Licence 3 Sciences pour l'Ingénieur TRI et ESET

ETRS 622 Probabilités et Statistiques des Télécommunications

2021-2022 session 1

Formulaire distribué en TD et calculatrice autorisés. Téléphone interdit.

Exercice 1 : Loi exponentielle

On suppose que la durée de vie d'un disque dur est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de densité de probabilité $f(t) = \frac{1}{\mathrm{tau}} \exp\left(-\frac{t}{tau}\right)$ où tau est la durée de vie moyenne exprimée en années. Le service commercial d'un fabricant veut garantir qu'un disque dur aura une probabilité inférieure à 0,01 (soit 1%) de tomber en panne la première année d'utilisation.

1. Rappeler comment calculer la probabilité que la durée de vie t d'un disque dur soit comprise entre 0 et t'. Etablir l'expression de $P(t \in [0, t' = 1])$ pour t'=1 an.
2. Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur pour que la garantie du constructeur soit valable ? Cette valeur vous paraît-elle réaliste ?

Exercice 2 : Deux événements

Soit A et B deux ´événements d'un univers Ω tels que :

P(A) =1/3; P(B) =1/4 et P(A U B) = 4/9

1. Rappeler la formule donnant P(A U B) en fonction de P(A), P(B) et P(A ∩ B).
2. En déduire la valeur de P(A ∩ B). Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Calculer $P(A|B)$; $P(\overline{A}|B)$; $P(A \cap \overline{B}|B)$

Exercice 3 : Bicyclette ou trottinette ?

On s'intéresse à la vitesse de déplacement d'un groupe de personnes se déplaçant en bicyclette ou en trottinette. On modélise cette vitesse de la façon suivante : la vitesse (exprimée en km/h) d'un individu est une variable aléatoire normale (gaussienne)

— de moyenne μ_B=20 et d'écart-type V_B=5 pour une personne se déplaçant à bicyclette ;
— de moyenne μ_T=25 et d'écart-type V_T=5 pour une personne se déplaçant en trottinette.

Le groupe qui nous intéresse est composé d'un cinquième (1/5) de cyclistes et de quatre cinquièmes (4/5) de trottinettistes.

On note **VB** la vitesse d'une personne se déplaçant en bicyclette
On note **VT** la vitesse d'une personne se déplaçant en trottinette

1. Ecrire les densités de probabilités $\mathbf{f_B}$ et $\mathbf{f_T}$ des variables aléatoires **VB** et **VT**
2. Quels sont les changements de variable qu'il faut faire pour transformer **VB** et **VT** en variables aléatoires centrées et réduites (que l'on nommera XB et XT) ?
3. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité qu'une personne se déplaçant à bicyclette ait une vitesse **VB** <15 km/h. Calculer cette probabilité P(**VB** <15).
4. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité qu'une personne se déplaçant à trottinette ait une vitesse **VT** <15 km/h. Calculer cette probabilité P(**VT** <15).

Soit **V** la vitesse d'un individu isolé, choisi au hasard, dont on ignore le moyen de transport.

5. Exprimer la probabilité de l'évènement [**V** < 15] à l'aide des probabilités calculées questions 2 et 3. Donner une valeur approchée à l'aide de la table de valeurs.

6. La vitesse d'un individu donné a été mesurée et elle est inférieure à 15 km/h. Quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'une personne se déplaçant à bicyclette ?
7. Déterminer l'expression de la densité de probabilité f_V de la variable **V**.
8. Calculer l'espérance et l'écart-type de **V**.

On rappelle ici quelques valeurs approchées de la fonction de répartition d'une loi normale $F(x)=\Pi(x)$ pour $\mu= 0$ et $\sigma= 1$:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$F(x)$	0.50	0.58	0.66	0.73	0.79	0.84	0.88	0.92	0.95	0.96	0.98	0.99	0.99	1.00

Exercice 4 : Codage de Huffman

Une source d'information émet un symbole pris parmi un alphabet de 4 lettres (a, b, c, d), avec les probabilités : P(a) = 1/2, P(b) = 1/4, P(c) = P(d).

Les symboles sont codés en binaire par l'algorithme de Huffman qui affecte au symbole le plus souvent émis la longueur la plus courte (c'est l'optimisation de la longueur X du code) :

a : 0 b : 10 c : 110 d : 111

soit X la variable aléatoire correspondant à la longueur du code envoyé pour un symbole émis (on a par exemple X=3 symboles pour la lettre c qui est codée 110).

1. Recopier et remplir le tableau suivant qui donne la distribution de probabilité P(X=x) et la fonction de répartition $F_X(x)$ de la variable aléatoire X.

X	x=1	x=2	x=3
P(X=x)			
$F_X(x) = P(X \leq x)$			

2. Tracer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
3. Calculer la longueur moyenne μ_X du code transmis par symbole.
4. Calculer la variance et l'écart type σ_X de la longueur du code transmis par symbole.

On émet désormais un mot de 4 symboles choisi au hasard parmi toutes les combinaisons possibles utilisant les lettres a, b, c, d (par exemple 'aaaa', 'baba', 'cadab', 'acdb', etc...).

5. Combien de mots différents peut-on écrire ?
6. Chaque symbole du mot étant codé selon la loi ci-dessus (a= 0, b=10 etc...) et étant toujours émis avec les probabilités données ci-dessus (P(a)=1/2 etc...), on note Y la longueur (en nombre de symboles) du mot de 4 lettres (exemple, pour le mot 'aaaa' qui est codé 0000 nous avons Y=4). Quelles sont les valeurs possibles de la v.a. Y ? Combien de mots différents vont donner Y=6 ?
7. Calculer la probabilité d'avoir Y=4 ; puis d'avoir Y= 6