Outils mathématiques pour les sciences

CM2

MATH203

6 CM + 6 TD + 3 TP

Maria Kazakova (LAMA)
Bât. 21, bur. 21

Ce support est en construction, pour toutes remarques maria.kazakova@univ-smb.fr

Chapitre 1
Résolution des equations différentielles d'ordre deux

Théorème 1

L'ensemble des solutions de l'equation homogène (H)

$$(H) : a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = 0$$

forme un espace vectoriel de dimension 2.

Une base $(y_1(t), y_2(t))$ est donnée par

- $(e^{r_1 t}, e^{r_2 t})$ si $\Delta > 0$
- $(e^{\lambda t}\cos(\omega t), e^{\lambda t}\sin(\omega t))$ si $\Delta < 0$
- (e^{rt}, te^{rt}) si $\Delta = 0$

Preuve. [Admise]

Méthode: calcul de solutions dans le cas non-homogène

Théorème 4

L'ensemble de toutes les solutions de

$$(E) : a\ y''(t) + b\ y'(t) + c\ y(t) = f(t)$$

est obtenu en ajoutant une solution particulière de (E) à toutes les solutions de (H)

$$(H)\ a\ y''(t) + b\ y'(t) + c\ y(t) = 0$$

i.e. $\boxed{y(t) = y_H(t) + y_{part}(t)}$, $y_H(t)$ est les solutions de (H) et

$$a\ y_{part}''(t) + b\ y_{part}'(t) + c\ y_{part}(t) = f(t)$$

[Au tableau]

Exemple [Au tableau]

$$(E) \quad y''(t) + y(t) = t$$

Remarque

La différence entre deux solutions particulières est une solution de l'équation homogène !

Peut-on toujours garantir l'unicité?

Théorème 3

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(t_0, y_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction $\mathscr{C}^1$

Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Méthodes pour déterminer la solution particulière

I. Le second membre a une forme particulière

$$\boxed{f(t) = e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)\right),\ P_1,\ P_2 \text{ polynômes}}$$

II. Cas general : variation de la constante

Remarque (l'équation est linéaire):

Si $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

on peut faire la somme des solutions particulières.

I. Si on a $\boxed{f(t) = e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)\right),}$

Étape 1. On étudie les racines de l'équation caractéristique (C)

- si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation (C)

On cherche la solution sous la forme

$$\boxed{y(t) = e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\right)}$$

où Q_1, Q_2 polynômes de degré $\max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$

- si $\alpha+i\beta$ est la racine simple de l'équation (C)

On cherche la solution sous la forme

$$y(t) = e^{\alpha t}\, t \,(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t))$$

où Q_1, Q_2 polynômes de degré $\max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$

- si $\alpha+i\beta$ est la racine double de l'équation (C)

(possible seulement si $\beta=0$!!!)

On cherche la solution sous la forme

$$y(t) = e^{\alpha t}\, t^2 \left(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\right)$$

où Q_1, Q_2 polynômes de degré $\max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$

Exemples [Au tableau]

- $2y'' - 3y' - 2y = -2t^3 - 9t^2 + 10t - 3$
- $y'' + 4y = (8t + 12)e^{2t}$
- $y'' - 3y' + 2y = (-2t + 2)e^{t}$

II. Cas general : variation de la constante

Principe:

On remplace les constantes A, B dans l'expression des solutions de l'équation homogène (H) par des fonction inconnue $A(t)$, $B(t)$

$$y_H(t) = A\, y_1(t) + B\, y_2(t)$$

devient

$$y(t) = A(t)\, y_1(t) + B(t)\, y_2(t)$$

Pour définir la solution on doit déterminer $A(t)$, $B(t)$

Les equations pour A(t) et B(t) [Au tableau]

$$y(t) = A(t)\, y_1(t) + B(t)\, y_2(t)$$

Pour déterminer A(t), B(t) nous avons un système à résoudre

$$\begin{cases} A'(t)\, y_1(t) + B'(t)\, y_2(t) = 0 \\ A'(t)\, y_1'(t) + B'(t)\, y_2'(t) = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Exemple [Au tableau]

- $$y'' + y = \frac{1}{\cos(t)}$$

Problème inverse

Quelle équation différentielle linéaire du second ordre

à coefficients constants a pour solutions les fonctions :

$$y(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + t^2\sin(t), \quad A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}\ ?$$