Corrigé de la feuille 3 - Polynômes

Exercice 1. Questions de cours : se reporter au polycopié.

Exercice 2.

1. *Donner tous les polynômes non nuls de degré inférieur ou égal à* 3 *admettant* 2, 3 *et* -1 *comme racines.*
2. *Le polynôme* $X^4 + X^2 + 1$ *est-il irréductible dans* $\mathbb{R}[X]$ *?*

Solution.

1. Ce sont les polynômes de la forme $P = a(X+1)(X-2)(X-3) = aX^3 - 4aX^2 + aX + 6a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. Ils doivent en effet être divisibles par $X+1$, par $X-2$ et par $X-3$, et le quotient de la division de P par le produit $(X+1)(X-2)(X-3)$, qui est de degré 3, doit être de degré zéro, c'est-à-dire une constante non nulle a car $P \neq 0$.
2. Il est de degré 4 donc il n'est pas irréductible (voir le polycopié pour la liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$). On pourra d'ailleurs vérifier que $X^4+X^2+1 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$.

Exercice 3. *Effectuer la division euclidienne de* A *par* B *:*

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6, \quad B = X^2 - 3X + 1$
2. $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X, \quad B = X + 3$

Solution.

1.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
2X^4 & -3X^3 & +4X^2 & -5X & +6 & X^2 & -3X & +1 \\ \cline{6-8}
-2X^4 & +6X^3 & -2X^2 & & & 2X^2 & +3X & +11 \\ \cline{1-3}
 & 3X^3 & +2X^2 & & & & & \\
 & -3X^3 & +9X^2 & -3X & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 11X^2 & -8X & & & & \\
 & & -11X^2 & +33X & -11 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 25X & -5 & & &
\end{array}
$$

$$A = B(2X^2 + 3X + 11) + 25X - 5$$

2.

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrrr}
2X^5 & & -5X^3 & & -8X & & X & +3 & & & \\ \cline{7-11}
-2X^5 & -6X^4 & & & & & 2X^4 & -6X^3 & +13X^2 & -39X & +109 \\ \cline{1-2}
 & -6X^4 & & & & & & & & & \\
 & 6X^4 & +18X^3 & & & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 13X^3 & & & & & & & & \\
 & & -13X^3 & -39X^2 & & & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -39X^2 & & & & & & & \\
 & & & 39X^2 & +117X & & & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & +109X & & & & & & \\
 & & & & -109X & -327 & & & & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & -327 & & & & &
\end{array}
$$

$$A = B(2X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 39X + 109) - 327$$

Exercice 4. *À quelle condition le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $B = X^2 + X + 1$?*

Solution. Effectuons la division euclidienne de A par B :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & & +aX^2 & +bX & +c & X^2 \quad +X \quad +1 \\ \cline{6-6}
-X^4 & -X^3 & -X^2 & & & X^2 \quad -X \quad +a \\ \cline{1-3}
& -X^3 & +(a-1)X^2 & & & \\
& X^3 & +X^2 & +X & & \\ \cline{2-4}
& & aX^2 & +(b+1)X & & \\
& & -aX^2 & -aX & -a & \\ \cline{3-5}
& & & (b-a+1)X & +c-a &
\end{array}
$$

$$A = B(X^2 - X + a) + \underbrace{(b - a + 1)X + c - a}_{R}$$

Pour que $B|A$ il est nécéssaire et suffisant que le reste R soit nul : $b - a + 1 = 0$ et $c - a = 0$. La condition est donc $c = a$ et $b = a - 1$ avec a réel quelconque.

Exercice 5. *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$ et a un réel. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X - a$? Retrouver la condition nécessaire et suffisante pour que $X - a$ divise P.*

Solution. $P = (X - a)\,Q + R$ avec $deg(R) < 1 = deg(X - a)$, le reste est donc une constante r. Alors on a immédiatement les équivalences :

$$P(a) = 0 \iff r = 0 \iff (X - a)|P$$

Exercice 6.

1. *Écrire les polynômes suivants sous forme de produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:*

$$a)\ P = 4X^2 + 5X + 1 \qquad b)\ Q = X^4 + X^2 - 6$$

2. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :*

$$a)\ 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 \leq 0 \qquad b)\ x^3 - 5x^2 + 3x + 9 > 0$$

Solution.

1. (a) On remarque que $P(-1) = 0$: on peut factoriser P par $X + 1$. La division euclidienne ou la méthode des coefficients indéterminés donne alors

$$P = (X + 1)\,(4X + 1).$$

(b) En posant $Y = X^2$ on se ramène à chercher les racines de $Y^2 + Y - 6$: on trouve facilement 2 et -3 et on a $Y^2 + Y - 6 = (Y - 2)(Y + 3)$. On en déduit que :

$$Q = (X^2 - 2)\,(X^2 + 3) = (X - \sqrt{2})\,(X + \sqrt{2})\,(X^2 + 3).$$

2. (a) 1 est racine évidente et après factorisation par la méthode de votre choix (division ou coefficients indéterminés) on obtient :

$$2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 = (x - 1)\,(2x^2 - 5x - 12)$$

Le second facteur a pour racines $-\dfrac{3}{2}$ et 4 (résoudre l'équation du second degré) : l'inéquation s'écrit donc :

$$(x - 1)\,(x + \frac{3}{2})\,(x - 4) \leq 0$$

et un tableau de signes permet de conclure :

$$2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 \leq 0 \iff x \leq -\frac{3}{2} \text{ ou } 1 \leq x \leq 4,$$

ou encore $\mathcal{S} =]-\infty, -\dfrac{3}{2}] \cup [1, 4]$.

(b) -1 est racine évidente et après factorisation on obtient $x^3-5x^2+3x+9=(x+1)\,(x-3)^2$. On a donc (sans tableau) :

$$x^3-5x^2+3x+9>0 \Longleftrightarrow x>-1 \text{ et } x\neq 3,$$

ou encore $\mathcal{S}=]-1,3[\cup]3,+\infty[$.

Pour travailler en autonomie

Exercice 7. Écrire le polynôme $P=2X^4-5X^3+X^2+2X$ sous forme de produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution. $R=X\,(2X^3-5X^2+X+2)$ et on constate ainsi que 0 et 1 sont racines évidentes de R. Après factorisation par $X\,(X-1)$ (division ou coefficients indéterminés) on aboutit à $R=X\,(X-1)\,(2X^2-3X-2)$. Le dernier facteur a pour racines $-\dfrac{1}{2}$ et 2 (résoudre l'équation du second degré) et finalement :

$$R=X\,(X-1)\,2\,(X+\frac{1}{2})(X-2)=X\,(X-1)\,(X-2)\,(2X+1).$$

Exercice 8. Soient $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P)\geq 2$, a et b des réels distincts. Exprimer en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X-a)(X-b)$ divise P.

Solution. On effectue la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$: $P=(X-a)(X-b)\,Q+R$ avec $deg(R)<2=deg(X-a)(X-b)$. Comme précédemment le reste est donc de la forme $R=\alpha X+\beta$. On a $\left\{\begin{array}{lcl} P(a) & = & R(a)=\alpha a+b \\ P(b) & = & R(b)=\alpha b+b \end{array}\right.$ d'où, après calculs, $\alpha=\dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}$ et $\beta=\dfrac{a\,P(b)-b\,P(a)}{a-b}$ et :

$$(X-a)(X-b)|P \Longleftrightarrow R=0 \Longleftrightarrow \alpha=\beta=0 \Longleftrightarrow P(a)=P(b)=0.$$

Exercice 9. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P=(X^2+1)^n-2X^{2n}+(X^2-1)^n$.*

1. *Donner, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de X, les trois premiers termes du développement de $(X^2+1)^n$ et de $(X^2-1)^n$.*
2. *En déduire le terme de plus haut degré de P.*

Solution.

1. La formule du binôme appliqué à $(X^2+1)^n$ donne, en ne précisant que les trois premiers termes :

$$(X^2)^n+\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right)(X^2)^{n-1}+\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right)(X^2)^{n-1}+\cdots$$

c'est à dire $(X^2+1)^n=X^{2n}+nX^{2n-2}+\dfrac{n(n-1)}{2}X^{2n-4}+\cdots$

De même : $(X^2-1)^n=X^{2n}-nX^{2n-2}+\dfrac{n(n-1)}{2}X^{2n-4}+\cdots$

2. Le terme de plus haut degré de P s'en déduit immédiatement : c'est $n(n-1)X^{2n-4}$. On remarque au passage que pour $n=0$ un calcul direct donne $P=0$, ce qui est cohérent avec ce résultat, même si on peut critiquer dans ce cas l'usage de X^{2n-4}. La situation intéressante est donc plutôt $n\geq 2$.

Exercice 10. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soient Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $A=(X-3)^{2n}+(X-2)^n-2$ par $B=(X-2)(X-3)$.*
En calculant $A(a)$ pour deux valeurs bien choisies de a, déterminer le reste R.

Solution. On a $A=BQ+R$ avec $\deg(R)\leq 1$ (car $\deg(B)=2$). R est donc de la forme $B=\alpha X+\beta$ et il faut trouver les valeurs des coefficients α et β. D'une part les réels 2 et 3 sont racines de B, d'autre part on obtient facilement $A(2)=-1$ et $A(3)=-1$. On obtient donc les égalités $-1=R(2)=2\alpha+\beta$ et $-1=R(3)=3\alpha+\beta$ d'où on déduit $\alpha=0$ et $\beta=-1$ et finalement $R=-1$.