, alors f admet le développement limité a l'ordre k en x_0 suivant :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x-x_0)^k)$$

Exemples :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{k} x^n + o(x^k), \text{ en } x_0 = 0$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} + o(x^k), \text{ en } x_0 = 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^k), \text{ en } x_0 = 0$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2k+2}), \text{ en } x_0 = 0$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2k+1}), \text{ en } x_0 = 0$$

Manipulation des D.L. Somme et produit.

Si f et g admettent un DL à l'ordre n en un même point x_0, alors $f + g$ et $f \cdot g$ admettent un DL à l'ordre n en x_0 obtenu en faisant la somme et le produit et en tronquant les puissances plus grandes que n

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n (x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(h)$$

$$g(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n (x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(h)$$

Alors,

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)(x - x_0) + \ldots$$
$$+ (a_n+b_n)(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(h)$$

et

$$(f\cdot g)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0)(x - x_0) + \ldots$$
$$+ (a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(h)$$

Manipulation des D.L. Composition.

Si f admet un DL a l'ordre n en x_0 et g admet un DL à l'ordre

n en y_0 et de plus $g(y_0) = x_0$

Alors $f \circ g$ admet un DL à l'ordre n en y_0 obtenu en tronquant le DL par composition des DL de f et g les puissances plus grandes que n.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n (x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(h)$$

$$g(y) = b_0 + b_1(y - y_0) + \dots + b_n (y-y_0)^n + (y-y_0)^n\varepsilon(h)$$

$g(y_0) = x_0$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - g(y_0)) + \dots + a_n (x - g(y_0))^n + (x - g(y_0))^n \varepsilon(x)$$

$$g(y) = g(y_0) + b_1(y - y_0) + \dots + b_n (y - y_0)^n + (y - y_0)^n \varepsilon(y)$$

En posant $x = g(y)$

$$f \circ g(y) = a_0 + a_1(g(y) - g(y_0)) + \dots + a_n(g(y) - g(y_0))^n + (g(y) - g(y_0))^n \varepsilon(y)$$

$$= a_0 + a_1(b_1(y - y_0) + \dots + b_n(y - y_0)^n + (y - y_0)^n \varepsilon(y)) + \dots$$

$$+ \dots + a_n(b_1(y - y_0) + \dots + b_n(y - y_0)^n + (y - y_0)^n \varepsilon(y)) + (y - y_0)^n \varepsilon(y)$$

Calcul et troncature de toutes les puissances supérieures à n.

Exemples (en $x_0 = 0$)

- Somme $e^x - \cos(x) = ?$
  Applications aux limites usuelles en 0 :

$$\frac{e^x-1}{x}, \frac{e^x-1-x}{x}, \frac{e^x-1-x}{x^2}, \frac{1-\cos(x)}{x}, \frac{1-\cos(x)}{x^2}, \frac{\sin(x)}{x}, \frac{\ln(1+x)}{x} \dots$$

- Produit $\frac{e^x}{1-x}$ ordre 1, puis 2.
  Application : $\frac{e^{0.01}}{0{,}99}$ (= 1,02025269402...)

- Composition : $(1+y+y^2)^3 = f \circ g(y)$ avec $g(y)=y+y^2$ et

$f(x) = (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ avec $y_0=0$, $g(0)=0=x_0$. A l'ordre 2.

Autres exemples

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ à l'ordre 5 en $x_0 = 0$

- Avec formule de Taylor.
- Avec opérations sur les D.L.

Applications

- En sciences physique, calculs d'erreur (souvent le DL à l'ordre 1 suffit).

  Rappel : le mouvement du pendule sin x ≈ x, cos x ≈ 1

- En math
  - calculs de limite
  - Connaissance d'un graphe.

Exemple : $x \to \ln(1 + x + x^2)$ au voisinage de 0 et 1.