

Chapitre 1 : éléments du langage mathématique

L1 MATH103_MISPI

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Opérations logiques
- 3 Principe des démonstrations
- 4 Les ensembles
- 5 Relations, fonctions, applications

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Opérations logiques
- 3 Principe des démonstrations
- 4 Les ensembles
- 5 Relations, fonctions, applications

Introduction

L'utilisation du langage courant en mathématiques peut conduire à des imprécisions voire des ambiguïtés... D'où la nécessité d'

un langage raisonnablement formalisé,

c-à-d. une grammaire de symboles mathématiques et d'un vocabulaire précis.

On va donner dans ce qui suit les bases logiques du raisonnement mathématique et préciser quelques éléments de théorie des ensembles.

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Opérations logiques
- 3 Principe des démonstrations
- 4 Les ensembles
- 5 Relations, fonctions, applications

Assertion (ou proposition)

Définition

Une *assertion* ou *proposition* est un énoncé susceptible d'être vrai (V) ou faux (F) sans ambiguïté.

Notée A , B , ... ou encore $A(x)$ si elle dépend par exemple d'un objet x .

Exemple

- A : « 4 est un entier pair. » Cette assertion est vraie.
- $A(n)$: « tout entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier. » Cette assertion est vraie.

Assertion (ou proposition)

Exemple

- B : « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. » (c-à-d. peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers *relatifs*)

Cette assertion est fausse : on dit que $\sqrt{2}$ est un nombre *irrationnel*.

- C : « pour tout entier n . » **n'est pas** une assertion !

Négation (non A ou $\neg A$)

Définition

La *négation* (non A) de A est l'assertion qui est vraie si A est fausse et fausse si A est vraie.

On peut en dresser une « table de vérité » :

A	non A
V	F
F	V

Exemple

B : « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. »

(non B) est vraie.

Conjonction (A et B)

Définition

L'assertion (A et B) est vraie *seulement* si A et B sont vraies.

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple

« 9 est impair et 9 est multiple de 3. » : assertion vraie.

« 9 est pair et 9 est multiple de 3. » : assertion fausse.

Disjonction (A ou B) *ou inclusif*

Définition

Cette assertion est vraie si l'une au moins des deux assertions A , B est vraie.

Il y a donc exactement trois cas possibles où la disjonction est vraie :

- A vraie et B fausse,
- A fausse et B vraie,
- A et B sont vraies en même temps.

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Associativité & distributivité

Tout d'abord

« et », « ou » sont commutatifs !

Soit A , B , C des assertions. Alors

$$\left. \begin{array}{l} (A \text{ et } B) \text{ et } C \vdash A \text{ et } (B \text{ et } C) \\ (A \text{ ou } B) \text{ ou } C \vdash A \text{ ou } (B \text{ ou } C) \end{array} \right\} \text{ associativité de « et », « ou »}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ ou } (B \text{ et } C) \vdash (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C) \\ A \text{ et } (B \text{ ou } C) \vdash (A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C) \end{array} \right\} \text{ distributivité}$$

(Attention au parenthésage !)

Implication ($A \implies B$)

Définition

L'assertion ((non A) ou B) se note $A \implies B$ et se lit « A implique B ».

Avec les règles précédentes on construit sa table de vérité.

A	B	non A	$A \implies B$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On voit que la seule contrainte pour que $A \implies B$ soit vraie est le cas où A est vraie : B doit alors être nécessairement vraie.

Implication ($A \implies B$)

Supposons qu'on ait $A \implies B$.

On dit que B est *une* condition *nécessaire* pour A car pour que A soit vraie il *faut* (*i. e. est nécessaire*) que B le soit, c-à-d. A ne peut pas être vraie si B est fausse. (Mais l'assertion B peut être vraie sans que A le soit !)

On dit aussi que A est une condition *suffisante* pour B car *il suffit* que A soit vraie pour que B le soit.

Exemple

Si $a \in \mathbf{R}$ alors l'assertion

$$a \leq -1 \implies a^2 \geq 1$$

est vraie.

Équivalence ($A \iff B$)

Définition

Les assertions A et B sont *équivalentes* si $A \implies B$ et $B \implies A$ sont vraies.

Ces deux dernières assertions sont dites *réciroques* l'une de l'autre. On écrit alors

$$A \iff B.$$

On dit que A est une condition *nécessaire et suffisante* de B (et vice-versa) ou encore, A si et seulement si B .

A	B	$A \iff B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Équivalence ($A \iff B$)

C-à-d. $A \iff B$ est vraie *précisément* **si** A **et** B sont simultanément vraies *ou bien* simultanément fausses.

Exemple

Soit $a \in \mathbf{R}$. L'assertion

$$(a \geq 1 \text{ ou } a \leq -1) \iff a^2 \geq 1$$

est vraie.

Quelques conséquences ou règles de calcul

Soient A et B deux assertions. Alors :

- $\text{non}(\text{non } A) \iff ?$
- $\text{non}(A \text{ et } B) \iff ((\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \text{ ou } B) \iff ((\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \implies B) \iff (A \text{ et } (\text{non } B))$

Quelques conséquences ou règles de calcul

Soient A et B deux assertions. Alors :

- $\text{non}(\text{non } A) \iff A$
- $\text{non}(A \text{ et } B) \iff ((\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \text{ ou } B) \iff ((\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \implies B) \iff (A \text{ et } (\text{non } B))$

Quelques conséquences ou règles de calcul

Soient A et B deux assertions. Alors :

- $\text{non}(\text{non } A) \iff A$
- $\text{non}(A \text{ et } B) \iff ?$
- $\text{non}(A \text{ ou } B) \iff ((\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \implies B) \iff (A \text{ et } (\text{non } B))$

Quelques conséquences ou règles de calcul

Soient A et B deux assertions. Alors :

- $\text{non}(\text{non } A) \iff A$
- $\text{non}(A \text{ et } B) \iff ((\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \text{ ou } B) \iff ((\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \implies B) \iff (A \text{ et } (\text{non } B))$

Quelques conséquences ou règles de calcul

Soient A et B deux assertions. Alors :

- $\text{non}(\text{non } A) \iff A$
- $\text{non}(A \text{ et } B) \iff ((\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \text{ ou } B) \iff ?$
- $\text{non}(A \implies B) \iff (A \text{ et } (\text{non } B))$

Quelques conséquences ou règles de calcul

Soient A et B deux assertions. Alors :

- $\text{non}(\text{non } A) \iff A$
- $\text{non}(A \text{ et } B) \iff ((\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \text{ ou } B) \iff ((\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \implies B) \iff (A \text{ et } (\text{non } B))$

Quelques conséquences ou règles de calcul

Soient A et B deux assertions. Alors :

- $\text{non}(\text{non } A) \iff A$
- $\text{non}(A \text{ et } B) \iff ((\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \text{ ou } B) \iff ((\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \implies B) \iff ?$

Quelques conséquences ou règles de calcul

Soient A et B deux assertions. Alors :

- $\text{non}(\text{non } A) \iff A$
- $\text{non}(A \text{ et } B) \iff ((\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \text{ ou } B) \iff ((\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B))$
- $\text{non}(A \implies B) \iff (A \text{ et } (\text{non } B))$

Attention :

$$\text{non}(A \implies B) \iff (A \text{ et } (\text{non } B))$$

- et non pas ($\text{non } A \implies \text{non } B$)
- ni ($A \implies \text{non } B$).

On énonce le fait que :

B n'est pas une conséquence de A .

Réciproque et contraposée

Définition

La *contraposée* de $A \implies B$ est l'assertion $\text{non } B \implies \text{non } A$.

Elle a même *valeur* logique que $A \implies B$:

$$(A \implies B) \iff (\text{non } B \implies \text{non } A)$$

Il ne faut pas la confondre avec

Définition

La *réciproque* de $A \implies B$ est $B \implies A$.

Transitivité de $\implies$ et $\iff$

Soient A , B , C trois assertions. Alors :

- $[(A \implies B) \text{ et } (B \implies C)] \implies (A \implies C)$
- $[(A \iff B) \text{ et } (B \iff C)] \implies (A \iff C)$

Quantificateur *existentiel* $\exists$, $\exists!$

Soit $A(x)$ une assertion dépendant d'un objet x .

$\exists x, A(x)$ est l'assertion : « il existe (*au moins*) un x qui vérifie $A(x)$. »

Exemple

$$\exists x, (x \in \mathbf{R} \text{ et } \cos x = x).$$

C'est une assertion vraie. On écrit plutôt :

$$\exists x \in \mathbf{R}, \cos x = x.$$

$\exists! x, A(x)$ est l'assertion : « il existe un unique x tel que $A(x)$. »

Exemple

$\exists! x \in \mathbf{R}, \cos x = x$: assertion vraie.

Quantificateur *universel* $\forall$

$\forall x, A(x)$ est l'assertion : « pour tout x , $A(x)$ est vraie. »

Exemple



$$\forall x \in \mathbf{R}, |\cos x| \leq 1.$$

C'est une assertion vraie.



$$\forall x \in \mathbf{R}, \cos x = x.$$

C'est une assertion fausse

Quantificateurs et négation

- $\text{non } (\exists x, A(x)) \iff ?$

- $\text{non } (\forall x, A(x)) \iff \exists x, \text{non } A(x)$

Quantificateurs et négation

- $\text{non } (\exists x, A(x)) \iff \forall x, \text{non } A(x)$

- $\text{non } (\forall x, A(x)) \iff \exists x, \text{non } A(x)$

Quantificateurs et négation

- $\text{non } (\exists x, A(x)) \iff \forall x, \text{non } A(x)$

- $\text{non } (\forall x, A(x)) \iff ?$

Quantificateurs et négation

- $\text{non } (\exists x, A(x)) \iff \forall x, \text{non } A(x)$
- $\text{non } (\forall x, A(x)) \iff \exists x, \text{non } A(x)$

Exercice d'application

$$A : \forall a \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, \ln(x) \geq a$$

$$B : \exists x \in \mathbf{R}_+^*, \forall a \in \mathbf{R}, \ln(x) \geq a$$

Qui est vrai ? Qui est faux ? Comment écrire (non B) ?

Exercice d'application

$$A : \forall a \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, \ln(x) \geq a$$

$$B : \exists x \in \mathbf{R}_+^*, \forall a \in \mathbf{R}, \ln(x) \geq a$$

A est vraie, B est fausse

Exercice d'application

$$A : \forall a \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, \ln(x) \geq a$$

$$B : \exists x \in \mathbf{R}_+^*, \forall a \in \mathbf{R}, \ln(x) \geq a$$

$$\text{non } B : \forall x \in \mathbf{R}_+^*, \exists a \in \mathbf{R}, \ln(x) < a$$

On trouve aussi l'écriture de A :

$$(\forall a \in \mathbf{R})(\exists x \in \mathbf{R}), \ln(x) \geq a$$

par exemple.

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Opérations logiques
- 3 Principe des démonstrations**
- 4 Les ensembles
- 5 Relations, fonctions, applications

Principe des démonstrations

On dispose d'un ensemble d'hypothèses (H) et on veut aboutir à un ensemble de conclusions (C). La structure d'une démonstration/preuve ressemble souvent à :

« On suppose que (H) est satisfait.

[...démonstration...]

On conclut qu'on a bien (C). »

Pour effectuer la démonstration, on suit un raisonnement logique constitué d'implications simples (*facilement vérifiables*) entre des assertions clairement énoncées, en utilisant en général des résultats déjà établis et des méthodes adaptées.

On va présenter quelques unes des méthodes usuelles de démonstration d'une implication.

Principales méthodes de démonstration

Pour montrer l'implication

$$A \Rightarrow B$$

- on peut en faire une démonstration **directe**.

On suppose A vraie et on démontre que B est vraie.

Principales méthodes de démonstration

Pour montrer l'implication

$$A \Rightarrow B$$

- on peut en faire une démonstration **par contraposée**.

On suppose B fausse et on prouve (que cela entraîne) que A est fausse.

On fait donc une démonstration directe de $\text{non } B \Rightarrow \text{non } A$.

Principales méthodes de démonstration

Pour montrer qu'une assertion C est vraie

- on peut en faire une démonstration **par l'absurde**.

On suppose **non C** vraie ; on met en évidence une certaine assertion D telle qu'on ait à la fois $(\text{non } C \implies D)$ et $(\text{non } C \implies \text{non } D)$. On en déduit que **non C** entraîne une *contradiction* (à la fois, D et $\text{non } D$), de sorte que

« **non C** est absurde. »

On conclut donc que C est vraie.

Cette méthode est *notamment* utile pour prouver l'existence ($\exists$) d'un objet, sans disposer de procédé de construction explicite de cet objet.

Principales méthodes de démonstration

Pour montrer qu'une assertion C est vraie

- on peut en faire une démonstration **par disjonction de cas**.

Cette méthode s'appuie sur la propriété

$$[(A \text{ ou } B) \text{ et } (A \implies C) \text{ et } (B \implies C)] \implies C.$$

Autrement dit (en langage courant) :

s'il y a exactement deux cas possibles A et B et si dans chacun de ces cas on a C , alors C est vraie.

Principales méthodes de démonstration

Pour montrer qu'une assertion C est fausse

- on peut en faire une preuve par **contre-exemple**.

Par exemple, pour que l'assertion $\forall x, A(x)$ soit fausse, il suffit d'exhiber un *contre-exemple*, c-à-d. mettre en évidence un x particulier pour lequel $A(x)$ est fausse.

Exemple

$A(x) : \ll \forall x \in \mathbf{R}, \cos x \geq 1/2. \gg$

Cette assertion est fausse car elle n'est pas satisfaite pour la valeur explicite $x = \pi/2 \in \mathbf{R}$ (il existe une infinité de valeurs réelles x qui contredisent cette inégalité mais il faut en exhiber au moins une).

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Opérations logiques
- 3 Principe des démonstrations
- 4 Les ensembles**
- 5 Relations, fonctions, applications

Les ensembles

Définition

Un *ensemble* E est une collection d'objets (mathématiques), qui sont ses *éléments*, muni d'une *relation d'appartenance* notée $\in$.

$x \in E$ signifie que x est un élément de l'ensemble E c-à-d. que x appartient à l'ensemble E .

L'assertion $\text{non}(x \in E)$ s'écrit aussi $x \notin E$.

On définit généralement un ensemble en *extension* (i. e. en énumérant ses éléments) ou en *compréhension* (i. e. à l'aide d'une propriété caractéristique satisfaite par ses éléments).

Les ensembles

Vocabulaire :

- égalité entre éléments d'un ensemble : $a = b$ signifie que a et b sont « un même objet »,
- égalité de deux ensembles : $E = F$ signifie que ces deux ensembles possèdent exactement les mêmes éléments,
- singleton : $\{a\}$ ensemble à un seul élément « a »,
- ensemble vide : ensemble noté $\emptyset$ ne contenant aucun élément (par exemple l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = -1$ dans $\mathbf{R}$).

Les ensembles : relations

Définition

L'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B , noté $A \subset B$ (ou $A \subseteq B$) si tout élément de A est un élément de B .

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B$$

On lit : « A est inclus dans B , ou encore A est une *partie* (ou un *sous-ensemble*) de B ».

Méthode :

- Pour prouver que $A \subset B$, on se donne un élément *quelconque* de A et on démontre qu'il appartient à B .
- Pour prouver l'égalité de deux ensembles $A = B$, on doit montrer $A \subset B$ et $B \subset A$.

Les ensembles : relations

Définition

L'ensemble des parties d'un ensemble E , $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des sous-ensembles de E .

Bien noter que :

$$X \in \mathcal{P}(E) \iff X \subset E.$$

Exemple

Soit $E := \{a, b, c\}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}.$$

($2^3 = 8$ éléments !)

On a $\{b, c\} \in \mathcal{P}(E)$ ou de manière équivalente $\{b, c\} \subset E$.

Opérations ensemblistes

Soit A et B des parties d'un ensemble E , on définit les opérations suivantes :

- **Intersection :**

$$A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Les éléments de $A \cap B$ sont ceux qui sont à la fois dans A et dans B .

- **Réunion :**

$$A \cup B := \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Les éléments de $A \cup B$ sont ceux qui sont dans A ou dans B ; ils *peuvent* être à la fois dans A et dans B .

Les ensembles : opérations ensemblistes

- **Complémentaire de B dans A :**

$$\complement_A B = A \setminus B := \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B .

- **Complémentaire de B dans l'ensemble de référence E :**

$$\complement_E B = B^c = E \setminus B := \{x \in E : x \notin B\}$$

- **Différence symétrique de A et B :** ensemble $A \Delta B$ des éléments de E qui sont soit dans A , soit dans B **mais pas dans les deux à la fois.**

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Exemple

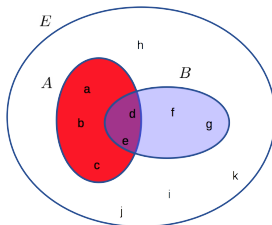
$$E := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$

$$A := \{a, b, c, d, e\}, \quad B := \{d, e, f, g\}$$

$$A \cap B = ?, \quad A \cup B = ?$$

$$A \setminus B = ?, \quad B \setminus A = ?, \quad A \Delta B = ?$$

$$A^c = ?, \quad B^c = ?$$



Exemple

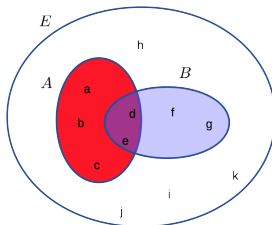
$$E := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$

$$A := \{a, b, c, d, e\}, \quad B := \{d, e, f, g\}$$

$$A \cap B = \{d, e\}, \quad A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$A \setminus B = \{a, b, c\}, \quad B \setminus A = \{f, g\}, \quad A \Delta B = \{a, b, c, f, g\}$$

$$A^c = \{f, g, h, i, j, k\}, \quad B^c = \{a, b, c, h, i, j, k\}$$



Extension des notions

On peut définir les opérations ensemblistes sur des ensembles quelconques et non des parties d'ensemble *i. e.* sans aucune référence à un ensemble ambiant.

Exemple

- $A \cap B := \{x \in A \text{ et } x \in B\},$
- $A \cup B := \{x \in A \text{ ou } x \in B\},$
- etc.

Les ensembles : relations et opérations

Propriétés de l'intersection

- 1 Commutativité : $A \cap B = B \cap A$
- 2 Associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 3 Élément neutre E : $A \cap E = E \cap A = A$

Propriétés de la réunion

- 1 Commutativité : $A \cup B = B \cup A$
- 2 Associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- 3 Élément neutre $\emptyset$: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

Les ensembles : relations et opérations

Distributivité

- ① $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *distributivité de $\cup$ sur $\cap$*
- ② $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- ③ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *distributivité de $\cap$ sur $\cup$*
- ④ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Propriétés du complémentaire

- ① *Idempotence* : $(A^c)^c = A$
- ② *Règles de De Morgan* :

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ et } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Les ensembles : produit cartésien ×

Définition

Le *produit cartésien* des ensembles A et B est l'ensemble des *couples* (ou *2-uplets*) d'éléments de A et de B noté $A \times B$ et défini par

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Si $A, B \subset E$ alors $A \times B$ n'est pas une partie de E mais de $E \times E$.

Exemple

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 := \{(x, y) : x \in \mathbf{R} \text{ et } y \in \mathbf{R}\}.$$

N. B. : $(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ et } b = d.$

D'où $(a, b) \neq (c, d) \iff a \neq c \text{ ou } b \neq d.$

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Opérations logiques
- 3 Principe des démonstrations
- 4 Les ensembles
- 5 Relations, fonctions, applications

Exemple de relation

Comment définir une relation entre éléments de deux ensembles E et F ?

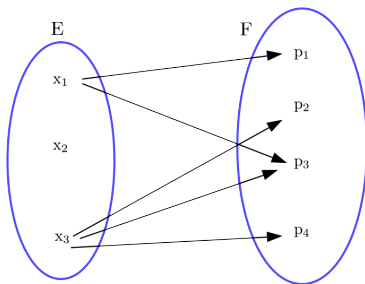
Soit $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $F = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ deux ensembles de personnes.

On considère la relation $\mathcal{R}$ qui relie un individu de E à la ou les personnes dans F , auxquelles l'individu donné dans E , envoie un courrier.

Si p reçoit un courrier de x alors on écrit $x\mathcal{R}p$.

Exemple de relation

Représentation schématique :



Exemple de relation

Représentation sous forme d'un ensemble de couples

$E \backslash F$	p_1	p_2	p_3	p_4
x_1	(x_1, p_1)	(x_1, p_2)	(x_1, p_3)	(x_1, p_4)
x_2	(x_2, p_1)	(x_2, p_2)	(x_2, p_3)	(x_2, p_4)
x_3	(x_3, p_1)	(x_3, p_2)	(x_3, p_3)	(x_3, p_4)

La relation $\mathcal{R}$ équivaut à la donnée d'une partie Γ de $E \times F$ appelé le *graphe de la relation* :

$$x\mathcal{R}p \iff (x, p) \in \Gamma.$$

$$\Gamma = \{(x_1, p_1), (x_1, p_3), (x_3, p_2), (x_3, p_3), (x_3, p_4)\}.$$

Le triplet (E, F, Γ) définit la relation $\mathcal{R}$.

Relation

Définition

Une *relation* $\mathcal{R}$ de E vers F est un triplet $\mathcal{R} := (E, F, \Gamma)$ où E et F sont des ensembles et Γ une partie de $E \times F$.

Lorsque $F = E$, $\mathcal{R}$ est une *relation binaire* sur E .

Fonctions

Définition

Une *fonction* f de E dans F est une relation (E, F, Γ) où $\Gamma \subset E \times F$ est un graphe tel qu'un élément x de E est en relation avec **au plus** un élément y de F , noté $f(x)$ c-à-d.

$$\forall x \in E, ((x, y), (x, y') \in \Gamma \implies y' = y).$$

- ① E est la *source* ou l'ensemble de *départ*,
 - ② F est le *but* ou l'ensemble d'*arrivée*,
 - ③ Γ est le *graphe*
- de la fonction f .

Fonctions

Présentation usuelle :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x) \text{ (valeur qui reste à définir)} \end{aligned}$$

$f(x)$: *image* de x par f

x est un *antécédent* de y : rien n'interdit qu'il y ait plusieurs antécédents

Fonctions

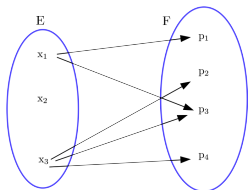
Présentation usuelle :

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto y = f(x) \text{ (valeur qui reste à définir)}$$

$f(x)$: *image* de x par f

x est un *antécédent* de y : rien n'interdit qu'il y ait plusieurs antécédents

En revanche, la relation précédente n'est pas une fonction



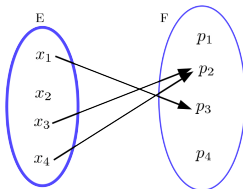
Fonctions

Présentation usuelle :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x) \text{ (valeur qui reste à définir)} \end{aligned}$$

$f(x)$: *image* de x par f

x est un *antécédent* de y : rien n'interdit qu'il y ait plusieurs antécédents



$p_2 = f(x_3)$,
 p_2 a deux antécédents x_3 et x_4 ,
 p_1 et p_4 n'ont pas d'antécédent,
 x_2 n'a pas d'image.

Fonctions

Comment définir une fonction ?

par son graphe, à l'aide d'une formule...

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

(donc seuls les $x \geq 0$ posséderont une image)

La fonction $g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$
 $x \longmapsto \sqrt{x}$ est différente de f !

Domaine de définition

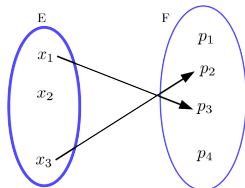
Définition

Le *domaine de définition* $\mathcal{D}_f$ de f est l'ensemble des éléments de E qui possèdent une image par f .

Ainsi,

$$\mathcal{D}_f := \{x \in E : \exists y \in F, (x, y) \in \Gamma\} = \{x \in E : \exists (!) y \in F, y = f(x)\}$$

Si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
 $x \longmapsto \sqrt{x}$ alors $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}_+ \subsetneq \mathbf{R}$.



$$\mathcal{D}_f = \{x_1, x_3\} \subsetneq E$$

Composition des fonctions

Composition des fonctions

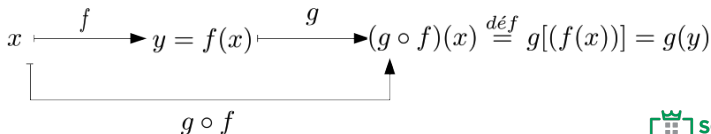
Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des fonctions.
 $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto g(x)$

La composée de f et g est la fonction $g \circ f : x \mapsto (g \circ f)(x)$
définie par :

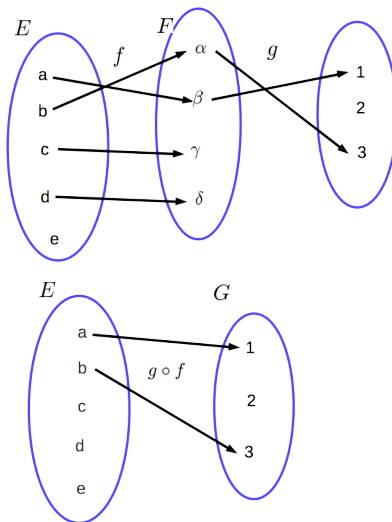
$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) := g[f(x)]$$

Son ensemble de définition est donné par

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{D}_g\}.$$



Exemple 1



Exemple 2

Soit $f: [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
 $x \longmapsto \cos x$ $x \longmapsto \ln x$.

D'où

$$g \circ f: [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto \ln(\cos x) .$$

On a $\mathcal{D}_f = [0, \pi]$, $\mathcal{D}_g = \mathbf{R}_+^*$ et

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in [0, \pi] : \cos x > 0\} = [0, \pi/2[.$$

Que vaut $f \circ g$?

Exemple 2

Soit $f: [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
 $x \longmapsto \cos x$ $x \longmapsto \ln x$.

D'où

$$g \circ f: [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto \ln(\cos x) .$$

On a $\mathcal{D}_f = [0, \pi]$, $\mathcal{D}_g = \mathbf{R}_+^*$ et

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in [0, \pi] : \cos x > 0\} = [0, \pi/2[.$$

Que vaut $f \circ g$?

$$f \circ g: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto \cos(\ln(x))$$

avec

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathbf{R}_+^* : \ln(x) \in [0, \pi]\} = [1, e^\pi].$$

Application

Définition

Une fonction $f = (E, F, \Gamma)$ est une *application* si son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est la source (ensemble de départ tout entier) E .

La fonction
$$\begin{array}{ccc} f : [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$
 est une application.

Mais la fonction
$$\begin{array}{ccc} g : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$
 n'est pas une application.

Application injective

Définition (Application injective)

Une application $f = (E, F, \Gamma)$ est *injective* (ou est une *injection*) si deux éléments distincts dans E ont des images distinctes dans F .

Exemple

L'application $\ln : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ est injective.
 $x \longmapsto \ln x$

En revanche, l'application $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ ne l'est pas car
 $x \longmapsto x^2$
on a par exemple $h(-1) = h(1) = 1$.

Application surjective

Définition (Application surjective)

Une application $f = (E, F, \Gamma)$ est *surjective* (ou est une *surjection*) si tout élément de F possède au moins un antécédent par f (dans E !).

Exemple

L'application
$$\begin{array}{ccc} h : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
 n'est pas surjective car -1 , par exemple, ne possède pas d'antécédent (dans $\mathbf{R}$!).

En revanche, l'application
$$\begin{array}{ccc} k : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
 est surjective.

Application bijective

Définition (Applications bijective)

Une application $f = (E, F, \Gamma)$ est *bijective* (ou est une *bijection*) si elle est à la fois injective et surjective.

On définit alors la *bijection réciproque* de f , notée $f^{-1} : F \rightarrow E$ par

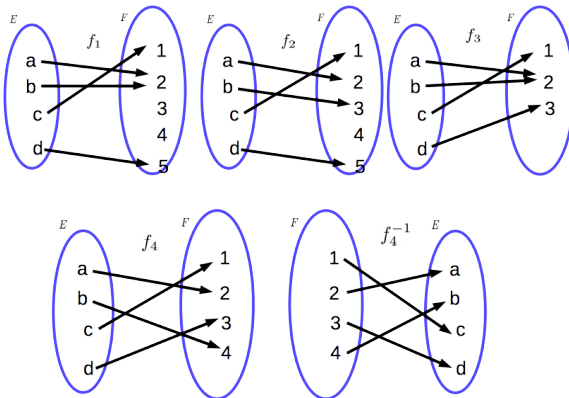
$$\forall (a, b) \in E \times F, \quad f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

Exemple

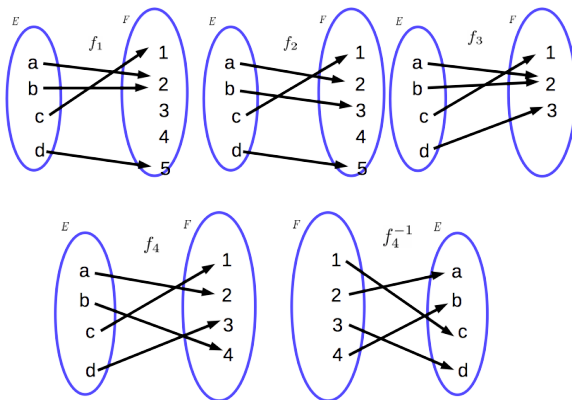
Les applications $\ell : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ et $m : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$
$$x \longmapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad x \longmapsto x^2$$

sont bijectives réciproques l'une de l'autre.

Exemples à l'aide de diagrammes

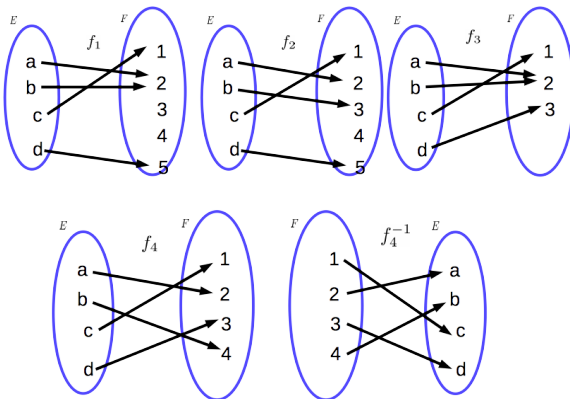


Exemples à l'aide de diagrammes



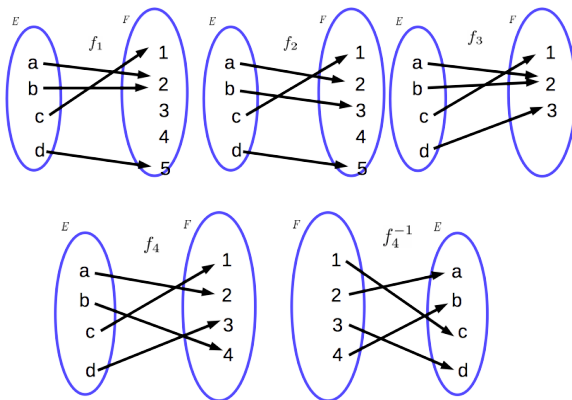
f_1 est ni injective ni surjective.

Exemples à l'aide de diagrammes



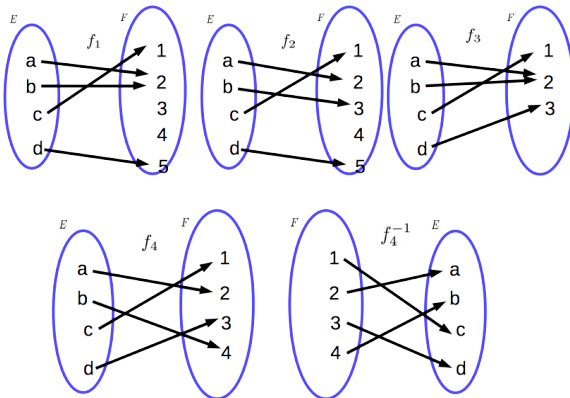
f_2 est injective mais non surjective.

Exemples à l'aide de diagrammes



f_3 est surjective mais non injective.

Exemples à l'aide de diagrammes



f_4 est bijective.

Critères équivalents

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors

- 1 f est *injective* ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x , admet **au plus une solution** dans E (i. e. aucune ou bien une unique).
- 2 f est *surjective* ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x , admet **au moins une solution** dans E .
- 3 f est *bijective* ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x , admet **une solution et une seule** dans E .

Image directe et image réciproque d'une partie d'un ensemble

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

Si $A \in \mathcal{P}(E)$ on pose, avec un abus d'écriture usuel,

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \{y \in F : \exists x \in A, \quad y = f(x)\}.$$

On a $f(A) \in \mathcal{P}(F)$ et on définit ainsi l'application *image directe* de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$ notée encore f par abus de notation

$$\begin{array}{ccc} f : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array}.$$

Image directe et image réciproque d'une partie d'un ensemble

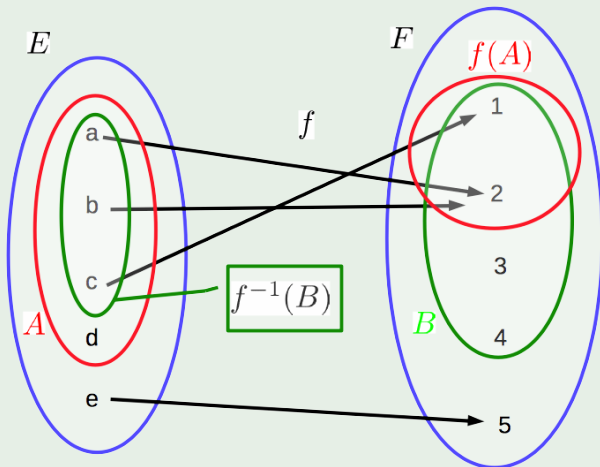
Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

On définit également (même si $f : E \rightarrow F$ n'est pas bijective !)
l'*application image réciproque*, notée (abusivement aussi) f^{-1}

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) := \{x \in E : f(x) \in B\} \end{array} .$$

Exemple d'image directe ou réciproque

Exemple



Quelques propriétés de f et f^{-1}

- $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'),$
- $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A'),$
- $\forall B, B' \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'),$
- $\forall B, B' \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'),$
- Si f est une *application* alors $\forall B \in \mathcal{P}(F),$
 $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c,$
- $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subseteq B,$ avec égalité si f est surjective,
- Si f est une *application* alors $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subseteq f^{-1}(f(A)),$
avec égalité si f est injective.