L1 MATH103_MISPI

Mathématiques générales & applications

Travaux Dirigés

Table des matières

1 Éléments du langage mathématique 5

2 Nombres entiers, rationnels, réels 9

3 Polynômes 11

4 Nombres complexes 13

5 Fonctions usuelles 17

6 Fonctions : limites, continuité 19

7 Fonctions : dérivées, accroissements finis 21

8 Intégration 23

9 Systèmes linéaires et matrices 25

10 Géométrie plane 27

11 Géométrie dans l'espace 31

Annexes 35

TD chapitre 1

Éléments du langage mathématique

Exercice 1. Questions de cours.

1. Qu'est-ce qu'une assertion ?
2. Comment montre t-on qu'une implication $A \Longrightarrow B$ est fausse ?
3. Quelle différence faites-vous entre contraposée et réciproque ?
4. Quelles sont les formules de De Morgan ?
5. Donner les définitions d'une application injective (resp. surjective, bijective).
6. Si $f : E \to F$ est une fonction et si $B \subset F$, que représente $f^{-1}(B)$?

Exercice 2.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire la négation des assertions suivantes :
$$A : \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 1 \qquad B : \exists x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) < 0.$$
2. Écrire la négation des assertions suivantes puis, dans chaque cas, préciser l'ensemble des réels x qui satisfont cette négation :
$$A(x) : x < -3 \text{ ou } |x| \leq 2 \qquad B(x) : x \leq 0 \text{ et } |x| \leq 1.$$
3. On considère les assertions $A : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ et $B : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
   (a) Écrire les négations de A et de B.
   (b) Les assertions A et B sont-elles vraies ou fausses ?
   (c) Que pouvez-vous en déduire sur l'ordre des quantificateurs dans ces assertions ?
4. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, e^x \leq M$.
   (b) $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, (x \leq A \Longrightarrow x^5 \leq 1)$.
   (c) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq M \Longrightarrow \ln x \geq A)$.
   Indication : *A étant donné, chercher s'il existe un réel M convenable, en fonction de A.*

Exercice 3.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Écrire chacune des assertions suivantes à l'aide de quantificateurs ainsi que sa négation. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
   (a) « f est une application positive sur I ».
   (b) « f est une application croissante sur I ».
   (c) « f est une application impaire sur I ».
2. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. Écrire les assertions $(a) : A \subset B$ et $(b) : A = B$ à l'aide de quantificateurs puis écrire de même leurs négations.

Exercice 4.

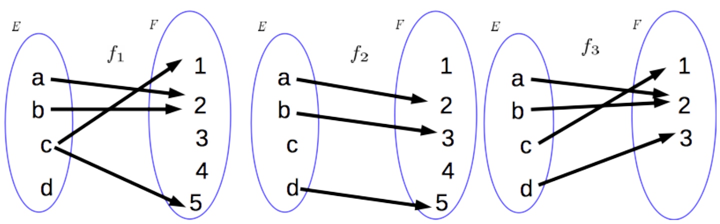
1. Soient R et S des assertions.
   (a) Donner la négation de l'assertion $R \Longrightarrow S$.
   (b) Donner la réciproque de l'assertion $R \Longrightarrow S$.
   (c) Donner la contraposée de l'assertion $R \Longrightarrow S$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A(n)$ l'assertion : « n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair ».
   Donner la contraposée $B(n)$ de $A(n)$. Montrer successivement que $B(n)$ et $A(n)$ sont vraies pour tout entier naturel n. Montrer enfin que la réciproque $C(n)$ de $A(n)$ est vraie. Conclusion ?

Exercice 5. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array} \right.$.

1. Quelle est, par f, l'image directe de $[-2,1]$? l'image réciproque de $[1,3]$? les antécédents de 5 ?
2. La fonction f est-elle injective ? surjective ?
3. Trouver deux exemples de couples (I,J) d'intervalles de $\mathbb{R}$ tels que la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array} \right.$ soit bijective.
4. Déterminer à l'aide de la représentation graphique de f les ensembles suivants :

$$f([5,10[), \quad f^{-1}([5,10[), \quad f(]-3,2[), \quad f^{-1}(]-3,2[), \quad f^{-1}(f(]-3,2[)), \quad f(f^{-1}(]-3,2[))$$

Exercice 6. Chacun des diagrammes suivants représente une relation entre des ensembles E et F. S'agit-il d'une fonction ? d'une application ?
S'il s'agit d'une application, est-elle injective ? surjective ? bijective ?



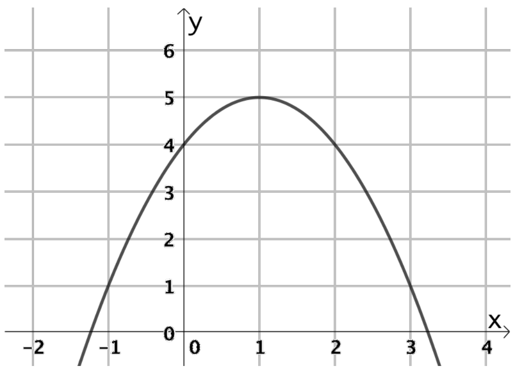
Exercice 7. On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ données par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x^2 - 1$.
Donner les ensembles de définition des fonctions f, g, $h = g \circ f$ et $k = f \circ g$. Préciser dans chaque cas s'il s'agit d'une application.

Pour travailler en autonomie

Exercice 8. On considère l'assertion $\mathbf{A}$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (|x-y| < 1 \Longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < |x-y|)$ et l'assertion $\mathbf{B}(x)$: $x < 5$ ou $|x| \geq 2$ (où x est un réel)

1. Écrire la négation de $\mathbf{A}$.
2. Laquelle des assertions $\mathbf{A}$ et **non A** est vraie ? *(considérer deux réels choisis dans* $[0, 1[$*)*
3. Écrire la négation de $\mathbf{B}(x)$
4. Donner l'ensemble des réels x pour lesquels $\mathbf{B}(x)$ <u>**est vraie**</u>.

Exercice 9. On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -(x-1)^2 + 5 \end{array} \right.$.



1. Donner, sans justification, l'ensemble $f^{-1}([1,5])$.
2. f est-elle bijective ? (justifier).
3. Proposer des intervalles I et J tels que $g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & -(x-1)^2 + 5 \end{array} \right.$ soit une bijection.

Exercice 10. On considère la relation $\mathcal{R}$ entre réels définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y^2 = (x+1)^2$.

1. Représenter graphiquement le graphe Γ de cette relation.
2. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}; \Gamma)$ est-il une fonction ? Une application ?

TD chapitre 2

Nombres entiers, rationnels, réels

Exercice 1. Questions de cours.

1. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$: énoncer avec précision le résultat.
2. Définition de $n!$ ($n \in \mathbb{N}$), de $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ ($(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$).
3. Formule du binôme de Newton.
4. Définition de la borne supérieure éventuelle d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$. Quelle différence avec la notion de plus grand élément ?

Exercice 2.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$. Compléter :

$$a)\, |X| \leq r \Longleftrightarrow \cdots \quad b)\, |X| > r \Longleftrightarrow \cdots \quad c)\, |x-a| \leq r \Longleftrightarrow \cdots$$

$$d)\, |x-a| > r \Longleftrightarrow \cdots \quad e)\, \sqrt{x^2} = \cdots$$

2. Résoudre les inéquations suivantes avec un minimum de calculs :

$$a)\, |x+4| < 2 \qquad b)\, x^2 \leq 3 \qquad c)\, |-3x+2| \geq 1$$

Exercice 3. a, b et c étant trois réels, calculer $A = (a-b)^4$ et $B = (a+b+c)^2$.
Déduire le développement de $C = (a-b+c)^2$ de celui de B.

Exercice 4. Soient x et y deux réels tels que $x \in [2,4]$ et $y \in [-3,2] \setminus \{0\}$. Donner un encadrement des réels $a = x+y$, $b = x-y$, $c = xy$, $d = \dfrac{x}{y}$, $e = x^2$ et $f = y^2$.

Exercice 5 (Binôme de Newton).

1. Écrire sous la forme d'une seule fraction la plus réduite possible :

$$A = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Calculer $a = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}$ et $e = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$.
   (b) En choisissant convenablement x et y dans $(x+y)^n$, trouver la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}, \quad S_2 = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$$

3. Répondre aux questions suivantes :
   (a) Quel est le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$ puis de $(x^2-3)^7$?
   (b) Quel est le coefficient de x^3y^7 dans le développement de $(x-y)^{10}$?
   (c) Quel est le coefficient de x^6y^7 dans le développement de $(2x-y)^{13}$?

Exercice 6.

1. Soit E une partie de $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs l'assertion A : « E est majoré » puis la négation de A.
2. Donner l'ensemble des minorants de $\{-2\}$ dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{N}$.
3. On considère l'ensemble $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Donner, s'ils existent le plus grand élément de A ($\max A$), le plus petit élément de A ($\min A$), la borne supérieure de A ($\sup A$) et la borne inférieure de A ($\inf A$).
4. Reprendre la question 3. avec $B = \left\{ \dfrac{1}{1+x} : x \in [0, +\infty[\right\}$.

Pour travailler en autonomie

Exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n : $A = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{p=2}^{n-1} (p+1)^2$ et $B = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p+2}$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et m un réel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} m$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.
3. Soient a et b deux réels et (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_n \leq b$.

   Encadrer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
4. Soit (u_n) une suite réelle. On pose $A_n = \min\{u_k \,;\, k \in [\![1, n]\!]\}$ et $B_n = \max\{u_k \,;\, k \in [\![1, n]\!]\}$.

   Encadrer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ à l'aide de A_n et B_n.

Exercice 8. Résoudre successivement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|1 - 2X| < 3$ (d'inconnue X) puis l'inéquation $|1 - 2x^2| < 3$ (d'inconnue x).

TD chapitre 3

Polynômes

Exercice 1. Questions de cours.

1. Énoncer le résultat sur la division euclidienne des polynômes.
2. Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2.

1. Donner tous les polynômes non nuls de degré inférieur ou égal à 3 admettant 2, 3 et -1 comme racines.
2. Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ est-il irréductible ?

Exercice 3. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6, \quad B = X^2 - 3X + 1$
2. $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X, \quad B = X + 3$

Exercice 4. À quelle condition sur les réels a, b et c le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $B = X^2 + X + 1$?

Exercice 5. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$ et a un réel. Que peut-on dire du reste de la division euclidienne de P par $X - a$? Retrouver la condition nécessaire et suffisante pour que $X - a$ divise P.

Exercice 6.

1. Écrire les polynômes suivants sous forme de produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$a)\, P = 4X^2 + 5X + 1 \qquad b)\, Q = X^4 + X^2 - 6$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$$a)\, 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 \leq 0 \qquad b)\, x^3 - 5x^2 + 3x + 9 > 0$$

Pour travailler en autonomie

Exercice 7. Écrire le polynôme $P = 2X^4 - 5X^3 + X^2 + 2X$ sous forme de produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$, a et b des réels distincts. Exprimer en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X - a)(X - b)$ divise P.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P = (X^2 + 1)^n - 2X^{2n} + (X^2 - 1)^n$.

1. Donner, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de X, les trois premiers termes du développement de $(X^2 + 1)^n$ et de $(X^2 - 1)^n$.
2. En déduire le terme de plus haut degré de P.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $A = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ par $B = (X - 2)(X - 3)$.
En calculant $A(a)$ pour deux valeurs bien choisies de a, déterminer le reste R.

TD chapitre 4

Nombres complexes

Exercice 1. Questions de cours

1. Écrire <u>les</u> inégalités triangulaires.
2. Développer $|z+z'|^2$, $|z-z'|^2$, $(z+z')^2$.
3. Dans quel(s) cas a t-on $|z|^2 = z^2$?
4. Formules de Moivre ? Formules d'Euler ?

Exercice 2. Quelle est la forme trigonométrique de 1 ? de i, de -2 ? de $z = -e^{i\frac{\pi}{3}}$?

Exercice 3. Trouver la forme exponentielle des nombres complexes $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3}+i$ puis placer les points images dans le plan complexe. En utilisant $\dfrac{z_1}{z_2}$ trouver les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 4.

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -3-5i, \quad z_2 = (1+i)^5, \quad z_3 = -5ie^{i\alpha}\,(\alpha \in \mathbb{R})$$

   Indications : pour z_1, donner une valeur approchée de l'argument dans $]-\pi,\pi]$. Pour z_2, ne pas développer.

2. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}, \quad z_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha\,(\alpha \in \mathbb{R}), \quad z_3 = -\cos\alpha - i\sin\alpha\,(\alpha \in \mathbb{R})$$

3. Donner, en fonction de l'entier relatif k, la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$(a) \quad z_k = e^{ik\pi} \qquad\qquad (b) \quad z_k = e^{i(\frac{\pi}{2}+k\pi)}$$

Exercice 5.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$.
2. Quels sont les formes exponentielles des solutions ? Montrer qu'elles vérifient $z^3 = 1$ et retrouver ce résultat à l'aide de l'identité remarquable $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
3. Montrer que la somme des racines n$^{\text{ièmes}}$ de 1 ($n \geq 2$) est nulle. Ce résultat se généralise t-il à la somme des racines n$^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe non nul ?

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z :

1. $z^2 = -10 - 24i$.
2. $z^5 = -3$.
3. $z^3 = 4(1 + i\sqrt{3})$.
4. $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.
5. $(4 + 2i)z^2 - 2(3 + 2i)z + 2 - i = 0$.
6. $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$.

Exercice 7. En effectuant un minimum de calculs, déterminer et représenter dans le plan complexe chacun des ensembles suivants, où $M(z)$ est le point d'affixe z :

1. $E_1 = \{M(z)\,;\, z \in \mathbb{C} \text{ et } |\mathrm{Re}\,(\mathrm{z})| = 5\}$.
2. $E_2 = \{M(z)\,;\, z \in \mathbb{C} \text{ et } |z + 3i| = 5\}$.
3. $E_3 = \{M(z)\,;\, z \in \mathbb{C} \text{ et } \arg(\mathrm{z}) = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]\}$.
4. $E_4 = \{M(z)\,;\, z \in \mathbb{C} \text{ et } \arg(\mathrm{z} - 2) = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]\}$.
5. $E_5 = \{M(z)\,;\, z \in \mathbb{C} \text{ et } \arg(\mathrm{z} - 2\mathrm{i} + 3) = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]\}$.
6. $E_6 = \{M(z)\,;\, z = 2e^{ix} \text{ et } x \in [\dfrac{\pi}{2}, \pi]\}$.
7. $E_7 = \{M(z)\,;\, z \in \mathbb{C} \text{ et } |z + 1| < 2\}$.
8. $E_8 = \{M(z)\,;\, z \in \mathbb{C} \text{ et } \mathrm{Im}\,(\mathrm{z}) > \dfrac{1}{2}\}$.
9. $E_9 = \{M(z)\,;\, z \in \mathbb{C} \text{ et } \dfrac{3\pi}{4} \leq \arg(\mathrm{z}) \leq \pi\}$.

Exercice 8. Formules d'Euler.

1. Linéariser $\cos^4\theta$ et $\sin^3\theta$.
2. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Déterminer le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$.
   Indication : factoriser par $e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Exercice 9. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{(1-i)^{115}}{(1+i)^{108}}$.
2. $z_2 = \dfrac{(2+i)^3 + (1-i)^2}{1 + i + (2i-1)^2}$.

Exercice 10. Écrire le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ sous forme d'un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Pour travailler en autonomie

Exercice 11. Soit z un nombre complexe. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

— $A\ :\ \mathrm{Im}\,(\mathrm{z}^2) = (\mathrm{Im}\,(\mathrm{z}))^2$.
— $B\ :\ |2+iz| = |2i-\overline{z}| \Longrightarrow \mathrm{Im}\,(\mathrm{z}) = 0$.
— $C\ :\ |1+iz| = |1-i\overline{z}| \Longrightarrow \mathrm{Re}\,(\mathrm{z}) = 0$.

Exercice 12.

1. Déterminer sans calcul l'ensemble $\mathcal{H}$ des points du plan dont l'affixe z vérifie $\left|z+\dfrac{1}{3}\right| = |z-2i|$. Représenter cet ensemble.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose, quand c'est possible, $Z = \dfrac{3z+1}{\overline{z}+2i}$.
   (a) Quel est l'ensemble E des nombres complexes z pour lesquels on peut calculer Z ?
   (b) Pour $z \in E$, montrer que $|Z| = 3 \Longleftrightarrow \left|z+\dfrac{1}{3}\right| = |z-2i|$. En déduire l'ensemble $\mathcal{K}$ des points du plan d'affixe z tels que $|Z| = 3$.

Exercice 13. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Soit $Z = 8 - 8i\sqrt{3}$.
   (a) Déterminer la forme exponentielle de $1 - i\sqrt{3}$ puis celle de Z.
   (b) En écrivant z sous la forme $z = re^{i\theta}$, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres complexes z tels que $z^3\overline{z} = Z$ et représenter les points images des éléments de $\mathcal{S}$ (on trouvera deux solutions).
2. Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1)\, z^2 + 3z + 3 = 0, \quad (E_2)\, z^2 + 3z + 3i = 0.$$

Exercice 14. Soit a un réel.

1. Écrire $\dfrac{1+ia}{1-ia}$ sous forme exponentielle (on posera $a = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$).
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \dfrac{1+ia}{1-ia}$.

Exercice 15. Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$. On pose $a(\theta) = 1+\cos\theta + i\sin\theta$ et $b(\theta) = 1+\cos\theta - i\sin\theta$.

1. Montrer que l'on peut écrire $a(\theta)$ sous la forme $re^{i\alpha}$ où l'on précisera r et α en fonction de θ.
2. Donner le module et un argument de $a(\theta)$.
3. En déduire le module et un argument de $b(\theta)$.

TD chapitre 5

Fonctions usuelles

Exercice 1. Questions de cours

1. Définition des fonctions puissances. Qu'est-ce que $\pi^{\sqrt{2}}$? $(-2)^{\sqrt{2}}$? Définition de $\sqrt[n]{x}$ pour $n \geq 3$?
2. Donner la définition d'une fonction périodique. Exemples ?
3. Définition et dérivée de la fonction tangente (sous deux formes).
4. (Trigo) Formules de transformation de produit en somme et de somme en produit.

Exercice 2. Soient les fonctions $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[3]{x} \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [-\pi, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array} \right.$.
On note $h = f \circ g$ et $k = g \circ f$. Préciser les domaines de définition de f, g, h, k ainsi que les expressions de $h(x)$ et $k(x)$.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions réelles impaires définies sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de $g \circ f$ et de fg.

Exercice 4. Soit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\,|-x+3| - \sqrt{x^2 - 2x + 1} \end{array} \right.$

1. Quel est le domaine de cette fonction ?
2. Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue ni radical, suivant les valeurs de x. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5. Pour tout réel x on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, définie par :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Représenter graphiquement, sur l'intervalle $[-2, 3]$, les fonctions E et F définies sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = \lfloor x \rfloor$ et $F(x) = x - \lfloor x \rfloor$ (partie fractionnaire de x). Montrer que F est 1-périodique.

Exercice 6. Donner, sans calculs (ni calculatrice), l'allure des représentations graphiques des fonctions a, b, c, d, e, f, g, h définies par :

$$\begin{array}{llll} a(x) = x\,|x| & b(x) = -(x-1)^2 & c(x) = x^2|x| & d(x) = \sqrt{x+2} + 1 \\ e(x) = \dfrac{1}{x-2} & f(x) = e^{-x} & g(x) = \ln(|x|) & h(x) = |\sin x| \end{array}$$

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier $A = \dfrac{a^3}{\sqrt{a}}$, $B = \dfrac{a^{2/3}}{\sqrt[3]{a}}$, $C = (a^2)^{2/3} \times (a^4)^{2/3} \times (\sqrt[3]{a})^2$.

Exercice 8.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$ et $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-3x} = 49$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $(2^x - 3)(3^x - 2) \leq 0$ et $5^x - 3 \times 5^{-x} \geq -2$.

Exercice 9.

1. Trouver le domaine de définition et la période de la fonction $f \,:\, x \mapsto \tan(2x+1)$.
2. Mêmes questions avec la fonction $f \,:\, x \mapsto \tan(\omega x + \dfrac{\pi}{4})$ avec $\omega \neq 0$.
3. Montrer que la droite d'équation $x = \pi$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction cosinus dans un repère orthonormal du plan.

Exercice 10.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos x = \cos a$ et $\cos x = \sin a$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Exercice 11. Soient a, b, ω des réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et $\omega \neq 0$. On pose $A = \sqrt{a^2+b^2}$.

1. Montrer qu'il existe au moins un réel φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{A}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{A}$.

   Indication : *montrer que le point de coordonnées* $(\dfrac{a}{A}, \dfrac{b}{A})$ *appartient au cercle trigonométrique.*
2. En déduire qu'il existe toujours un couple (A, φ) de réels tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\, a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = A\cos(\omega x - \varphi).$$
3. Appliquer ce qui précède à $\cos x - \sqrt{3}\sin x$ et résoudre l'équation $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$.
4. Résoudre l'équation $\cos x + \sin x = 0$ de deux manières différentes.

Exercice 12. Soit $f \,:\, \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{\cos x + \sin x} \end{cases}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f (on pourra utiliser le résultat de la question 4 de l'exercice 11), étudier la parité de f et montrer qu'elle est périodique de période π. En déduire un intervalle d'étude.
2. Faire l'étude des variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.

Pour travailler en autonomie

Exercice 13. Donner sans calcul l'allure de la courbe représentative de la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\cos(2x)$.
Indication : encadrer f par deux fonctions plus simples et donner la période de la fonction $x \mapsto \cos 2x$.
Même question avec $g(x) = e^{-x}\sin(10x)$.

Exercice 14. Soit $f \,:\, \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{\cos(2x)} \end{cases}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f étudier la parité et la périodicité.
   Vérifier que $f(\pi - x) = f(x)$ et déduire de l'étude précédente que l'on peut prendre $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ comme intervalle d'étude. Comment obtenir alors toute la courbe ?
2. Étudier les variations de f sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ et tracer la courbe représentative de f.

TD chapitre 6

Fonctions : limites, continuité

Exercice 1. Questions de cours

1. Définitions de la limite finie et infinie d'une fonction f en un point a. Que doit vérifier a ?
2. Limite d'une composée de deux fonctions.
3. Comment détermine t-on une éventuelle asymptote oblique ?
4. Limites d'une fonction polynomiale ou rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$?

Exercice 2. Étudier la limite de la fonction f aux points proposés (ou les limites à gauche et à droite s'il y a lieu) :

1) $f(x) = (1-3x)(2x-1)^2$ en $-\infty$

2) $f(x) = \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2}{x-1}$ en $+\infty$, 1

3) $f(x) = x^2 - 5x^4 + 3x$ en $+\infty$, $-\infty$

4) $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{2x-1}$ en $+\infty$, $-\infty$

5) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$ en 1, $\dfrac{1}{3}$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+3}$ en $-\infty$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ en 4

Exercice 3. Étudier la limite de la fonction f aux points proposés :

1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{4x^3+2x-1}{5x^4+3x+2}\right)$ en $+\infty$

2) $f(x) = x - \ln x$ en $+\infty$, 0

3) $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x + x$ en $+\infty$

4) $f(x) = 2x - 1 - e^x$ en $+\infty$, $-\infty$

5) $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ en $+\infty$, $-\infty$

6) $f(x) = x^{-3}e^x$ en $+\infty$

7) $f(x) = \dfrac{2^x}{x^3}$ en $+\infty$

8) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ en 0.

Exercice 4. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 2 + \dfrac{x+1}{x-1}$. Déterminer toutes les asymptotes à sa courbe représentative ainsi que les positions relatives de la courbe par rapport à ses asymptotes.
2. La fonction définie par $g(x) = 2x + 1 - \sqrt{x}$ admet-elle une asymptote en $+\infty$?

Pour travailler en autonomie

Exercice 5. Étudier la limite de la fonction f aux points proposés :

$$1)\ f(x) = x^{-4}(\ln x + e^x) \text{ en } +\infty \quad 2)\ f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^3} \text{ en } +\infty$$

$$3)\ f(x) = \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ en } +\infty \qquad 4)\ f(x) = \frac{2^x}{x^3} \text{ en } +\infty$$

$$5)\ f(x) = \frac{3^x + x^2}{\ln x + x^2} \text{ en } +\infty$$

Exercice 6.

1. Montrer que $\ln(2) < 1$ (On rappelle que $e \simeq 2,718$).
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x - x^2}{e^x - 5}$.
3. On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x + 2 + \dfrac{2^x - x^2}{e^x - 5}$. Montrer que la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une asymptote que l'on précisera.

Exercice 7. On considère la fonction définie par $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$. Déterminer son domaine de définition et étudier les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que la position relative de la courbe et de ses asymptotes.
Indication : on pourra utiliser, après l'avoir justifiée,que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x + \ln(1 + 2e^{-2x}) = -x + \ln(2) + \ln(1 + \frac{1}{2}e^{2x})$.

TD chapitre 7

Fonctions : dérivées, accroissements finis

Exercice 1. Questions de cours

1. Énoncer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.
2. Règle de l'Hopital.

Exercice 2. Pour les fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée :

$$\begin{array}{ll} 1)\ f(x) = (2x-1)^3 & 2)\ f(x) = \dfrac{4}{(2x-3)^4} \\ 3)\ f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{(5x-3)^3} & 4)\ f(x) = \dfrac{x}{2x+1} \text{ puis } g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} \\ 5)\ f(x) = \cos(x^2+3) & 6)\ f(x) = \cos^4 x + \sin^3(5x+2) \end{array}$$

Exercice 3. Soient a un réel et f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Trouver une formule donnant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ et la démontrer.

Exercice 4. Pour les fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée :

$$\begin{array}{lll} 1)\ f(x) = 3e^{5x-2} + \ln(3x+1) & 2)\ f(x) = 3^x + 2x^3 + 3^{-x} & 3)\ f(x) = \tan^2(4x+1) \\ 4)\ f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{4}{(2x+1)^5} & & \end{array}$$

Exercice 5. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(e^{2x+1})$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée $f'(x)$ à l'aide de la dérivée de g.

Exercice 6.

1. Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur I. Rappeler quelle est la dérivée de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{lcc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|u(x)| \end{array} \right.$.
2. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = \ln\Big(\big|\tan(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})\big|\Big)$. Préciser les domaines de définition et de dérivabilité de f puis montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Exercice 7. On cherche les solutions éventuelles de l'équation $(E) : 3^x + 4^x = 7^x$ autres que $x = 1$.

1. Montrer que (E) peut s'écrire sous la forme $f(x) = 1$ avec une fonction f de la forme $x \mapsto a^x + b^x$.
2. Donner les domaines de définition et de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f et conclure.

Exercice 8. À l'aide d'une étude de fonction, montrer que : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad 3x < 2\sin x + \tan x$.

Exercice 9 (Rolle). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$ possédant n racines réelles distinctes.

1. Montrer que le polynôme dérivé P' possède $n-1$ racines réelles distinctes.
2. [***facultatif***] En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10 (Accroissements finis).

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que $|\sin b - \sin a| \leq b - a$.
2. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que $\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$.
3. Soit $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Montrer que : $\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow y - x \leq \tan y - \tan x \leq 2(y-x)$.
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$. Interpréter graphiquement.

Exercice 11 (Continuité, limite d'une dérivée)**.** Montrer que pour tout réel c il existe un unique couple (a,b) de réels, que l'on déterminera, tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Avec ces valeurs de a et b, donner l'allure de sa courbe représentative quand $c = 0$ et quand $c = 1/2$.

Exercice 12 (Règle de l'Hôpital)**.** Retrouver à l'aide de la règle de l'Hôpital les limites suivantes, étudiées au TD précédent :

$$f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{3x^2 - 4x + 1} \text{ en } 1 \text{ et } \frac{1}{3}, \qquad \text{et} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \text{ en } 4$$

Pour travailler en autonomie

Exercice 13. Soient f et u des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \circ u$ est deux fois dérivable et donner une expression de $(f \circ u)''$ en fonction des dérivées premières et secondes de f et u.

Exercice 14 (Asymptotes, accroissements finis)**.**

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$.
   (a) Donner le domaine de définition de cette fonction ainsi que les limites aux bornes du domaine.
   (b) Prouver que $\lim_{x \to +\infty} x\,(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$. ***Indication :*** poser $x = \frac{1}{h}$ puis reconnaître un taux d'accroissement.
   (c) Montrer que la courbe représentative de f possède, quand $x \to +\infty$, une asymptote oblique dont on donnera une équation cartésienne.
2. On reprend la fonction f de la question 1.
   (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) Soit $x > 0$. Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x, x+1]$.
   (c) Quelle est la limite de $(1 - \frac{1}{x})\, e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$? En déduire, avec la question 2b précédente, la valeur de $\lim_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x)$.
   (d) Retrouver ce dernier résultat en utilisant celui de 1c.

TD chapitre 8

Intégration

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$, et $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Que vaut $g'(x)$?
2. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.
   (a) Que vaut la valeur moyenne de f sur $[a,b]$?
   (b) Donner la formule de l'inégalité de la moyenne.
3. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Que peut-on écrire à propos de $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right|$?
4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T périodique.
   Compléter : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^{\cdots} f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{\cdots} f(t)\,dt.$

Exercice 2. Calculer les intégrales et primitives suivantes (reconnaître des dérivées) :

$$A = \int_1^3 \frac{3}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^5}\,dx \quad B = \int_1^2 \frac{3x^2+4x-2-\sqrt{x}}{x^4}\,dx \quad C = \int_0^1 (2x+3)(x^2+3x-5)^3 dx$$

$$D = \int 4e^{3t-1}\,dt \quad E = \int \frac{3x}{(x^2+2)}\,dx \quad F = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4x^2+3}}\,dx$$

$$G = \int_0^1 x\sqrt{x^2+3}\,dx \quad H = \int_0^1 \frac{3x}{(x^2+2)^2}\,dx \quad I = \int_{\pi/3}^{\pi/4} \tan x\,dx$$

Exercice 3. Calculer les intégrales et primitives suivantes en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties :

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(3x)\,dx \quad B = \int x\ln(x)\,dx \quad C = \int_0^{\ln 3} (x-1)e^{-2x}\,dx \quad D(x) = \int x^2 2^x\,dx$$

Exercice 4.

1. Soit $a > 0$, $a \neq 1$. Calculer $A = \displaystyle\int_0^2 a^t\,dt$.
2. Calculer $B = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{|x-1|}\,dx$ (indication : $|1-x| = \ldots$ si ...).
3. $C = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx \quad D = \int \frac{1}{x\ln x}dx \quad E = \int x^2\ln(x)dx \quad F = \int \frac{\sin(x)}{\cos^5(x)}dx \quad G = \int_0^{\pi/2} \big(\cos(t)\big)^3 dt.$
   (indication : on pourra exprimer $(\cos t)^3$ en fonction de $\cos(3t)$ et de $\cos(t)$).

Exercice 5.

Calculer les intégrales et primitives suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

$A = \displaystyle\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} dx \quad (t = \mathrm{e}^x) \qquad B = \int_1^2 t^3 e^{t^2}\, dt \quad (v = t^2)$

$C(x) = \displaystyle\int \frac{3}{2(3-x)^2 + 2}\, dx \quad (t = (3-x)) \qquad D(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}}\, dx \quad (t = \sqrt{2x+1})$

TD chapitre 9

Systèmes linéaires et matrices

Exercice 1. Questions de cours

1. Décrire la méthode de Gauss en moins de 20 s.
2. Formules de Cramer pour un système 2×2 et inverse d'une matrice 2×2 régulière.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y-z &=& 4 \\ -2x-y &=& 10 \\ x+y-7z &=& 8 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y-z &=& 3 \\ 4x+2y+2z &=& 10 \\ x+5y+3z &=& -4 \end{array}\right. \quad (S_3)\left\{\begin{array}{lcl} x+y-z &=& 0 \\ -x+2y-z &=& 4 \\ -2x+7y-4z &=& 12 \end{array}\right.$$

$$(S_4)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y-z &=& 4 \\ 4x+2y-2z &=& 10 \\ x+5y-7z &=& 8 \end{array}\right. \quad (S_5)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y-z &=& 0 \\ x+y+3z &=& 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant, où a est un réel donné : $(S_a)\left\{\begin{array}{lcl} x+y &=& a \\ 2x-3y &=& 1 \\ 3x-2y &=& 2 \end{array}\right.$

On discutera l'existence de solutions suivant les valeurs de a.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en utilisant, quand c'est possible, les formules de Cramer.
Dans (S_2), a est un réel et, dans le cas de (S_3), commenter :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+5y &=& 1 \\ 3x-2y &=& 2 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y &=& 1 \\ x+ay &=& 2 \end{array}\right. \quad (S_3)\left\{\begin{array}{lcl} x+y &=& 4 \\ x-y &=& 6 \end{array}\right.$$

Exercice 5. On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} D=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} E=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} H=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} J=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} K=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer, quand c'est possible, les matrices suivantes :

1. $2A-4B$, $B+3D$, $C-3E$, $F-\dfrac{1}{2}G$.
2. AB, BA, AD, DA, D^2, FD, DF, G^2, GH, HG, $C\,{}^tE$.

Exercice 6. Soient $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices AX, ${}^tXA$ et ${}^tXAX$.

Exercice 7.

1. Soient $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Écrire le système linéaire équivalent à l'équation matricielle $LX = M$.

2. Vérifier que L est inversible et exprimer X en fonction de L^{-1} et de M.
3. Traduire les systèmes (S_1) et (S_2) de l'exercice 2 par des égalités matricielles.

Exercice 8. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $C = A + B$, C^2 puis $A^2 + 2AB + B^2$. Qu'observe t-on ? Expliquer.

Exercice 9. Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour travailler en autonomie

Exercice 10.

1. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout entier $k \geq 2$.
2. Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et I_2 la matrice identité d'ordre 2. En remarquant que $M = I_2 + N$, calculer M^n pour tout entier $n \geq 2$.
   Indication : la formule du binôme de Newton s'applique sur des matrices A et B qui commutent, c'est à dire telles que $AB = BA$.
3. Soient a et b des réels et $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Exprimer $M(a, b)$ en fonction de I_2 et N. En déduire le calcul de $M(a, b)^n$ pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 11.

1. Résoudre <u>par la méthode de Gauss</u> le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} 2x + 3y + 4z &= 1 \\ 4x + 3y + z &= 2 \\ x + 4z &= 0 \end{cases}$
2. Écrire le système $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On donne $A^{-1} = \dfrac{1}{11} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 5 & -\dfrac{4}{3} & -\dfrac{14}{3} \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$, où la valeur du réel α a été égarée : la retrouver avec le minimum de calculs.
4. Retrouver la solution de $(\mathcal{S})$ à l'aide des questions 2. et 3. en détaillant le raisonnement. Que se passe t-il si on se trompe à la question 3. ?

Exercice 12. Soit $P(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Calculer $P(a, b)^n$ pour tout entier $n \geq 2$.

TD chapitre 10

Géométrie plane

Exercice 1 (Questions de cours)**.**

1. Définitions du produit scalaire et du déterminant en base orthonormale directe. Calcul ?
2. Comment calcule t-on l'aire d'un triangle à l'aide du déterminant ?
3. Comment calcule t-on le projeté othogonal d'un vecteur $\vec{v}$ sur un axe dirigé par un vecteur $\vec{u}$?
4. Donner la définition d'une translation, d'une homothétie et d'une rotation.

Exercice 2. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale directe du plan orienté.

1. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u}^2$, $\| \overrightarrow{u} \|^2$, $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|$ et $\| \overrightarrow{u} \| + \| \overrightarrow{v} \|$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, exprimer $\| \lambda \overrightarrow{u} \|$ en fonction de λ.
2. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\| \overrightarrow{u} \| = 1$, $\| \overrightarrow{v} \| = 2$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\dfrac{3}{2}$.
   Calculer $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u}$, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) \cdot (-\overrightarrow{u} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{v})$.
3. On suppose que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs tels que $\| \overrightarrow{u} \| = 1$, $\| \overrightarrow{v} \| = 2$ et $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \| = 5$. Calculer alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. Faire une figure à l'échelle (1 unité=2cm) : que se passe t-il ? Conclusion ? Mêmes questions avec $\| \overrightarrow{u} \| = 1$, $\| \overrightarrow{v} \| = 2$ et $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \| = 2$.
4. Soient A, B, C trois points du plan tels que $AB = 10$, $AC = 15$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -\dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Calculer AD.

Exercice 3. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ deux vecteurs d'affixes respectifs z et z' dans le plan complexe. Montrer que l'on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}' = \mathrm{Re}\,(z\,\overline{z'}) \quad \text{et} \quad \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}') = -\mathrm{Im}\,(z\,\overline{z'})$$

Exercice 4. Soient $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale directe du plan et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

1. Donner le cosinus et le sinus de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.
2. Trouver le vecteur $\overrightarrow{w}$ de même norme que $\overrightarrow{u}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}}) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
3. Déterminer $\overrightarrow{v}'$, projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$.

Exercice 5. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On note D et E les projetés orthogonaux des points B et C sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Exercice 6. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct et on considère les points $A(-1,1)$, $B(1,5)$ et $C(3,2)$.

1. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Quels sont les vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{AB}$?
3. Soit d la droite passant par C et dirigée par $\overrightarrow{u}(5,3)$. Déterminer $\{\Omega\} = d \cap (AB)$.
4. Trouver une valeur approchée à 10^{-3} près de la mesure principale θ de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ (donner deux méthodes).

Exercice 7. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

1. On considère les points $A(3,5)$, $B(-2,1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}(4,-1)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB) et de la droite δ passant par A et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{u}$.
2. (a) Déterminer les coordonnées de tous les vecteurs unitaires orthogonaux à (AB).
   (b) Trouver les points $C \in \delta$ tels que $d(C,(AB)) = 2$.
3. Calculer l'aire du triangle ABC de deux manières différentes.

Exercice 8. Les équations suivantes sont-elles des équations de cercle ? Si oui en donner le centre et le rayon.

1. $x^2 + y^2 - 4x = 5$.
2. $x^2 + y - 4x - 3$.
3. $x^2 + y^2 - 3x + 6y - 2 = 0$.
4. $x^2 - y^2 + 6y - 2 = 0$.

Exercice 9. Le plan est muni d'un repère orthonormal. Soit d la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$.

1. Soit p la projection orthogonale sur d et soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan. On pose $M' = p(M)$.
   (a) Soient A un point de d et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de d. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$ et de $\overrightarrow{u}$ (projection d'un vecteur sur un axe ...)
   (b) Choisissant par exemple $A(0,3)$ et un vecteur $\overrightarrow{u}$ convenable, en déduire l'expression analytique de p, c'est à dire les coordonnées (x',y') de $M' = p(M)$ en fonction de (x,y),
2. Soient s la symétrie orthogonale par rapport à d et M'' le point $s(M)$. Déduire de la première question les coordonnées (x'',y'') de M'' en fonction de (x,y) : on a obtenu l'expression analytique de s.
3. Soient d la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$ et d' la droite d'équation $y = x + 3$. Déterminer l'expression analytique de la projection sur d suivant la direction de d'.

Exercice 10. Soient A et B deux points distincts du plan.

1. Identifier la transformation géométrique qui associe à un point M le point M' tel que $MABM'$ soit un parallélogramme.
2. Identifier de même la transformation géométrique qui associe à un point M le point M' tel que $AMBM'$ soit un parallélogramme.
3. Identifier la transformation géométrique qui associe à un point M le point M' milieu de $[AM]$.

Exercice 11. Soient $\mathcal{C}$ une cercle de centre O et de rayon R, A un point quelconque intérieur au disque correspondant. À tout point M du cercle on fait correspondre le point M' tel que M soit le milieu de $[AM']$. Quelle est la transformation géométrique qui à M associe M' ? En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M' lorsque M décrit $\mathcal{C}$. Représenter cet ensemble.

Exercice 12. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct.

1. Écrire la représentation analytique de la translation t de vecteur $\overrightarrow{u}(4,-1)$.
2. Soit $I(1,2)$ un point. On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   (a) Écrire la représentation analytique de la rotation r.
   (b) Soient $A(2,0)$ et $B(3,1)$. Représenter sur une même figure la droite (AB), les points $A' = r(A)$, $B' = r(B)$ puis l'image de (AB) par r.
   (c) Préciser l'image par r du cercle de centre A et de rayon 3.
3. Mêmes questions avec l'homothétie h de centre I et de rapport -2.

Pour travailler en autonomie

Exercice 13. On reprend les données et résultats de l'exercice 12 et considère la transformation $f = t \circ h$.

1. Écrire la représentation analytique de f.
2. Quelle sont la nature et les éléments caractéristiques de f ?

Exercice 14. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

1. Soient d une droite d'équation $y = mx + p$ et d' une droite d'équation $y = m'x + p'$ où m, m', p, p' sont des réels. Déterminer une condition sur ces réels pour que d et d' soient orthogonales.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soient a et b des réels. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. À quelle condition la tangente à $\mathcal{C}$ en $A(a, f(a))$ est-elle orthogonale à la tangente à $\mathcal{C}$ en $B(b, f(b))$?

Exercice 15. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On considère les points $A(2,1)$, $B(-3,2)$, $C(1,-3)$ et $D(2,-5)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).
3. Calculer la distance du point C à la droite (AB).
4. Donner la valeur de $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
5. Soit p la projection orthogonale sur (CD) et soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan.
   On pose $M' = p(M)$.
   (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CM'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$.
   (b) En déduire l'expression analytique de p.

Exercice 16. On donne un point A ainsi que deux droites sécantes d et d'.

1. Sur la figure 11.1, comment placer les points M sur d et M' sur d' de sorte que le trajet AMM' soit de longueur minimale ?

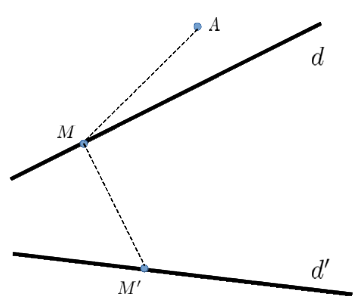


FIGURE 10.1 –

2. Même question avec la figure 11.2. (On pourra utiliser le symétrique orthogonal de A par rapport à d).

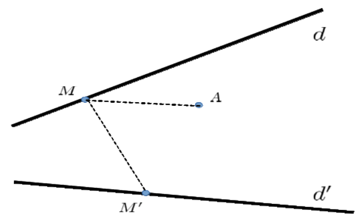


FIGURE 10.2 –

3. Où placer, sur la figure 11.3, le point M qui minimise le trajet AMB ?

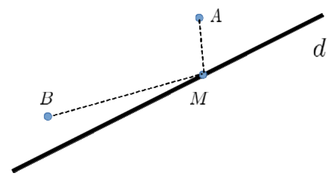


FIGURE 10.3 –

TD chapitre 11

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 (Questions de cours)**.**

1. Définitions du produit scalaire et du déterminant en base orthonormale directe. Calcul ?
2. Comment calcule t-on l'aire d'un triangle à l'aide du déterminant ?
3. Comment calcule t-on le projeté othogonal d'un vecteur $\vec{v}$ sur un axe dirigé par un vecteur $\vec{u}$?
4. Donner la définition d'une translation, d'une homothétie et d'une rotation.

Exercice 2. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale directe du plan orienté.

1. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u}^2$, $\| \overrightarrow{u} \|^2$, $\| \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \|$ et $\| \overrightarrow{u} \| + \| \overrightarrow{v} \|$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, exprimer $\| \lambda\overrightarrow{u} \|$ en fonction de λ.
2. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\| \overrightarrow{u} \|= 1$, $\| \overrightarrow{v} \|= 2$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -\frac{3}{2}$.
   Calculer $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{u}$, $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v})\cdot(-\overrightarrow{u}+\frac{1}{2}\overrightarrow{v})$.
3. On suppose que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs tels que $\| \overrightarrow{u} \|= 1$, $\| \overrightarrow{v} \|= 2$ et $\| \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \|= 5$. Calculer alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$. Faire une figure à l'échelle (1 unité=2cm) : que se passe t-il ? Conclusion ? Mêmes questions avec $\| \overrightarrow{u} \|= 1$, $\| \overrightarrow{v} \|= 2$ et $\| \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \|= 2$.
4. Soient A, B, C trois points du plan tels que $AB = 10$, $AC = 15$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Calculer AD.

Exercice 3. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ deux vecteurs d'affixes respectifs z et z' dans le plan complexe. Montrer que l'on a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}' = \mathrm{Re}\,(z\,\overline{z'}) \quad \text{et} \quad \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}') = -\mathrm{Im}\,(z\,\overline{z'})$$

Exercice 4. Soient $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale directe du plan et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

1. Donner le cosinus et le sinus de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.
2. Trouver le vecteur $\overrightarrow{w}$ de même norme que $\overrightarrow{u}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
3. Déterminer $\overrightarrow{v}'$, projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$.

Exercice 5. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On note D et E les projetés orthogonaux des points B et C sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

Exercice 6. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct et on considère les points $A(-1,1)$, $B(1,5)$ et $C(3,2)$.

1. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Quels sont les vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{AB}$?
3. Soit d la droite passant par C et dirigée par $\overrightarrow{u}(5,3)$. Déterminer $\{\Omega\} = d \cap (AB)$.
4. Trouver une valeur approchée à 10^{-3} près de la mesure principale θ de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ (donner deux méthodes).

Exercice 7. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

1. On considère les points $A(3,5)$, $B(-2,1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}(4,-1)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB) et de la droite δ passant par A et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{u}$.
2. (a) Déterminer les coordonnées de tous les vecteurs unitaires orthogonaux à (AB).
   (b) Trouver les points $C \in \delta$ tels que $d(C,(AB)) = 2$.
3. Calculer l'aire du triangle ABC de deux manières différentes.

Exercice 8. Les équations suivantes sont-elles des équations de cercle ? Si oui en donner le centre et le rayon.

1. $x^2 + y^2 - 4x = 5$.
2. $x^2 + y - 4x - 3$.
3. $x^2 + y^2 - 3x + 6y - 2 = 0$.
4. $x^2 - y^2 + 6y - 2 = 0$.

Exercice 9. Le plan est muni d'un repère orthonormal. Soit d la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$.

1. Soit p la projection orthogonale sur d et soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan. On pose $M' = p(M)$.
   (a) Soient A un point de d et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de d. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$ et de $\overrightarrow{u}$ (projection d'un vecteur sur un axe ...)
   (b) Choisissant par exemple $A(0,3)$ et un vecteur $\overrightarrow{u}$ convenable, en déduire l'expression analytique de p, c'est à dire les coordonnées (x',y') de $M' = p(M)$ en fonction de (x,y),
2. Soient s la symétrie orthogonale par rapport à d et M'' le point $s(M)$. Déduire de la première question les coordonnées (x'',y'') de M'' en fonction de (x,y) : on a obtenu l'expression analytique de s.
3. Soient d la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$ et d' la droite d'équation $y = x + 3$. Déterminer l'expression analytique de la projection sur d suivant la direction de d'.

Exercice 10. Soient A et B deux points distincts du plan.

1. Identifier la transformation géométrique qui associe à un point M le point M' tel que $MABM'$ soit un parallélogramme.
2. Identifier de même la transformation géométrique qui associe à un point M le point M' tel que $AMBM'$ soit un parallélogramme.
3. Identifier la transformation géométrique qui associe à un point M le point M' milieu de $[AM]$.

Exercice 11. Soient $\mathcal{C}$ une cercle de centre O et de rayon R, A un point quelconque intérieur au disque correspondant. À tout point M du cercle on fait correspondre le point M' tel que M soit le milieu de $[AM']$. Quelle est la transformation géométrique qui à M associe M' ? En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M' lorsque M décrit $\mathcal{C}$. Représenter cet ensemble.

Exercice 12. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct.

1. Écrire la représentation analytique de la translation t de vecteur $\overrightarrow{u}(4,-1)$.
2. Soit $I(1,2)$ un point. On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   (a) Écrire la représentation analytique de la rotation r.
   (b) Soient $A(2,0)$ et $B(3,1)$. Représenter sur une même figure la droite (AB), les points $A' = r(A)$, $B' = r(B)$ puis l'image de (AB) par r.
   (c) Préciser l'image par r du cercle de centre A et de rayon 3.
3. Mêmes questions avec l'homothétie h de centre I et de rapport -2.

Pour travailler en autonomie

Exercice 13. On reprend les données et résultats de l'exercice 12 et considère la transformation $f = t \circ h$.

1. Écrire la représentation analytique de f.
2. Quelle sont la nature et les éléments caractéristiques de f ?

Exercice 14. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

1. Soient d une droite d'équation $y = mx + p$ et d' une droite d'équation $y = m'x + p'$ où m, m', p, p' sont des réels. Déterminer une condition sur ces réels pour que d et d' soient orthogonales.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soient a et b des réels. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. À quelle condition la tangente à $\mathcal{C}$ en $A(a, f(a))$ est-elle orthogonale à la tangente à $\mathcal{C}$ en $B(b, f(b))$?

Exercice 15. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On considère les points $A(2,1)$, $B(-3,2)$, $C(1,-3)$ et $D(2,-5)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).
3. Calculer la distance du point C à la droite (AB).
4. Donner la valeur de $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
5. Soit p la projection orthogonale sur (CD) et soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan.
   On pose $M' = p(M)$.
   (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CM'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$.
   (b) En déduire l'expression analytique de p.

Exercice 16. On donne un point A ainsi que deux droites sécantes d et d'.

1. Sur la figure 11.1, comment placer les points M sur d et M' sur d' de sorte que le trajet AMM' soit de longueur minimale ?

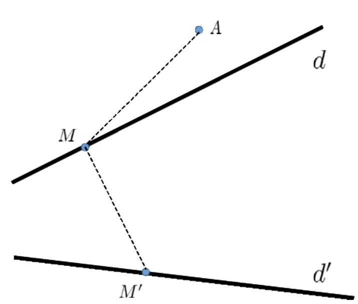


FIGURE 11.1 –

2. Même question avec la figure 11.2. (On pourra utiliser le symétrique orthogonal de A par rapport à d).

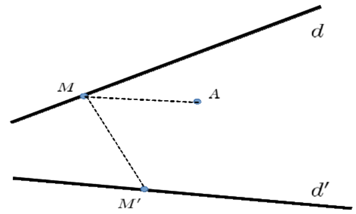


FIGURE 11.2 –

3. Où placer, sur la figure 11.3, le point M qui minimise le trajet AMB ?

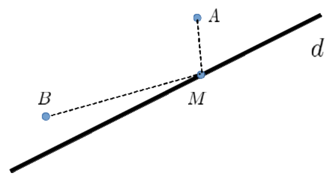


FIGURE 11.3 –

Annexes

Formulaire de limites

Sommes et produits de limites

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ND
$\lim\limits_{x \to a} (fg)(x)$	ll'	$+\infty$ si $l > 0$ ND si $l = 0$ $-\infty$ si $l < 0$	$-\infty$ si $l > 0$ ND si $l = 0$ $+\infty$ si $l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Quotients de limites

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0 $\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$l' \neq 0$ $\pm\infty$	$l' \neq 0$	$l' \neq 0$	0^+ 0^-	0^+ 0^-	0 $\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x)$	$\frac{l}{l'}$ 0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$	$+\infty$ $-\infty$	$-\infty$ $+\infty$	ND ND

Composition

Soit f, g, deux fonctions, a, b et c des réels (ou $+\infty$, ou $-\infty$).
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$

Fonctions polynomiales

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

$$\begin{array}{rcl}
\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) & & . \\
\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) & = & +\infty \text{ si } a_n > 0 \\
& & -\infty \text{ si } a_n < 0 \\
\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) & = & +\infty \text{ si } a_n > 0 \text{ et } n \text{ pair} \\
& & +\infty \text{ si } a_n < 0 \text{ et } n \text{ impair} \\
& & -\infty \text{ si } a_n > 0 \text{ et } n \text{ impair} \\
& & -\infty \text{ si } a_n < 0 \text{ et } n \text{ pair}
\end{array}$$

Fractions rationnelles

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_p x^p}$ fraction rationnelle réduite.

Si $Q(a) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si $Q(a) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Si $n < p$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Si $n > p$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Si $n = p$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Autres fonctions

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \ , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-, \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp x}{x} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x \exp^{-x} = 0, \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1$
- Si $a > 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
- Si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
- Pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \exp^{-x} = 0.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = +\infty.$
- $\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan(x) = +\infty \ , \quad \lim\limits_{\substack{x \to -\pi/2 \\ x > -\pi/2}} \tan(x) = -\infty.$

Formulaire de dérivées

Fonction	**Dérivable sur**	**Dérivée**
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \exp(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$]0, +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ln a \cdot a^x$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$\mathbb{R} \backslash \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$f(x) = \arcsin(x)$	$]-1, 1[$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos(x)$	$]-1, 1[$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \sinh(x)$
$f(x) = \sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cosh(x)$
$f(x) = \tanh(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1 - \tanh^2(x)$

Opération sur les dérivées

Hypothèses	**Dérivabilité**	**Fonction dérivée**
f et g dérivable sur I	$f+g$ dérivable sur I	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
f dérivable sur $I, \lambda \in \mathbb{R}$	λf dérivable sur I	$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$
f et g dérivable sur I	fg dérivable sur I	$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
f dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$	$\dfrac{1}{f}$ dérivable sur I	$\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$
f et g dérivable sur I et $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$	$\dfrac{f}{g}$ dérivable sur I	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
g dérivable sur I et f dérivable sur $g(I)$	$f \circ g$ dérivable sur I	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Composition de fonctions usuelles et dérivées

Hypothèses	**Dérivabilité**	**Fonction dérivée**
$n \in \mathbb{N}^*$, f dérivable sur I	f^n dérivable sur I	$(f^n)'(x) = nf'(x)\big(f(x)\big)^{n-1}$
$n \in \mathbb{N}^*$, f dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$	$\dfrac{1}{f^n}$ dérivable sur I	$\left(\dfrac{1}{f^n}\right)'(x) = -n\dfrac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^{n+1}}$
$\alpha \in \mathbb{R}$, f dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f(x) > 0$	f^α dérivable sur I	$(f^\alpha)'(x) = \alpha f'(x)\big(f(x)\big)^{\alpha-1}$
f dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f(x) > 0$	$\sqrt{f}$ dérivable sur I	$\big(\sqrt{f}\big)'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
f dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$	$\ln\lvert f\rvert$ dérivable sur I	$\big(\ln\lvert f\rvert\big)'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
f dérivable sur I	$\exp(f)$ dérivable sur I	$\big(\exp(f)\big)'(x) = \exp\big(f(x)\big)f'(x)$
f dérivable sur I	$\sin(f)$ dérivable sur I	$\big(\sin(f)\big)'(x) = \cos\big(f(x)\big)f'(x)$
f dérivable sur I	$\cos(f)$ dérivable sur I	$\big(\cos(f)\big)'(x) = -\sin\big(f(x)\big)f'(x)$