

Chapitre 2 : nombres entiers, rationnels, réels

L1 MATH103_MISPI

Sommaire

- 1 Entiers naturels, récurrence
- 2 Entiers relatifs, nombres rationnels
- 3 Formule du binôme
- 4 Nombres réels

Sommaire

- 1 Entiers naturels, récurrence
- 2 Entiers relatifs, nombres rationnels
- 3 Formule du binôme
- 4 Nombres réels

Entiers naturels

Ensemble noté **N**. Sa construction mathématique est hors programme.

On rappelle que $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

p et q étant deux entiers tels que $p \leq q$, on note $\llbracket p, q \rrbracket$ l'ensemble des entiers compris entre p et q , extrémités comprises :

$$\llbracket p, q \rrbracket = \{n \in \mathbf{N} : p \leq n \leq q\}$$

Exemple

$$\llbracket 1, 5 \rrbracket = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Proposition

Pour tout couple $(a, \mathbf{b})$ d'entiers naturels tel que $\mathbf{b} \neq 0$ il existe un unique couple $(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ d'entiers tel que $a = \mathbf{b}\mathbf{q} + \mathbf{r}$ et $\mathbf{r} < \mathbf{b}$

$\mathbf{q}$ et $\mathbf{r}$: quotient et reste de la division euclidienne de a par $\mathbf{b}$.

Si $\mathbf{r} = 0$ alors $a = \mathbf{b}\mathbf{q}$ et on dit que $\mathbf{b}$ divise a , ou que a est multiple de $\mathbf{b}$. On écrit $\mathbf{b} \mid a$

Attention : l'**unicité** du couple $(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ est assuré par la contrainte $\mathbf{r} < \mathbf{b}$: il ne faut donc pas oublier celle-ci dans l'énoncé

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Proposition

Pour tout couple (a, b) d'entiers naturels tel que $b \neq 0$ il existe un unique couple (q, r) d'entiers tel que $a = bq + r$ et $r < b$

8	7	3	1	8	1	9
7	6				4	5
					9	5
1	1	3				
	9	5				
			1	8	1	
	1	7	1			
				1	0	8
			9	5		
					1	3

Décomposition en produit de facteurs premiers

On rappelle qu'un entier > 1 est *premier* si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même. Tout entier naturel > 1 possède au moins un diviseur premier et on a le résultat de décomposition suivant :

Proposition

Soit $n > 1$ un entier naturel. Il existe une unique séquence de nombres premiers $p_1 < \dots < p_k$ et une unique séquence d'entiers naturels non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$.

Exemple

$$87318 = 2 \times 3^4 \times 7^2 \times 11.$$

On a $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$ et $\alpha_4 = 1$.

Récurrence

On cherche à prouver une assertion de la forme

$$\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$$

où $P(n)$ est une propriété qui dépend de l'entier n ,
autrement dit à prouver que tous les entiers vérifient la
propriété P .

On montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0) \text{ est vraie (initialisation)} \\ \forall n \in \mathbf{N}, (P(n) \implies P(n+1)) \text{ (hérédité)} \end{array} \right.$$

On conclut : $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$

(comprendre : « pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie »)

Récurrence

On pourra penser à l'analogie d'une course de relais : pour que le témoin passe par toutes les mains, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- le premier coureur doit partir avec le témoin dans la main,
- tout coureur qui a son témoin en main doit le transmettre au suivant,

faute de quoi il y a élimination.

Exemple

Il s'agit de montrer que la propriété :

$$P(n) : 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

est vraie pour tout entier n

Exemple

$$P(n) : 0 + 1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

① $P(0) : 0 = \frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6}$, donc $P(0)$ est vraie.

② **Hypothèse de récurrence** : $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n (\geq 0)$

On doit montrer que $P(n+1)$ est vraie

Exemple

$$P(n) : 0 + 1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

① $P(0) : 0 = \frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6}$, donc $P(0)$ est vraie.

② **Hypothèse de récurrence :** $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n (\geq 0)$

On doit montrer que $P(n+1)$ est vraie

Exemple

$$P(n) : 0 + 1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} (0 + 1 + 2^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)}{6} [2n^2 + n + 6n + 6] \\ &= \frac{(n+1)}{6} (n+2)(2n+3) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, on a montré que l'égalité est valide pour tout entier n .

Sommaire

- 1 Entiers naturels, récurrence
- 2 Entiers relatifs, nombres rationnels
- 3 Formule du binôme
- 4 Nombres réels

Entiers relatifs, nombres rationnels

Pour mémoire...

Z : ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$

Q : ensemble des rationnels, $r \in \mathbf{Q}$, $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$

L'équation $x^2 = 2$, par exemple, n'a pas de solution dans **Q**. On dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, comme la plupart des humains. Ceci, entre autres, rend nécessaire la construction d'un ensemble tel que **R**.

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Proposition

Pour tout couple (a, b) d'entiers relatifs tel que $b \neq 0$ il existe un unique couple (q, r) d'entiers relatifs tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

Exemple : $(a, b) = (-7, -2)$.

$$-7 = -2 \times 4 + 1 \text{ et non pas } -7 = -2 \times 3 - 1.$$

On a $q = 4$ et $r = 1$.

Sommaire

- 1 Entiers naturels, récurrence
- 2 Entiers relatifs, nombres rationnels
- 3 Formule du binôme
- 4 Nombres réels

Factorielle

Pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$n! := n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

C'est le produit des n premiers entiers non nuls.
On pose $0! = 1$ par convention.

Exemple

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

On a la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n+1)! = (n+1) n!$$

Combinaisons de p éléments parmi n

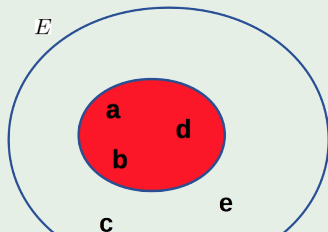
Définition

Une *combinaison* de p éléments d'un ensemble à n éléments est une partie à p éléments de cet ensemble.

Le *nombre* de ces combinaisons est noté $\binom{n}{p}$

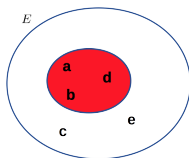
Exemple

On veut choisir un groupe de 3 étudiants parmi 5.



Combinaisons de p éléments parmi n

Choisir 3 étudiants parmi 5



Il y a $5 \times 4 \times 3$ façons de les désigner l'un après l'autre, donc avec un ordre. Par exemple $(a, d, b) \dots$

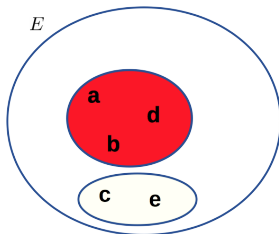
Il y a $3 \times 2 = 6 = 3!$ façons d'ordonner ces mêmes 3 étudiants :
 (a, b, d) , (a, d, b) , (b, a, d) , (b, d, a) , (d, a, b) , (d, b, a)

On conclut que le nombre de parties à 3 éléments parmi 5 est
$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10.$$

Cela peut s'écrire
$$\frac{(5 \times 4 \times 3) \times (2 \times 1)}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = \frac{5!}{3! 2!}$$

Combinaisons de p éléments parmi n

Choisir 3 étudiants parmi 5



C'est aussi le nombre de façons de choisir 2 étudiants parmi 5 :
ceux qu'on écarte

Combinaisons de p éléments parmi n

Nombre de combinaisons de p éléments parmi n avec $n \in \mathbf{N}$,
 $0 \leq p \leq n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &:= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \cdots \times 1}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times (n-p) \times (n-p-1) \times \cdots \times 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}}$$

Exemples et propriétés

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

- $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$

- $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}} \text{ (avec } 1 \leq p \leq n-1 \text{)}$

Exemples et propriétés

Prouvons cette dernière propriété

Dans un ensemble E à n éléments on doit choisir p éléments :

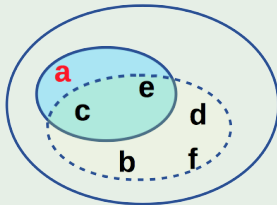
$\binom{n}{p}$ façons.

On en choisit un quelconque mais fixé : a par exemple

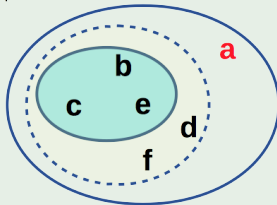
Exemple

$n = 6, p = 3$

Choisir 3 parmi 6

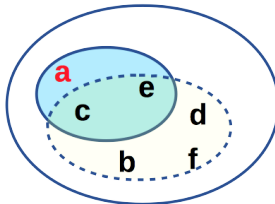


Choisir 2 parmi 5

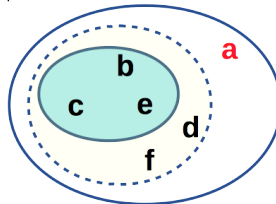


Choisir 3 parmi 5

Choisir 3 parmi 6



Choisir 2 parmi 5



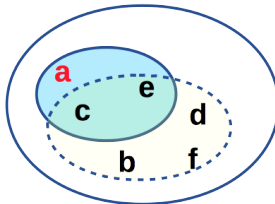
Choisir 3 parmi 5

Parmi les parties à p éléments il y a :

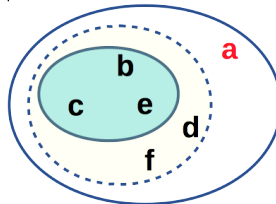
celles qui contiennent a : on les obtient en lui adjoignant $p - 1$

éléments parmi les $n - 1$ restants : $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités

Choisir 3 parmi 6



Choisir 2 parmi 5



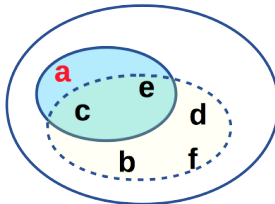
Choisir 3 parmi 5

Parmi les parties à p éléments il y a :

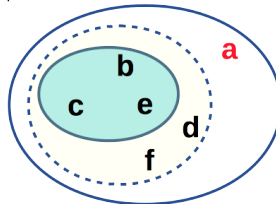
celles qui ne contiennent pas a : on les obtient en choisissant p

éléments parmi les $n - 1$ restants : $\binom{n-1}{p}$ possibilités

Choisir 3 parmi 6



Choisir 2 parmi 5



Choisir 3 parmi 5

Il reste à faire la somme car les deux cas s'excluent mutuellement :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Triangle de Pascal

Il permet de calculer de proche en proche les $\binom{n}{p}$:

$$\begin{array}{cccccc} \binom{0}{0} & & & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \end{array}$$

Triangle de Pascal

Il permet de calculer de proche en proche les $\binom{n}{p}$:

	1						
$n = 1$	1	1					
$n = 2$	1	2	1				
$n = 3$	1	3	3	1			
$n = 4$	1	4	6	4	1		
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1

n numérote les lignes et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ les colonnes

Triangle de Pascal

Il est basé sur l'égalité $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
	↓					
1	5	10	10	5	1	
			?			
1	6	15	20	15	6	1

$$\binom{5}{1} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} = 1 + 4 = 5$$

$$\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

Symboles $\sum$ et $\prod$

Sur quelques exemples :

$$\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n, \quad \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$\sum_{k=2}^8 k^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$$

Formule du binôme

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration.

Par récurrence sur n .



Les coefficients se lisent sur la ligne $n \in \mathbf{N}$ du triangle de Pascal.

Formule du binôme

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemple

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a b^4 + b^5$$

Remarque

On peut aussi écrire la formule du binôme dans l'ordre inverse :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Sommaire

- 1 Entiers naturels, récurrence
- 2 Entiers relatifs, nombres rationnels
- 3 Formule du binôme
- 4 Nombres réels

Nombres réels

Dans **N**, l'équation $x + 1 = 0$ (par exemple) n'a pas de solution, c-à-d. que 1 n'est pas symétrisable dans **N**, ainsi d'ailleurs que tous les entiers naturels non nuls.

Ceci amène à la construction de l'ensemble **Z** des entiers relatifs : -1 est alors la solution de cette équation.

Nombres réels

Dans $\mathbf{Z}$, l'entier non nul a étant donné, l'équation $x \cdot a = 1$ n'a pas de solution, sauf pour $a \in \{-1, 1\}$.

Ce problème est résolu par la construction de l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels : la solution est alors $\frac{1}{a}$.

Nombres réels

Dans **Q**, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution.

Il y a aussi d'autres défauts, liés essentiellement à la notion de borne supérieure (voir plus loin) qui rendent nécessaire la construction de l'ensemble **R** des nombres réels

Nombres réels : opérations

$\mathbf{R}$ est un ensemble muni de deux opérations, la somme et le produit, qui doivent être *entendues* comme des applications :

$$\begin{array}{lcl} + : \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} \times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x y \end{array}$$

Nombres réels : opérations

Propriétés de la somme :

- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
- 0 est élément neutre : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad x + 0 = 0 + x = x$
- Tout élément est symétrisable :
 $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists ! y \in \mathbf{R}), \quad x + y = y + x = 0.$
On note y sous la forme $-x$ et la notation $a - b$ représente $a + (-b)$ (soustraction).
- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x + y = y + x$

On dit que $(\mathbf{R}, +)$ est un groupe commutatif

Nombres réels : opérations

Propriétés du produit :

- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x y = y x$
- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad (x y) z = x (y z)$
- 1 est élément neutre : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad x.1 = 1.x = x$
- Tout élément non nul est inversible :
 $\forall x \in \mathbf{R}^*, \exists ! y \in \mathbf{R}^*, \quad x y = y x = 1.$ y est noté $\frac{1}{x}$
Ces propriétés rendent $(\mathbf{R}^*, \times)$ un groupe commutatif
- Distributivité du produit sur la somme :
 $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad x (y + z) = x y + x z$

Nombres réels : opérations

On dit finalement que

$(\mathbf{R}, +, \times)$ est un corps commutatif

$(\mathbf{Q}, +, \times)$ a les mêmes propriétés algébriques que $(\mathbf{R}, +, \times)$:
 $(\mathbf{Q}, +, \times)$ est aussi un corps commutatif.

Nombres réels

Autres propriétés usuelles (programme de 5^e) :

- $-(ab) = (-a)b = a(-b), \quad \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \frac{1}{b},$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$ en particulier $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ pour $k \in \mathbf{R}^*,$
- $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a},$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$

Nombres réels

Exposants : on pose $x^1 = x$ et pour $x \neq 0$, $x^0 = 1$.

La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}$, $x^{n+1} = x \cdot x^n$ permet de définir x^n pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall n, p \in \mathbf{N}, \quad x^{np} = (x^n)^p = (x^p)^n, \quad x^{n+p} = x^n x^p$$

La convention $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ permet d'étendre la notion d'exposant aux exposants entiers relatifs avec les mêmes règles de calcul

Relation d'ordre

Sur $\mathbf{R}$, il existe une relation d'ordre $\leq$ qui permet de comparer les réels entre eux :

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbf{R}_+ = [0, +\infty[.$$

La terminologie « relation d'ordre » est liée aux propriétés :

- ① $\forall x \in \mathbf{R}, x \leq x$ (*réflexivité*),
- ② $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$ (*transitivité*),
- ③ $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y$ (*antisymétrie*)

Relation d'ordre

Sur **R**, il existe une relation d'ordre $\leq$ qui permet de comparer les réels entre eux :

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbf{R}_+ = [0, +\infty[.$$

Si x et y sont des réels, alors on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$:

On dit que la relation d'ordre $\leq$ est *totale*

Relation d'ordre et règles de base

- On peut **ajouter** un même réel aux deux membres d'une inégalité :

$$x \leq y \implies x + a \leq y + a$$

- On peut **multiplier** par un même réel **positif** les deux membres d'une inégalité :

$$\begin{cases} x \leq y \\ 0 \leq a \end{cases} \implies ax \leq ay$$

On dit que les opérations $+$ et $\times$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leq$.

Relation d'ordre et règles de base

- Si on **multiplie** par un même réel **négalif** les deux membres d'une inégalité, **cela change le sens de l'inégalité** :

$$\begin{cases} x \leq y \\ a \leq 0 \end{cases} \implies ay \leq ax$$

- On peut **ajouter membre à membre** des inégalités de même sens :

$$\begin{cases} x \leq y \\ a \leq b \end{cases} \implies x + a \leq y + b$$

Relation d'ordre et règles de base

- Si on **multiplie** par un même réel **négatif** les deux membres d'une inégalité, **cela change le sens de l'inégalité** :

$$\begin{cases} x \leq y \\ a \leq 0 \end{cases} \implies ay \leq ax$$

- ATTENTION** : on ne peut **pas soustraire des inégalités membre à membre**. Il faut se ramener au cas précédent

Exemple

$$\begin{cases} x \leq y \\ a \leq -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq y \\ 1 \leq -a \end{cases} \text{ d'où } x + 1 \leq y - a$$

Relation d'ordre et règles de base

- On peut **multiplier membre à membre** des inégalités de même sens si tout les membres sont **positifs** :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq a \leq b \end{cases} \implies ax \leq by$$

- Inverse et division :**

$$0 < x \leq y \iff 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$$

D'où : $\begin{cases} 0 < a \leq b \\ 0 < x \leq y \end{cases} \implies \frac{a}{y} \leq \frac{b}{x}$ en utilisant le produit membre à membre.

En fait, il faut toujours voir la division comme une multiplication

par l'inverse : $\frac{a}{x} = a \cdot \frac{1}{x}$

Valeur absolue : définition et propriétés

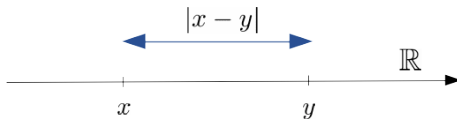
$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés :

- $|-x| = |x|,$
- $|xy| = |x| |y|,$
- **Inégalité triangulaire :** $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |x \pm y| \leq |x| + |y|,$
- **Conséquence :** $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x \pm y|$

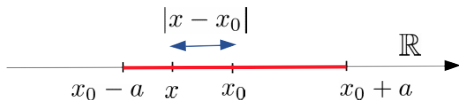
Valeur absolue et distance

Pour x et y réels, $|x - y|$ mesure la distance entre x et y .



soient $x_0 \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$ et $a \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned}|x - x_0| \leqslant a &\iff -a \leqslant x - x_0 \leqslant a \\ &\iff x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a\end{aligned}$$



$$[x_0 - a, x_0 + a] = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| \leqslant a\}$$

Majorants, minorants

A désigne une partie de $\mathbf{R}$

Définition (Majorant, minorant)

Un *majorant* de A est un réel M tel que $\forall x \in A, x \leq M$.

Un *minorant* de A est un réel m tel que $\forall x \in A, x \geq m$.

Attention : ces éléments n'existent pas toujours.

S'il existe un majorant (resp. un minorant) alors A est *majorée* (resp. *minorée*).

Un ensemble de réels à la fois majoré et minoré est *borné*.

Majorants, minorants

On retiendra :

Proposition

Une partie A est bornée si et seulement si il existe un réel M' tel que $\forall x \in A, \quad |x| \leq M'$.

Majorants, minorants

Exemple

- $A = \mathbf{N}$: 0 est un minorant, -10 en est un autre, il n'existe pas de majorant
- $A =]0, 1[$: -2 est un minorant, 1 est un majorant, π en est un autre.

Plus grand élément, plus petit élément

- S'il existe un majorant M de A qui est élément de A , alors il est *unique*. On l'appelle *le plus grand élément (ou maximum) de A* .

On écrit $M = \max(A)$.

- De même, si un réel m est un minorant de A et est élément de A , on l'appelle *le plus petit élément (ou minimum) de A* .

On écrit $m = \min(A)$

L'unicité est très simple à obtenir : si M et M' sont des majorants de A et sont dans A , on a à la fois $M \leq M'$ ($M \in A$ et M' majorant) et $M' \leq M$ ($M' \in A$ et M majorant), donc $M = M'$.

Ces éléments n'existent pas toujours non plus.

Plus grand élément, plus petit élément

Exemple

- $A = \mathbf{N}$: 0 est le plus petit élément, il n'y a pas de plus grand élément
- $A =]0, 1[$: ni plus petit ni plus grand élément
- $A =]0, 1]$: pas de plus petit élément, 1 est le plus grand élément : $\max(A) = 1$

Plus grand élément, plus petit élément

Des propriétés usuelles (admises) :

- Toute partie non vide de $\mathbf{N}$ admet un plus petit élément
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$ admet un plus grand élément
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbf{Z}$ admet un plus petit élément
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{Z}$ admet un plus grand élément

Plus grand élément, plus petit élément

Des propriétés usuelles (admises) :

- Toute partie non vide de $\mathbf{N}$ admet un plus petit élément
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$ admet un plus grand élément
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbf{Z}$ admet un plus petit élément
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{Z}$ admet un plus grand élément

Plus grand élément, plus petit élément

Application : partie entière d'un réel.

étant donné un réel x , l'ensemble non vide des entiers relatifs n tels que $n \leq x$ est majoré (par x)

Il admet donc un plus grand élément qu'on appelle sa *partie entière (inférieure)* notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

C'est l'unique entier vérifiant

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

ou de manière équivalente

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Exemples :

$$\lfloor 2 \rfloor = ?, \lfloor \pi \rfloor = ?, \lfloor -2 \rfloor = ?, \lfloor -2.7 \rfloor = ?$$

Plus grand élément, plus petit élément

Application : partie entière d'un réel.

étant donné un réel x , l'ensemble non vide des entiers relatifs n tels que $n \leq x$ est majoré (par x)

Il admet donc un plus grand élément qu'on appelle sa *partie entière (inférieure)* notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

C'est l'unique entier vérifiant

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

ou de manière équivalente

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Exemples :

$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor -2 \rfloor = -2, \lfloor -2.7 \rfloor = -3$$

Borne supérieure et borne inférieure

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$.

On admettra que l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément S : on l'appelle *la borne supérieure de A*

borne supérieure de A = plus petit de tous les majorants de A

S est donc unique et caractérisé par :

- ① S est un majorant de A ,
- ② si M est un majorant quelconque de A alors $S \leq M$.

On écrit $S = \sup A$.

Borne supérieure et borne inférieure

De même, si A est non vide et minorée alors l'ensemble des minorants possède un plus grand élément s qu'on appelle *borne inférieure de A*

borne inférieure de A = plus grand de tous les minorants de A

- ① s est un minorant de A ,
- ② si m est un minorant quelconque de A alors $m \leq s$.

On écrit $s = \inf A$

Borne supérieure et borne inférieure

Exemples :

- $A = \mathbf{N}$: 0 est le plus petit élément et la borne inférieure.
Pas de borne supérieure
- $A =]0, 1[$: $\inf A = 0$, $\sup A = 1$
- $A =]0, 1]$: $\inf A = 0$, $\sup A = 1$.

Borne supérieure et borne inférieure

Exemples :

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^* \right\}. \quad \inf(A) = ?, \sup(A) = ?$$

Borne supérieure et borne inférieure

Exemples :

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^* \right\}. \quad \inf(A) = 0, \sup(A) = \max(A) = 1$$

Borne supérieure et borne inférieure

Si A possède un plus grand élément, c'est aussi la borne supérieure mais la réciproque est fausse : comparer aux exemples ci-dessus

Il faut donc bien faire la différence entre $\max(A)$ et $\sup(A)$, en particulier :

$$M = \max(A) \iff M = \sup(A) \text{ et } M \in A$$

Remarque analogue pour la borne inférieure et le plus petit élément.

Si A est non vide et borné avec $s = \inf A$ et $S = \sup A$ alors on a

$$\forall x \in A, \quad s \leq x \leq S$$

et ceci est le plus **fin** des encadrements communs à tous les éléments de A (avec des inégalités larges).

Borne supérieure et borne inférieure

Proposition

Soient A un ensemble non vide, s et S des réels. Alors :

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, & x \leq S, \\ \forall \varepsilon > 0, & A \cap]S - \varepsilon, S] \neq \emptyset \\ \text{ou encore : } (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A), & S - \varepsilon < x \leq S. \end{cases}$$

De même :

$$s = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, & s \leq x, \\ \forall \varepsilon > 0, & A \cap [s, s + \varepsilon[\neq \emptyset. \end{cases}$$