SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Licence SPI 3 : parcours ESET et parcours TRI
BASES et OUTILS MATHEMATIQUES de l'INGENIEUR
(ETRS 522 - ETRS 523)

Date : 16/06/2022
Durée : 1h30

Règles pour l'épreuve :

- Une feuille manuscrite A4 recto/verso + le formulaire disponible en fin de sujet.
- Calculatrice interdite

Exercice 1 :

1°) Donner une primitive de $\int 2t.e^{t^2}\,dt$.

Se servir du résultat pour calculer l'intégrale $A = \int_1^2 2t^3.e^{(t^2+1)}\,dt$

2°) Calculer l'intégrale $\int_0^1 t^2.(1-t^2)\,dt$.

Se servir du résultat pour calculer l'intégrale $B = \int_0^{\pi/2}(\sin x)^2.(\cos x)^3\,dx$ à l'aide du changement de variable $t = sin(x)$.

Exercice 2 :

Soit f une application dans le corps des complexes telle que $f(z) = 1 + a.z^{2n}$ où a est un réel positif et n un entier positif.

1°) Existe-t-il des nombres z purement réels tels que $f(z)=0$? Justifier votre réponse.

2°) Pour n=2, et $a = \frac{1}{4}$ donner l'expression des solutions z_k de $f(z)= 0$ (k=0, 1, 2, 3) et placer les dans le plan complexe (axe horizontal = partie réelle, axe vertical = partie imaginaire).

3 °) Mettre $z_1 = \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{j\frac{5\pi}{4}}$ sous la forme $a+jb$.

4°) En déduire une expression polynomiale de f(z) que l'on écrira sous la forme

$f(z) = \prod_k(z - z_k) = (z - z_0).(z - z_1).(z - z_2).(z - z_3)$.

5°) Reprendre la question 2°) et donner l'expression des racines de f(z)=0 pour toutes valeurs de n et de a.

Exercice 3 : Dérivées

3.1) Dériver la fonction $f(x) = \dfrac{\cos(3x)-\sin(3x+\frac{\pi}{2})}{(e^{4x})^2}$

3.2) Calculer le gradient de la fonction $f(x,y,z) = x^4 \cdot \ln(y+z) + \frac{2.z^2.x+4.z.y}{4.x} + \sqrt{9.y}$

3.3) Une grandeur physique s'écrit comme suit :

$$P=(V_2-V_1)$$

On mesure

$$I=1.0\pm0.1\ A$$
$$V_1=10.0\pm0.2\ V$$
$$V_2=6.0\pm0.2\ V$$

1.5.a) Calculer la valeur numérique de P.
1.5.b) Donner l'expression simplifiée de ΔP et faire l'application numérique.
1.5.c) Donner l'expression simplifiée de $\frac{\Delta P}{P}$ et faire l'application numérique.

Exercice 4 : Equations différentielles

Soit l'équation différentielle

$$y'' - y' - 2y = 4 \qquad \text{(E1)}$$

où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur R.

a) Résoudre l'équation homogène (EH1) associée à (E1).
b) Déterminer une solution particulière de l'équation (E1).
c) Déterminer la solution générale de l'équation (E1).
d) Déterminer la fonction solution de (E1) vérifiant les conditions : $y(0) = -1$ et $y'(0) = 2$.
e) Représenter graphiquement à main levée la fonction y(x).

Formulaire : primitives usuelles

Forme de f	Forme de $\int f$	Forme de f	Forme de $\int f$	Forme de f	Forme de $\int f$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a}\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}$	$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{1}{x^n}(n\neq 1)$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\frac{1}{(ax+b)^n}(n\neq 1)$	$\frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$	$\frac{u'}{u^n}(n\neq 1)$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\|ax+b\|$	$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$x^\alpha(\alpha\neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$(ax+b)^\alpha(\alpha\neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{a}(ax+b)^{\alpha+1}$	$u'u^\alpha(\alpha\neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$
e^x	e^x	e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$u'e^u$	e^u
$\cos x$	$\sin x$	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\text{cotan}\, x$
$\tan x(=\frac{\sin x}{\cos x})$	$-\ln(\cos x)$	$\text{cotan}\, x(=\frac{\cos x}{\sin x})$	$\ln(\sin x)$	$a^x(=e^{x\ln a})$	$\frac{1}{\ln a}a^x$