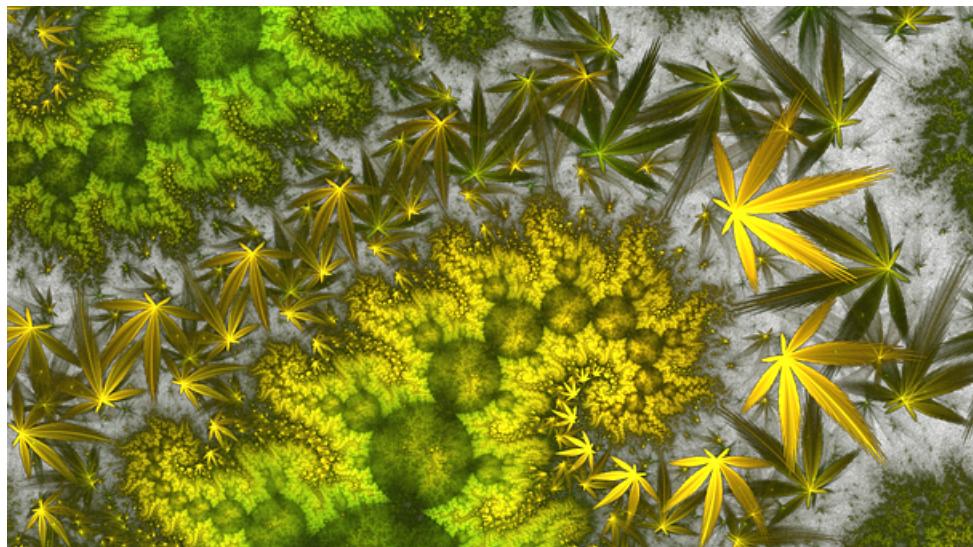




## L1 MATH103\_MISPI

# Mathématiques générales & applications

C. Bonjour, C. Bourdarias, P. Baras & S. Simon



*Version du 1<sup>er</sup> septembre 2025*



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Éléments du langage mathématique</b>                     | <b>7</b>  |
| 1.1 Opérations logiques . . . . .                             | 7         |
| 1.2 Quantificateurs . . . . .                                 | 10        |
| 1.3 Principe des démonstrations . . . . .                     | 11        |
| 1.4 Les Ensembles . . . . .                                   | 12        |
| 1.5 Relations, fonctions, applications . . . . .              | 15        |
| <b>2 Nombres entiers, nombres rationnels et nombres réels</b> | <b>21</b> |
| 2.1 Entiers naturels . . . . .                                | 21        |
| 2.2 Entiers relatifs, nombres rationnels . . . . .            | 22        |
| 2.3 Symboles somme et produit, formule du binôme . . . . .    | 23        |
| 2.4 Nombres réels . . . . .                                   | 26        |
| <b>3 Polynômes</b>  | <b>33</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .                                    | 33        |
| 3.2 Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ . . . . .       | 34        |
| 3.3 Fonctions polynomiales, racines . . . . .                 | 35        |
| 3.4 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ . . . . .      | 36        |
| <b>4 Les nombres complexes</b>                                | <b>39</b> |
| 4.1 Introduction . . . . .                                    | 39        |
| 4.2 Représentation algébrique des nombres complexes . . . . . | 39        |
| 4.3 Argument, forme trigonométrique . . . . .                 | 42        |
| 4.4 Applications . . . . .                                    | 45        |
| 4.5 Polynômes à coefficients complexes . . . . .              | 48        |
| <b>5 Fonctions usuelles</b>                                   | <b>53</b> |
| 5.1 Quelques rappels . . . . .                                | 53        |
| 5.2 Logarithme népérien . . . . .                             | 54        |
| 5.3 Fonction exponentielle . . . . .                          | 56        |
| 5.4 Exposants réels, fonctions puissances . . . . .           | 58        |
| 5.5 Fonctions trigonométriques . . . . .                      | 60        |
| <b>6 Limites et continuité</b>                                | <b>67</b> |
| 6.1 Généralités . . . . .                                     | 67        |
| 6.2 Définitions des limites et de la continuité . . . . .     | 68        |
| 6.3 Limites et continuité . . . . .                           | 78        |
| 6.4 Une application à l'étude d'asymptotes . . . . .          | 81        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>7 Dérivabilité, accroissements finis</b>                                 | <b>87</b>  |
| 7.1 Déivation : définitions . . . . .                                       | 87         |
| 7.2 Théorèmes généraux . . . . .  | 92         |
| 7.3 Déivation et extrema d'une fonction . . . . .                           | 94         |
| 7.4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis . . . . .                | 96         |
| 7.5 Dérivées successives, dérivées partielles . . . . .                     | 102        |
| <b>8 Intégration</b>  | <b>105</b> |
| 8.1 Intégrale d'une fonction sur un intervalle . . . . .                    | 105        |
| 8.2 Primitives d'une fonction sur un intervalle . . . . .                   | 109        |
| <b>9 Systèmes linéaires, matrices</b>                                       | <b>117</b> |
| 9.1 Introduction . . . . .  | 117        |
| 9.2 Résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss . . . . .     | 118        |
| 9.3 Matrices . . . . .  | 122        |
| 9.4 Matrices et systèmes d'équations linéaires . . . . .                    | 128        |
| 9.5 Matrices et systèmes $2 \times 2$ . . . . .                             | 131        |
| <b>10 Géométrie élémentaire du plan</b>                                     | <b>133</b> |
| 10.1 Contexte général et rappels . . . . .                                  | 133        |
| 10.2 Produit scalaire et déterminant . . . . .                              | 141        |
| 10.3 Droites . . . . .  | 149        |
| 10.4 Cercles . . . . .  | 154        |
| 10.5 Translations, Homothéties, Rotations, Projections, Symétries . . . . . | 155        |
| 10.6 Compléments (*) . . . . .  | 165        |
| <b>11 Géométrie élémentaire de l'espace</b>                                 | <b>171</b> |
| 11.1 Contexte général et rappels . . . . .                                  | 171        |
| 11.2 Produit vectoriel . . . . .  | 176        |
| 11.3 Produit mixte, déterminant . . . . .                                   | 179        |
| 11.4 Droites et plans en géométrie analytique . . . . .                     | 183        |
| 11.5 Calculs de distances . . . . .   | 194        |
| 11.6 Translations, Homothéties, Projections, Symétries. . . . .             | 197        |

# Table des figures

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | <i>Opérations ensemblistes</i>  | 13 |
| 1.2  | <i>Représentation schématique de la relation <math>\mathcal{R}</math></i>   | 15 |
| 1.3  | <i>Le graphe de la relation <math>\mathcal{R}</math></i>  | 15 |
| 1.4  | <i>Un exemple de fonction</i>   | 16 |
| 1.5  | <i>Composition de deux fonctions</i>  | 17 |
| 1.6  | <i>Un exemple de composée de fonctions</i>  | 18 |
| 1.7  | <i>Injections, surjections, bijections</i>  | 19 |
| 1.8  | <i>Image et image réciproque d'une partie</i>   | 20 |
| 4.1  | <i>Somme et produit par un réel</i>   | 40 |
| 4.2  | <i>Conjugué et module</i>   | 41 |
| 4.3  | <i>Inégalités triangulaires et module</i>   | 42 |
| 4.4  | <i>Forme trigonométrique</i>  | 44 |
| 4.5  | <i>Racines <math>n</math>-ièmes</i>   | 46 |
| 4.6  | <i>Racines cubiques de 1</i>  | 46 |
| 5.1  | <i>Fonction logarithme népérien</i>   | 55 |
| 5.2  | <i>Fonctions logarithme et exponentielle</i>  | 57 |
| 5.3  | <i>Fonctions puissances <math>h_\alpha</math></i>   | 59 |
| 5.4  | <i>Cercle trigonométrique</i>   | 61 |
| 5.5  | <i>Fonctions sinus et cosinus</i>   | 61 |
| 5.6  | <i>Fonction tangente</i>  | 62 |
| 6.1  | <i>Exemple de bornes supérieures et inférieures pour une fonction croissante</i>                                    | 68 |
| 6.2  | <i>Limite finie en un point</i>   | 69 |
| 6.3  | <i>Fonction partie entière</i>  | 70 |
| 6.4  | <i>Limite infinie à gauche en un point</i>  | 73 |
| 6.5  | <i>Limite finie en <math>+\infty</math></i>   | 74 |
| 6.6  | <i>Exemple de discontinuité en <math>a</math></i>   | 75 |
| 6.7  | <i>Continuité et valeurs intermédiaires</i>   | 76 |
| 6.8  | <i>Droite asymptote</i>   | 82 |
| 6.9  | $f(x) = x \sin x$ en $+\infty$  | 83 |
| 6.10 | $f(x) = x + 3\sqrt{x}$ en $+\infty$   | 84 |
| 6.11 | $f(x) = x + 3\frac{\sin 3x}{x}$ en $+\infty$  | 84 |
| 7.1  | <i>Interprétation graphique du taux de variation</i>  | 87 |
| 7.2  | <i>Interprétation graphique de la dérivée</i>   | 90 |
| 7.3  | <i>Extrema d'une fonction : minimum relatif en <math>a, c_2, b</math>, maximum relatif en <math>c_0, c_3</math></i> | 95 |
| 7.4  | <i>Contexte du théorème de Rolle</i>  | 96 |
| 7.5  | <i>Contexte du théorème des accroissements finis</i>  | 97 |

|   |     |
|---|-----|
| 10.1 Bipoints et vecteurs . . . . .   | 134 |
| 10.2 Vecteurs unitaires colinéaires à un vecteur donné . . . . .                          | 135 |
| 10.3 Angles géométriques et angles orientés de vecteurs . . . . .                         | 138 |
| 10.4 Vecteurs définis par une norme et un angle orienté . . . . .                         | 140 |
| 10.5 Vecteurs orthogonaux à un vecteur donné et de même norme . . . . .                   | 140 |
| 10.6 Déterminant et aire d'un triangle . . . . .  | 142 |
| 10.7 Identité du parallélogramme . . . . .  | 146 |
| 10.8 Projection vectorielle orthogonale . . . . .   | 147 |
| 10.9 Projété orthogonal sur un axe d'un vecteur défini par un bipoint . . . . .           | 148 |
| 10.10 Angle orienté d'un couple de droites . . . . .                                      | 152 |
| 10.11 Distance d'un point à une droite . . . . .  | 154 |
| 10.12 Translations . . . . .  | 156 |
| 10.13 Homothéties . . . . .   | 158 |
| 10.14 Rotations planes . . . . .  | 159 |
| 10.15 Projections et symétries . . . . .  | 161 |
| 10.16 Projections et symétries orthogonales . . . . .                                     | 162 |
| 10.17 Arc capable (angle de droites) . . . . .  | 166 |
| 10.18 Arc capable (angle de vecteurs) . . . . .   | 166 |
| 10.19 Angle au centre et angle inscrit . . . . .  | 167 |
| <br>  |     |
| 11.1 Points et vecteurs coplanaires . . . . .   | 173 |
| 11.2 Repères orthonormaux directs . . . . .   | 175 |
| 11.3 Orientation d'un plan par un vecteur normal de l'espace orienté . . . . .            | 175 |
| 11.4 Produit vectoriel . . . . .  | 177 |
| 11.5 Volume d'un parallélépipède . . . . .  | 179 |
| 11.6 Intersection de deux plans . . . . .   | 187 |
| 11.7 Intersection d'une droite et d'un plan . . . . .                                     | 188 |
| 11.8 Distance d'un point à une droite de l'espace . . . . .                               | 195 |
| 11.9 Perpendiculaire commune et distance entre deux droites . . . . .                     | 197 |
| 11.10 Projections et symétries par rapport à une droite parallèlement à un plan . . . . . | 199 |
| 11.11 Projections et symétries par rapport à un plan parallèlement à une droite . . . . . | 200 |

# Chapitre 1

## Éléments du langage mathématique

L'utilisation du langage courant en mathématiques peut conduire à des ambiguïtés et de nombreux paradoxes bien connus résultant d'une utilisation trop intuitive de la notion d'ensemble (« l'ensemble de tous les ensembles » par exemple ...). D'un autre côté, une formalisation complète des mathématiques conduirait à des énoncés illisibles et finalement à une pratique stérile. Nous proposons dans ce chapitre de mettre en place les éléments de langage rigoureux utilisés par tous les mathématiciens et utilisateurs des mathématiques, en évitant ces écueils. Leur appropriation et leur bon usage est une question de pratique (guidée). Nous donnons ci-dessous quelques définitions concernant les énoncés mathématiques et les ensembles, les relations entre ces objets avec leurs règles d'emploi.

### 1.1 Opérations logiques

Un énoncé mathématique est soit vrai soit faux (on parle de « principe du tiers exclu » et nous passons sous silence la question de l'existence d'énoncés « indécidables »).

- **Assertion ou proposition** : énoncé susceptible d'être vrai (**V**) ou faux (**F**) sans ambiguïté.

Notée **A**, **B** ou encore **A(x)** si elle dépend d'une variable  $x$ .

**Exemples :**

- **A** : « 4 est un entier pair ». Cette assertion est vraie.
  - **A(n)** : « tout entier  $n \geq 2$  admet au moins un diviseur premier ». Cette assertion est vraie.
  - **B** : «  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel » (c'est à dire peut s'écrire sous la forme  $\frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  entiers naturels). Cette assertion est fausse : on dit que  $\sqrt{2}$  est irrationnel. La preuve est faite [plus bas](#) à titre d'exemple de démonstration par l'absurde.
  - **C** : « pour tout entier  $n$  » **n'est pas** une assertion !
- 
- **Négation** : (*non A*) est l'assertion qui est vraie quand **A** est fausse et fausse quand **A** est vraie. On peut résumer cela sous forme d'une « table de vérité » :

| <b>A</b> | <i>non A</i> |
|----------|--------------|
| <i>V</i> | <i>F</i>     |
| <i>F</i> | <i>V</i>     |

**Exemple** : (*non B*) est vraie.

- **Conjonction** : **A et B**. Cette assertion est vraie uniquement si les deux assertions **A**, **B** sont vraies.

| <b>A</b> | <b>B</b> | <b>A et B</b> |
|----------|----------|---------------|
| V        | V        | V             |
| V        | F        | F             |
| F        | V        | F             |
| F        | F        | F             |

**Exemples :**

« 9 est impair et 9 est multiple de 3 » : assertion vraie.

« 9 est pair et 9 est multiple de 3 » : assertion fausse.

- **Disjonction** : (**A ou B**). Cette assertion est vraie uniquement si l'une au moins des assertions **A**, **B** est vraie. Il y a donc trois cas possibles :

- **A** vraie sans que **B** ne soit vraie,
- **B** vraie sans que **A** ne soit vraie,
- **A** et **B** sont vraies en même temps (on dit que le connecteur logique « ou » est inclusif).

| <b>A</b> | <b>B</b> | <b>A ou B</b> |
|----------|----------|---------------|
| V        | V        | V             |
| V        | F        | V             |
| F        | V        | V             |
| F        | F        | F             |

**Exemples :**

« 9 est impair ou 9 est multiple de 3 » : assertion vraie.

« 9 est pair ou 9 est multiple de 3 » : assertion vraie.

- **Implication** : l'assertion ((non **A**) ou **B**) se note **A**  $\implies$  **B**. On lit : « **A** implique **B** ».

À l'aide des règles précédentes on peut construire sa table de vérité :

| <b>A</b> | <b>B</b> | non <b>A</b> | <b>A</b> $\implies$ <b>B</b> |
|----------|----------|--------------|------------------------------|
| V        | V        | F            | V                            |
| V        | F        | F            | F                            |
| F        | V        | V            | V                            |
| F        | F        | V            | V                            |

**Remarque 1.1.1.** On voit que la seule contrainte porte sur le cas où **A** est vraie : **B** doit alors nécessairement être vraie.

On dit que **B** est une condition nécessaire pour **A**, ou encore que **A** est une condition suffisante pour **B**.

**Exemple** : « si  $a \in \mathbb{R}$  alors ( $a \leq -1 \implies a^2 \geq 1$ ) » est une assertion vraie.

- **Équivalence** : on dit que les assertions **A**, **B** sont équivalentes si **A**  $\implies$  **B** ainsi que **B**  $\implies$  **A** sont vraies. Ces deux dernières assertions sont dites réciproques l'une de l'autre. On écrit alors **A**  $\iff$  **B**. Dans le langage courant on dit que **A** est une condition nécessaire et suffisante de **B** (et vice-versa), ou encore que **A** est vraie si et seulement si **B** est vraie (« ssi » en abrégé pour « si et seulement si »).

| <b>A</b> | <b>B</b> | <b>A</b> $\iff$ <b>B</b> |
|----------|----------|--------------------------|
| V        | V        | V                        |
| V        | F        | F                        |
| F        | V        | F                        |
| F        | F        | V                        |

**Exemple :** les deux assertions suivantes sont équivalentes.

$$A : (a \geq 1 \text{ ou } a \leq -1) \quad B : a^2 \geq 1$$

On écrit donc  $\mathbf{A} \iff \mathbf{B}$ .

**Remarque 1.1.2.** On a de manière immédiate les équivalences :

$$(\mathbf{A} \text{ et } \mathbf{B}) \iff (\mathbf{B} \text{ et } \mathbf{A})$$

$$(\mathbf{A} \text{ ou } \mathbf{B}) \iff (\mathbf{B} \text{ ou } \mathbf{A})$$

et aussi les propriétés d'associativité et de distributivité :

$$(\mathbf{A} \text{ ou } \mathbf{B}) \text{ ou } \mathbf{C} \iff \mathbf{A} \text{ ou } (\mathbf{B} \text{ ou } \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \text{ et } \mathbf{B}) \text{ et } \mathbf{C} \iff \mathbf{A} \text{ et } (\mathbf{B} \text{ et } \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} \text{ et } (\mathbf{B} \text{ ou } \mathbf{C}) \iff (\mathbf{A} \text{ et } \mathbf{B}) \text{ ou } (\mathbf{A} \text{ et } \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} \text{ ou } (\mathbf{B} \text{ et } \mathbf{C}) \iff (\mathbf{A} \text{ ou } \mathbf{B}) \text{ et } (\mathbf{A} \text{ ou } \mathbf{C})$$

Les résultats suivants se montrent facilement en construisant les tables de vérité (exercice) :

**Proposition 1.1.1.** Soient  $A, B$  deux assertions. Alors :

$$\text{non } (\text{non } \mathbf{A}) \iff \mathbf{A}$$

$$\text{non } (\mathbf{A} \text{ et } \mathbf{B}) \iff ((\text{non } \mathbf{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathbf{B}))$$

$$\text{non } (\mathbf{A} \text{ ou } \mathbf{B}) \iff ((\text{non } \mathbf{A}) \text{ et } (\text{non } \mathbf{B}))$$

$$\text{non } (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \iff (\mathbf{A} \text{ et } (\text{non } \mathbf{B})).$$

En niant l'implication (quatrième énoncé), on énonce en fait que  $\mathbf{B}$  n'est plus une conséquence de  $\mathbf{A}$ .

**Attention :** ce n'est pas  $(\text{non } \mathbf{A} \Rightarrow \text{non } \mathbf{B})$  et pas davantage  $(\mathbf{A} \Rightarrow \text{non } \mathbf{B})$  ...

- **Contraposée :** l'assertion  $\text{non } \mathbf{B} \Rightarrow \text{non } \mathbf{A}$  s'appelle la contraposée de  $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ .

Le résultat qui suit, très utile dans la pratique des démonstrations, énonce qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes.

**Proposition 1.1.2.**  $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \iff (\text{non } \mathbf{B} \Rightarrow \text{non } \mathbf{A})$

*Preuve :* en utilisant systématiquement la proposition 1.1.1 on a successivement :

$$\begin{aligned} \text{non } \mathbf{B} \Rightarrow \text{non } \mathbf{A} &\iff (\text{non non } \mathbf{B}) \text{ ou } (\text{non } \mathbf{A}) \\ &\iff \text{non } (\text{non } \mathbf{B} \text{ et } \mathbf{A}) \\ &\iff \text{non } (\mathbf{A} \text{ et } \text{non } \mathbf{B}) \\ &\iff \text{non } (\text{non } (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})) \\ &\iff (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \end{aligned}$$

■

À noter également :

**Proposition 1.1.3** (Transitivité). Soient  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  trois assertions. Alors :

$$[(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \text{ et } (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})] \Rightarrow (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$$

$$[(\mathbf{A} \iff \mathbf{B}) \text{ et } (\mathbf{B} \iff \mathbf{C})] \Rightarrow (\mathbf{A} \iff \mathbf{C})$$

**Remarque 1.1.3.** Ces notions sont appliquées en électronique (portes logiques) et en informatique (tests). On pourra consulter Wikipedia [https://fr.wikipedia.org/wiki/Table\\_de\\_vérité](https://fr.wikipedia.org/wiki/Table_de_vérité) et les liens qui envoient vers ces notions.

## 1.2 Quantificateurs

Considérons une assertion  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  dépendant d'un objet  $x$ , par exemple ( $x \in \mathbb{R}$  et  $x^2 = -1$ ). On écrit :

$$\exists x, \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

pour exprimer que l'assertion est vraie pour au moins un  $x$ . Pour l'exemple ci-dessus on écrira plutôt :

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$$

On sait que cette assertion est fausse.

**Le symbole  $\exists$  s'appelle le quantificateur existentiel.**

De même :

$$\forall x, \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

exprime que  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  est vraie pour tout  $x$ . Par exemple :  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$  est une assertion vraie.

**Le symbole  $\forall$  s'appelle le quantificateur universel.**

Pour exprimer l'existence d'**un unique**  $x$  pour lequel  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  est vraie on écrit :

$$\exists!x, \mathbf{A}(\mathbf{x}).$$

**Exemple :**  $\exists!x, (x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \cos x = x)$ , ou de façon plus compacte :  $\exists!x > 0, \cos x = x$

**Attention :** une expression mathématique peut contenir plusieurs quantificateurs et on veillera à ne pas intervertir l'ordre de deux quantificateurs de natures différentes. Ainsi :

$$A : \forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \ln(x) \geq a$$

n'a pas le même sens que

$$B : \exists x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \ln(x) \geq a,$$

l'une étant trivialement vraie (laquelle ?) et l'autre fausse.

Il est indispensable de savoir écrire rapidement et correctement la négation d'une assertion telle que  $A$  ci-dessus. Il suffit pour cela de se convaincre que l'on a :

$$\boxed{\text{non } (\exists x, \mathbf{A}(\mathbf{x})) \iff \forall x, \text{non } \mathbf{A}(\mathbf{x})}$$

et aussi :

$$\boxed{\text{non } (\forall x, \mathbf{A}(\mathbf{x})) \iff \exists x, \text{non } \mathbf{A}(\mathbf{x})}$$

On procède alors comme suit :

**Étape 1 :**  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  est de la forme  $(\forall a \in \mathbb{R}, \mathbf{P}(\mathbf{x}))$  où  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  est l'assertion  $(\exists x \in \mathbb{R}, \ln(x) \geq a)$ , on obtient donc  $(\text{non } \mathbf{A}(\mathbf{x}))$  sous la forme :  $\exists a \in \mathbb{R}, \text{non } \mathbf{P}(\mathbf{x})$ ,

**Étape 2 :**  $(\text{non } \mathbf{P}(\mathbf{x}))$  s'écrit :  $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(x) < a$ . On conclut donc que  $(\text{non } \mathbf{A}(\mathbf{x}))$  est l'assertion :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ln(x) < a.$$

En pratique on doit être capable d'écrire directement le résultat : on remplace chaque quantificateur existentiel par un quantificateur universel et inversement, puis l'expression finale ( $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  dans notre exemple) par sa négation.

### 1.3 Principe des démonstrations

On dispose d'un ensemble d'hypothèses  $H$  et on veut aboutir à un ensemble de conclusions  $C$ .

Pour le faire, on suit un raisonnement logique fait d'implications simples entre des assertions clairement énoncées, en utilisant en général des résultats déjà établis et des méthodes adaptées (la « boîte à outils » !).

- Pour montrer  $\mathbf{A} \implies \mathbf{B}$  on peut faire :
  - une démonstration **directe** : on suppose que  $\mathbf{A}$  est vraie (voir la remarque 1.1.1) et on cherche à montrer que  $\mathbf{B}$  est vraie,
  - une démonstration **par contraposée** : on suppose que  $\mathbf{B}$  est fausse et on prouve qu'alors  $\mathbf{A}$  est également fausse (non  $\mathbf{B} \implies \text{non } \mathbf{A}$ ).

**Exemple :** soit  $x$  un nombre réel. On veut montrer l'implication suivante, d'usage fréquent en analyse mathématique :

$$\underbrace{(\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon)}_{\mathbf{A}} \implies \underbrace{x = 0}_{\mathbf{B}} \quad (1.1)$$

Faisons l'hypothèse que non  $\mathbf{B}$  est vraie, c'est à dire que  $x \neq 0$ . Soit  $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ , on a évidemment  $\varepsilon > 0$  et  $|x| > \varepsilon$ , donc on a montré :  $\exists \varepsilon > 0, |x| > \varepsilon$ , c'est à dire que non  $\mathbf{A}$  est vraie.

- Démonstration **par l'absurde** :

on veut montrer qu'une assertion  $\mathbf{A}$  est vraie, on suppose qu'en fait  $\mathbf{A}$  est fausse et on met en évidence une certaine assertion  $\mathbf{B}$  telle qu'on ait à la fois (non  $\mathbf{A} \implies \mathbf{B}$ ) et (non  $\mathbf{A} \implies \text{non } \mathbf{B}$ ).

**Exemple :** montrons par l'absurde que  $\sqrt{2}$  est irrationnel (c'est l'assertion  $\mathbf{A}$ ). On suppose que  $\sqrt{2}$  est rationnel : on sait alors qu'il existe des entiers naturels  $p, q$  **premiers entre eux** (c'est à dire sans diviseur commun autre que 1) tels que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  (c'est  $\mathbf{B}$ ). On a donc  $p^2 = 2q^2$  et on en déduit que  $p$  est pair :  $p = 2k$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ .

La relation  $p^2 = 2q^2$  devient alors  $4k^2 = 2q^2$ , c'est à dire  $2k^2 = q^2$ , de sorte que  $q$  est pair. Ceci montre que  $p$  et  $q$  ne sont pas premiers entre eux, ce qui contredit  $B$  et termine la preuve.

- Démonstration **par disjonction des cas**. Cette méthode est basée sur la propriété suivante :

$$[(\mathbf{A} \text{ ou } \mathbf{B}) \text{ et } (\mathbf{A} \implies \mathbf{C}) \text{ et } (\mathbf{B} \implies \mathbf{C})] \implies \mathbf{C}.$$

Autrement dit (en langage courant) s'il y a deux cas possibles ( $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B} = \text{non } A$ ) et si dans chacun de ces cas on a  $\mathbf{C}$ , alors  $\mathbf{C}$  est vraie. Ceci s'étend à un nombre quelconque de cas recouvrant toutes les éventualités. **Exemple :** montrons que pour tout entier naturel  $n$  on a  $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ .

- Si  $n$  est pair alors il existe un entier  $k$  tel que  $n = 2k$  et  $\frac{n(n+1)}{2} = k(n+1) \in \mathbb{N}$ .
- Si  $n$  est impair alors  $n+1$  est pair : il existe un entier  $k$  tel que  $n+1 = 2k$  et  $\frac{n(n+1)}{2} = nk \in \mathbb{N}$ .

- Preuve **par contre-exemple** : pour montrer qu'une assertion du type  $\forall x, \mathbf{A}(x)$  est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple, *i.e.* mettre en évidence un  $x$  particulier pour lequel  $\mathbf{A}(x)$  est fausse.

**Exemple :** l'assertion  $\mathbf{A}(x)$  :  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \geq 1/2$  est fausse car elle est mise en défaut pour  $x = \pi/2$ .

## 1.4 Les Ensembles

### 1.4.1 Généralités

Intuitivement, un ensemble  $E$  est une collection d'objets mathématiques muni d'une relation d'appartenance notée  $\in$  :  $x \in E$  signifie que  $x$  appartient à l'ensemble  $E$ , ou encore que  $x$  est un élément de  $E$ .

**Remarque :** l'assertion non ( $x \in E$ ) s'écrit aussi  $x \notin E$ .

**Vocabulaire :**

- égalité entre éléments d'un ensemble :  $a = b$  signifie que  $a$  et  $b$  sont « un même objet »,
- égalité de deux ensembles :  $E = F$  signifie que ces ensembles ont les mêmes éléments,
- singleton : c'est un ensemble  $\{a\}$  à un seul élément,
- ensemble vide : c'est l'ensemble noté  $\emptyset$  ne contenant aucun élément (par exemple l'ensemble des solutions de l'équation  $x^2 = -1$  dans  $\mathbb{R}$ ).

### 1.4.2 Relations et opérations entre les ensembles

- **Inclusion :**  $A \subset B$  si tout élément de  $A$  est un élément de  $B$ .

i.e.  $\forall x \in A, x \in B$ .

Ou encore  $A$  est une partie de  $B$ .

**Méthode :** Pour prouver que  $A \subset B$ , on prend un élément quelconque de  $A$  et on démontre qu'il appartient à  $B$ .

Pour prouver l'égalité de deux ensembles  $A = B$ , on doit montrer  $A \subset B$  et  $B \subset A$ .

- **Ensemble des parties d'un ensemble :**  $\mathcal{P}(E)$  est l'ensemble des parties de  $E$ . Bien noter que :

$$X \in \mathcal{P}(E) \iff X \subset E$$

**Exemple :** soit  $E = \{a, b, c\}$ , alors :  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$ . On a  $\{b, c\} \in \mathcal{P}(E)$  et aussi  $\{b, c\} \subset E$  (les deux assertions sont équivalentes).

Dans l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  on définit les opérations suivantes :

- **Intersection :** soient  $A \subset E$  et  $B \subset E$ , l'intersection de  $A$  et  $B$  est le sous-ensemble de  $E$  :

$$A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Les éléments de  $A \cap B$  sont ceux qui sont à la fois dans  $A$  et dans  $B$ .

- **Réunion :** soient  $A \subset E$  et  $B \subset E$ , la réunion de  $A$  et  $B$  est le sous-ensemble de  $E$  :

$$A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Les éléments de  $A \cup B$  sont ceux qui sont dans  $A$  ou dans  $B$ . Il peuvent être de trois types : ceux qui sont dans  $A$  mais pas dans  $B$ , ceux qui sont dans  $B$  mais pas dans  $A$  mais aussi ceux qui sont à la fois dans  $A$  et dans  $B$ .

- **Complémentaire de  $B$  dans  $A$  :** soient  $A \subset E$  et  $B \subset E$ , le complémentaire de  $B$  dans  $A$  est le sous-ensemble de  $E$  :

$$A \setminus B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

C'est l'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont pas dans  $B$ .

Le complémentaire de  $B$  dans l'ensemble de référence  $E$  est le sous-ensemble de  $E$  défini par :

$$E \setminus B = \{ x \in E ; x \notin B \} \text{ et noté aussi } B^c$$

de sorte que l'on a  $A \setminus B = A \cap B^c$

- **Différence symétrique :** la différence symétrique de  $A$  et  $B$ , notée  $A \Delta B$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont soit dans  $A$  soit dans  $B$  mais pas dans les deux à la fois. Plus précisément :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

**Exemple :** dans la figure ci-dessous on a  $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ ,  $A = \{a, b, c, d, e\}$  et  $B = \{d, e, f, g\}$ . Alors :

$$A \cap B = \{d, e\}, \quad A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$A \setminus B = \{a, b, c\}, \quad B \setminus A = \{f, g\}, \quad A \Delta B = \{a, b, c, f, g\}$$

$$A^c = \{f, g, h, i, j, k\}, \quad B^c = \{a, b, c, h, i, j, k\}$$

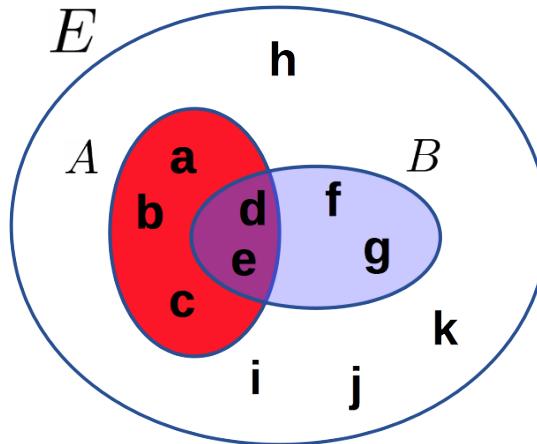


FIGURE 1.1 – Opérations ensemblistes

- **Produit cartésien :** Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles quelconques, le produit cartésien de  $A$  et  $B$  est l'ensemble (de couples) suivant :

$$A \times B = \{ (a, b) ; a \in A \text{ et } b \in B \}$$

Ce n'est pas une partie de  $E$  mais de  $E \times E$ .

**Exemple :**  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) ; x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \}$ .

**N. B. :**  $(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ et } b = d$ ,  $(a, b) \neq (c, d) \iff a \neq c \text{ ou } b \neq d$ .

### 1.4.3 Propriétés

#### Propriétés de l'intersection

- (a) Commutativité :  $A \cap B = B \cap A$
- (b) Associativité :  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- (c)  $E$  est élément neutre :  $A \cap E = E \cap A = A$

#### Propriétés de la réunion

- (a) Commutativité :  $A \cup B = B \cup A$
- (b) Associativité :  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- (c)  $\emptyset$  est élément neutre :  $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

#### Distributivité

- (a)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (b)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- (c)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (d)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

*Preuve* : on démontre a) à titre d'exemple.

On a une double inclusion à démontrer :

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ et } (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Soit  $x \in A \cup (B \cap C)$ ,

$x \in A$  ou  $x \in B \cap C$

$x \in A$  ou [ $x \in B$  et  $x \in C$ ]

Si  $x \in A$ , on a  $x \in A \cup B$  et  $x \in A \cup C$

donc  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Si  $x \in B \cap C$ , on a aussi  $x \in A \cup B$  et  $x \in A \cup C$

donc  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

La première inclusion est prouvée.

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$$

Soit  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,

$x \in A \cup B$  et  $x \in A \cup C$  donc

[ $x \in A$  ou  $x \in B$ ] et [ $x \in A$  ou  $x \in C$ ]

Donc ( $x \in A$ ) ou ( $x \in B$  et  $x \in C$ )

c'est-à-dire  $x \in A \cup (B \cap C)$

La seconde inclusion est prouvée. ■

#### Propriétés du complémentaire

- (a) Idempotence :  $(A^c)^c = A$
- (b) Formules de De Morgan :  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  et  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**Remarque 1.4.1.** Ces opérations d'intersection, réunion, complémentaire, sont en lien étroit avec, respectivement, les connecteurs logiques « et », « ou » et la négation : il suffit d'observer les définitions pour s'en convaincre. Les règles d'utilisation sont également en correspondance étroite.

**Exemple :**  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  correspond à  $\text{non}(\mathbf{P} \text{ ou } \mathbf{Q}) \iff (\text{non } \mathbf{P}) \text{ et } (\text{non } \mathbf{Q})$ .

## 1.5 Relations, fonctions, applications

Étant donnés deux ensembles quelconques  $E$  et  $F$  on peut avoir à définir des relations entre des éléments de  $E$  et des éléments de  $F$ .

**Exemple :** si  $E = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $F = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  représentent deux ensembles de personnes, on définit la relation  $\mathcal{R}$  qui associe à chaque individu de  $E$  la ou les personnes, dans  $F$ , auxquels il envoie un courrier. On peut en donner une représentation schématique, où le correspondant de  $x_1$  est  $p_1$  etc...  $x_2$ , en particulier, n'est écrit à personne.

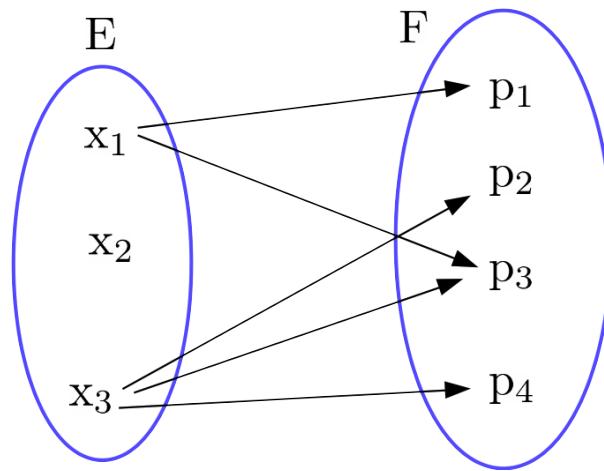


FIGURE 1.2 – Représentation schématique de la relation  $\mathcal{R}$

On peut aussi définir la relation sous la forme d'un ensemble de couples  $(x, p)$  où  $p$  reçoit un courrier de  $x$  (on écrit alors  $x\mathcal{R}p$ ). La relation entre les ensembles  $E$  et  $F$  équivaut ainsi à la donnée d'une partie  $\Gamma$  de  $E \times F$  qu'on appelle le graphe de la relation :

$$x\mathcal{R}p \iff (x, p) \in \Gamma.$$

Cette règle étant posée, toute l'information est donc obtenue par la donnée du triplet  $(E, F, \Gamma)$ .

Pour l'exemple précédent on obtient pour  $\Gamma$  la partie de  $E \times F$  formée des couples de couleur rouge :

| $E \backslash F$ | $p_1$        | $p_2$        | $p_3$        | $p_4$        |
|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $x_1$            | $(x_1, p_1)$ | $(x_1, p_2)$ | $(x_1, p_3)$ | $(x_1, p_4)$ |
| $x_2$            | $(x_2, p_1)$ | $(x_2, p_2)$ | $(x_2, p_3)$ | $(x_2, p_4)$ |
| $x_3$            | $(x_3, p_1)$ | $(x_3, p_2)$ | $(x_3, p_3)$ | $(x_3, p_4)$ |

FIGURE 1.3 – Le graphe de la relation  $\mathcal{R}$

$$\Gamma = \{(x_1, p_1), (x_1, p_3), (x_3, p_2), (x_3, p_3), (x_3, p_4)\}.$$

Les fonctions, telles que vous les connaissez déjà relèvent de ce cadre :  $y = f(x)$  est une autre façon d'écrire que  $x$  est mis en relation avec  $y$  par  $f$  et le couple  $(x, y)$ , élément du graphe, va pouvoir éventuellement être représenté par un point dans un repère (s'il s'agit de nombres réels). Toutefois, dans le cas des fonctions, il y a une contrainte essentielle : un élément donné  $x$  de l'ensemble de départ  $E$  ne peut être mis en relation qu'avec au plus un élément  $y$  de l'ensemble d'arrivée  $F$  et on dit que  $y$  est l'image de  $x$  par  $f$ . Ce n'est clairement pas le cas dans l'exemple précédent et on dit que le graphe

n'est pas *fonctionnel* : il faudrait qu'il y ait **au plus** un élément en rouge par ligne dans le tableau de la figure 1.3.

**Définition 1.5.1.** Une fonction  $f$  est un triplet  $(E, F, \Gamma)$  où  $E$  est un ensemble appelé *ensemble de départ*,  $F$  est un ensemble appelé *ensemble d'arrivée* et  $\Gamma \subset E \times F$  un graphe par lequel tout élément  $x$  de  $E$  est en relation avec au plus un élément  $y$  de  $F$  noté (s'il existe)  $f(x)$  et appelé *image* de  $x$  par  $f$  et  $x$  est un antécédent de  $y$  (rien n'interdit qu'il y en ait plusieurs).

**Remarque 1.5.1.** On introduit couramment une fonction sous la forme  $f : \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$  où il faut ensuite préciser ce que sont  $E$ ,  $F$  et  $f(x)$ . Il y a de nombreuses façons de définir  $f$  : par son graphe, par une formule ... par exemple  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$  sachant bien sûr que seuls les  $x \geq 0$  auront une image. La fonction  $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$  n'est pas la même que  $f$  car elle diffère par son **ensemble de départ** (il faut assumer le côté précis d'une définition).

**Exemple :** avec les ensembles déjà utilisés, voici la représentation schématique d'un exemple de fonction :

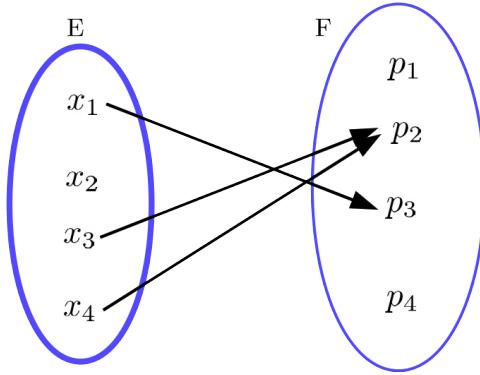


FIGURE 1.4 – Un exemple de fonction

On a par exemple  $p_2 = f(x_3)$  et  $x_2$  n'a pas d'image,  $p_2$  a deux antécédents  $x_3$  et  $x_4$ ,  $p_1$  et  $p_4$  n'ont pas d'antécédent,  $x_2$  n'a pas d'image.

**Définition 1.5.2** (ensemble de définition). Soit  $f = (E, F, \Gamma)$  une fonction. On appelle ensemble (ou domaine) de définition de  $f$  l'ensemble  $\mathcal{D}_f = \{x \in E ; \exists y \in F, y = f(x)\}$  i.e. l'ensemble des éléments de  $E$  qui ont une image par  $f$ .

**Exemples :** avec les fonctions introduites dans la remarque 1.5.1 on a  $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+$ .

**Définition 1.5.3** (composition des fonctions). Soient  $f : \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} F & \longrightarrow G \\ x & \mapsto g(x) \end{cases}$  des fonctions. La composée de  $f$  et  $g$  (dans cet ordre) est la fonction  $g \circ f : x \rightarrow (g \circ f)(x)$  définie par :  $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g[f(x)]$ . Son ensemble de définition est donné par :  $\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f ; f(x) \in \mathcal{D}_g\}$ .

**Commentaire :** le membre de droite de la relation de définition justifie que l'on écrive  $g \circ f$  plutôt que  $f \circ g$ , ce qu'on pourrait être tenté de faire dans la mesure où  $f$  « agit » en premier et  $g$  en second. On aura intérêt à mémoriser le petit diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & f & & g & & & \\
 x & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & y = f(x) & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & (g \circ f)(x) & \stackrel{def}{=} & g[(f(x))] = g(y) \\
 & \downarrow & & & \uparrow & & \\
 & & g \circ f & & & &
 \end{array}$$

FIGURE 1.5 – *Composition de deux fonctions*

**Exemple 1 :**

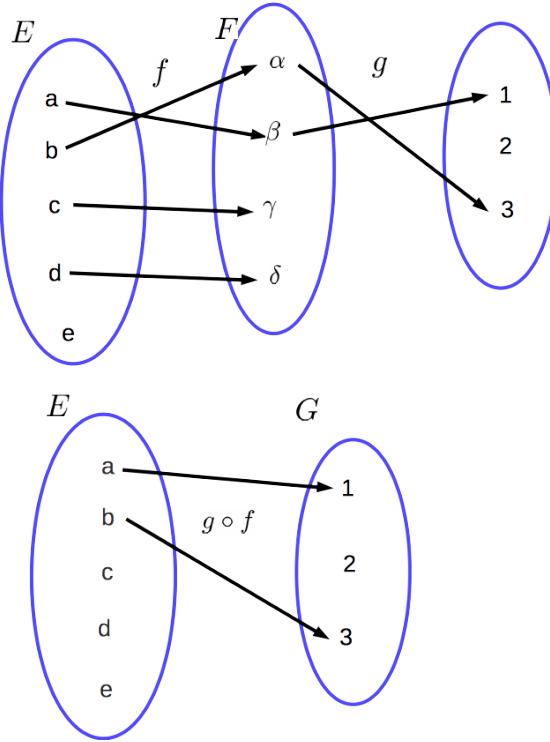


FIGURE 1.6 – Un exemple de composée de fonctions

**Exemple 2 :** on considère les fonctions  $f : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \cos x \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln x \end{cases}$ . Alors  $g \circ f$  est la fonction :  $\begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(\cos x) \end{cases}$ .

On a  $\mathcal{D}_f = [0, \pi]$ ,  $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$  et  $\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in [0, \pi] ; \cos x > 0\} = [0, \pi/2[$ .

Que donnerait  $f \circ g$  ?

**Réponse :**  $f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(\ln x) \end{cases}$  dont le domaine est  $\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x > 0 ; \ln x \in [0, \pi]\} = [1, e^\pi]$ . Alors :  $\forall x \in \mathcal{D}_{f \circ g}, (f \circ g)(x) = \cos(\ln x)$ .

**Remarque 1.5.2.** Il n'est pas intéressant de prendre  $\mathbb{R}$  comme ensemble de départ pour la fonction  $g$  alors qu'il est connu que  $\ln x$  n'est défini que pour  $x > 0$ . Prendre l'ensemble de définition comme ensemble de départ conduit à la notion d'application :

**Définition 1.5.4** (applications). Une fonction  $f = (E, F, \Gamma)$  est une application si son ensemble de définition est l'ensemble de départ :  $\mathcal{D}_f = E$ .

**Exemples :** dans l'exemple 2 ci-dessus,  $f$  est une application,  $g$  n'est pas une application.

**Définition 1.5.5** (applications injectives). Une application  $f = (E, F, \Gamma)$  est dite injective (on dit aussi que c'est une injection) si deux éléments distincts dans  $E$  ont des images distinctes dans  $F$ .

**Exemples :** l'application  $\ln : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln x \end{cases}$  est injective.

Par contre la fonction  $h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$  ne l'est pas car (contre-exemple) on a  $h(-1) = h(1) = 1$ .

**Définition 1.5.6** (applications surjectives). Une application  $f = (E, F, \Gamma)$  est dite surjective (on dit aussi que c'est une surjection) si tout élément de  $F$  a au moins un antécédent dans  $E$ .

**Exemples** : l'application  $h : x \rightarrow x^2$  n'est pas surjective car  $-1$ , par exemple, n'a pas d'antécédent. Par contre la fonction  $k : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$  est surjective.

**Définition 1.5.7** (applications bijectives). Une application  $f = (E, F, \Gamma)$  est bijective (on dit aussi que c'est une bijection) si elle est à la fois injective et surjective.

On définit alors la bijection réciproque de  $f$ , notée  $f^{-1}$  par :

$$\forall (a, b) \in E \times F, \quad f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

Voir la figure 1.7 pour un exemple ( $f_4$  et  $f_4^{-1}$ ).

**Exemples** : les applications  $\ell : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$  et  $m : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$  sont bijectives. L'application  $k$  ne l'est pas. Voici quelques exemples sous forme de diagrammes :

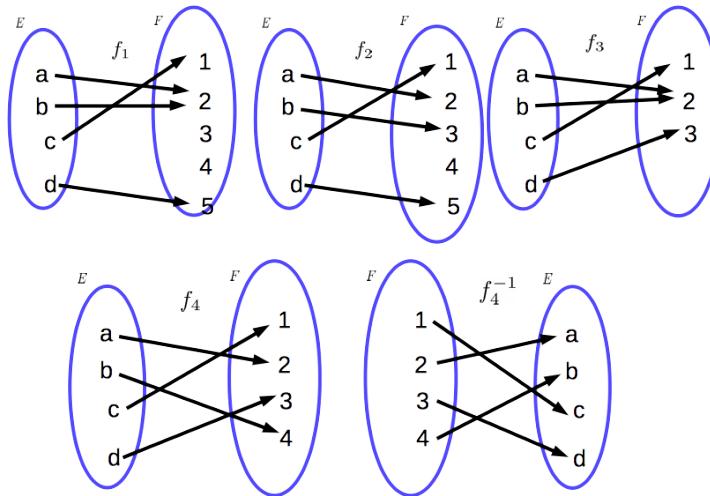


FIGURE 1.7 – Injections, surjections, bijections

L'application  $f_1$  est ni injective ni surjective,  $f_2$  est injective mais non surjective,  $f_3$  est surjective mais non injective, enfin  $f_4$  est bijective (on remarquera que les ensembles finis  $E$  et  $F$  ont alors le même nombre d'éléments).

On retiendra les critères pratiques suivants :

**Proposition 1.5.1.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Alors :

1.  $f$  est injective si et seulement si pour tout  $y \in F$  l'équation  $f(x) = y$ , d'inconnue  $x$ , admet au plus une solution dans  $E$  (i.e. aucune ou bien une seule).
2.  $f$  est surjective si et seulement si pour tout  $y \in F$  l'équation  $f(x) = y$ , d'inconnue  $x$ , admet au moins une solution dans  $E$ .
3.  $f$  est bijective si et seulement si pour tout  $y \in F$  l'équation  $f(x) = y$ , d'inconnue  $x$ , admet une solution et une seule dans  $E$ .

### Image directe et image réciproque d'une partie d'un ensemble par une fonction :

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction. Si  $A \in \mathcal{P}(E)$  on pose, avec un abus d'écriture usuel,

$$f(A) = \{y \in F; \exists x \in A, y = f(x)\}$$

On a  $f(A) \in \mathcal{P}(F)$  et on définit ainsi une application « image directe » de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(F)$  notée encore  $f$  par un abus de notation usuel.

On définit également (même si  $f : E \rightarrow F$  n'est pas bijective !) une application « image réciproque » notée (abusivement, une fois de plus)  $f^{-1}$  :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B \mapsto f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E; f(x) \in B\} \end{cases}$$

On pourra, pour comprendre ces définitions, s'aider du diagramme suivant :

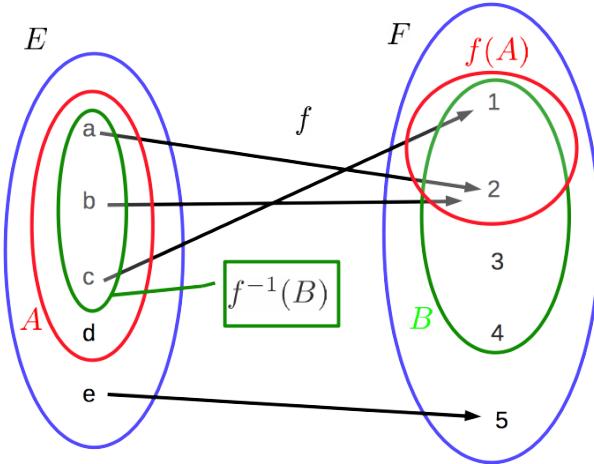


FIGURE 1.8 – Image et image réciproque d'une partie

On a enfin les propriétés suivantes, toutes très simples à établir :

- ★  $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$ , égalité quand  $f$  est surjective.
- ★ Si  $f$  est une application,  $\forall A \in \mathcal{P}(E) f^{-1}(f(A)) \supset A$ , égalité quand  $f$  est injective.
- ★  $\forall B, B' \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ .
- ★  $\forall B, B' \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ .
- ★ Si  $f$  est une application alors  $\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ .

## Chapitre 2

# Nombres entiers, nombres rationnels et nombres réels

Ce chapitre consiste essentiellement en rappels, sauf le paragraphe 2.4.4 consacré aux notions nouvelles et très importantes de borne supérieure et de borne inférieure.

Les ensembles de nombres (entiers, rationnels, réels) ont été introduits et utilisés dans les classes de lycée. Nous faisons un tour d'horizon avec quelques rappels.

### 2.1 Entiers naturels

Cet ensemble est noté  $\mathbb{N}$ . Sa construction mathématique est hors programme.

On rappelle que  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

$p$  et  $q$  étant deux entiers tels que  $p \leq q$ , on note  $\llbracket p, q \rrbracket$  l'ensemble des entiers compris entre  $p$  et  $q$ , bornes comprises :

$$\llbracket p, q \rrbracket = \{n \in \mathbb{N} ; p \leq n \leq q\}$$

Exemple :  $\llbracket 2, 7 \rrbracket = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

- **Division euclidienne**

Il s'agit du résultat suivant, connu depuis la classe de CM1 (mais non formalisé à ce niveau !) :

**Proposition 2.1.1.** Pour tout couple  $(a, b)$  d'entiers naturels tel que  $b \neq 0$  il existe un unique couple  $(q, r)$  d'entiers tel que  $a = bq + r$  et  $r < b$ .

$q$  et  $r$  sont respectivement appelés quotient et reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ . Si  $r = 0$  on a  $a = bq$  : on dit que  $b$  divise  $a$  ou que  $a$  est un multiple de  $b$  et on écrit  $b|a$ .

**L'unicité du couple  $(q, r)$  est assuré par la contrainte  $r < b$  : il ne faut donc pas oublier celle-ci dans l'énoncé.**

- **Décomposition en produit de nombres premiers**

On rappelle qu'un entier est premier si ses seuls diviseurs sont lui-même et 1. Tout entier naturel  $n \geq 2$  possède au moins un diviseur premier et on a le résultat de décomposition suivant :

**Proposition 2.1.2.** Soit  $n$  un entier naturel,  $n \geq 2$ . Il existe une unique suite finie de nombres premiers  $p_1 < \dots < p_k$  et une unique suite finie d'entiers non nuls  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tels que  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ .

Exemple :  $87318 = 2 \times 3^4 \times 7^2 \times 11$ .

On a  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 7$ ,  $p_4 = 11$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 4$ ,  $\alpha_3 = 2$  et  $\alpha_4 = 1$ .

Il faut utiliser ce résultat (avec des sous-calculs effectués éventuellement) pour simplifier les fractions : il n'est pas admissible de laisser le résultat final d'un calcul sous la forme  $\frac{12}{3}$  ou  $\frac{2}{4} \dots$

### • Principe de démonstration par récurrence

On cherche à prouver une assertion de la forme  $(\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(n))$  où  $\mathbf{P}(n)$  est une proposition qui dépend de l'entier  $n$ , autrement dit que tous les entiers vérifient la propriété  $\mathbf{P}$ .

On montre que :

$$\begin{cases} \mathbf{P}(0) \text{ est vraie (initialisation)} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) (\mathbf{P}(n) \implies \mathbf{P}(n+1)) \text{ (héritage)} \end{cases}$$

On conclut :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(n)$  est vraie.

**Commentaires** : «  $\mathbf{P}(0)$  vraie » est la partie la plus facile car il s'agit en général d'une simple vérification, mais elle est indispensable.

La deuxième étape peut être source d'erreur. Il faut la comprendre ainsi : « si la propriété est vraie pour un entier  $n$  alors elle est vraie pour l'entier suivant », le  $(\forall n \in \mathbb{N})$  étant là pour signifier que cette propriété de transmission (et non pas la propriété elle-même) doit être vraie pour tous les entiers. On ne prend nullement comme hypothèse que  $\mathbf{P}(n)$  est vraie pour tout  $n$ , il n'y aurait alors plus rien à prouver !

On pourra penser à l'analogie d'une course de relai : pour que le témoin passe par toute les mains, il faut deux conditions

- le premier coureur doit partir avec le témoin dans la main,
- tout coureur qui a son témoin en main doit le transmettre au suivant, faute de quoi il y a élimination.

**Exemple** : il s'agit de montrer que la propriété :

$$\mathbf{P}(n) : 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

est vraie pour tout entier  $n$ .

i)  $\mathbf{P}(0) : 0 = \frac{0(0+1)(2 \times 0+1)}{6}$ , donc  $\mathbf{P}(0)$  est vraie,

ii) **Hypothèse de récurrence** :  $\mathbf{P}(n)$  est vraie pour un certain entier  $n$ .

On doit montrer alors que  $\mathbf{P}(n+1)$  est vraie ( $\mathbf{P}(n+1)$  est obtenue en remplaçant  $n$  par  $n+1$  dans l'égalité)

$$\underbrace{0 + 1 + 2^2 + \dots + n^2}_{\text{hypothèse de récurrence}} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \implies (0 + 1 + 2^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)}{6}[2n^2 + n + 6n + 6] = \frac{(n+1)}{6}(n+2)(2(n+1)+1)$$

Donc  $\mathbf{P}(n+1)$  est vraie.

En conclusion on a montré que  $\mathbf{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n$ .

## 2.2 Entiers relatifs, nombres rationnels

**Notations** :

$\mathbb{Z}$  : entiers relatifs,  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Q}$  : rationnels,  $r = \frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$

$\mathbb{Q}^+ = \{ r \in \mathbb{Q}, r \geq 0 \}$ ,  $\mathbb{Q}^- = \{ r \in \mathbb{Q}, r \leq 0 \}$ .

- **Division euclidienne dans  $\mathbb{Z}$  :**

Le résultat énoncé dans  $\mathbb{N}$  s'étend ainsi :

**Proposition 2.2.1.** Pour tout couple  $(a, b)$  d'entiers relatifs tel que  $b \neq 0$  il existe un unique couple  $(q, r)$  d'entiers relatifs tel que  $a = bq + r$  et  $0 \leq r < |b|$ .

## 2.3 Symboles somme et produit, formule du binôme

- **Symbole factorielle.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

C'est le produit des  $n$  premiers entiers non nuls. On pose  $0! = 1$ , par convention.

**Exemple :**  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

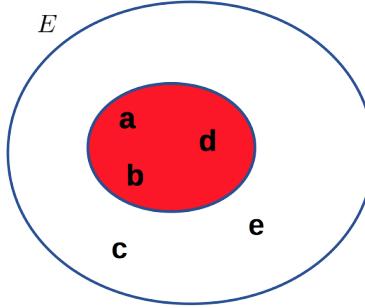
On a la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n + 1)! = (n + 1) n!$$

- **Combinaisons de  $p$  éléments parmi  $n$  :**

**Définition 2.3.1.** On appelle combinaison de  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments toute partie à  $p$  éléments de cet ensemble. Le nombre de ces combinaisons est noté  $\binom{n}{p}$ .

**Exemple :** on veut choisir un groupe de 3 étudiants parmi 5



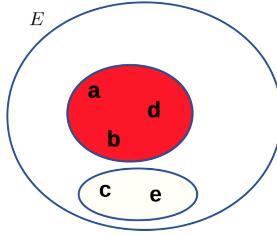
Il y a  $5 \times 4 \times 3$  façons de les désigner l'un(e) après l'autre, donc avec un ordre. Par exemple  $(a, d, b)$ . L'ordre ne doit pas intervenir, or on remarque qu'il y a  $3 \times 2 = 6 = 3!$  façons de les ordonner. Dans l'exemple précédent :

$$(a, b, d), (a, d, b), (b, a, d), (b, d, a), (d, a, b), (d, b, a)$$

On conclut donc que le nombre de groupes est en fait  $\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ .

On remarque que cela peut s'écrire  $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1)(2 \times 1)} = \frac{5!}{3! 2!}$  : ceci est noté  $\binom{5}{3}$ .

**Remarque 2.3.1.** C'est aussi le nombre de façons de choisir 2 étudiants parmi 5 : ceux qu'on écarte.



Plus généralement, le nombre de combinaisons de  $p$  éléments parmi  $n$  est :

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1} : p \text{ facteurs au numérateur et au dénominateur} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \times (\textcolor{red}{n-p}) \times (\textcolor{red}{n-p-1}) \times \cdots \times 2 \times 1}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times (\textcolor{red}{n-p}) \times (\textcolor{red}{n-p-1}) \times \cdots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{p! (n-p)!} \end{aligned}$$

**Quelques cas particuliers et propriétés :**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (2.1)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}} \quad (2.2)$$

(2.3)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}} \quad (2.4)$$

### Prouvons cette dernière propriété

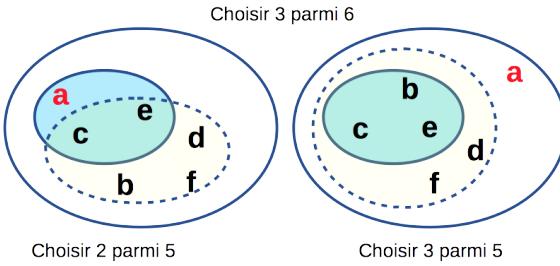
Dans un ensemble  $E$  à  $n$  éléments on doit choisir  $p$  éléments. On commence par en isoler un quelconque que l'on note **a**.

Parmi les parties à  $p$  éléments il y a :

1. celles qui contiennent **a**. On les obtient en adjoignant à **a**  $p-1$  éléments parmi les  $n-1$  restants :  $\binom{n-1}{p-1}$  possibilités,
2. celles qui ne contiennent pas **a**. On les obtient en choisissant  $p$  éléments parmi les  $n-1$  restants :  $\binom{n-1}{p}$  possibilités.

Il reste à faire la somme car les deux cas s'excluent mutuellement. C'est  $\binom{n}{p}$  par définition.

**Exemple :**  $n = 6$ ,  $p = 3$ .



- Triangle de Pascal : il est construit à partir de la propriété 2.4

La propriété de symétrie observée dans chaque ligne correspond à la propriété 2.2.

- Symboles somme  $\Sigma$  (Sigma) et produit  $\Pi$  (Pi) :

$$\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n, \quad \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$\sum_{k=2}^8 k^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64.$$

- Formule du binôme :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

*Preuve* : par récurrence sur  $n$ , en utilisant les propriétés 2.2 et 2.4.

**Remarque :** on a aussi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Les coefficients se lisent sur la  $n$ -ième ligne du triangle de Pascal.

**Exemple :**  $(a + b)^5 \equiv a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a b^4 + b^5$

que l'on peut aussi écrire dans l'ordre inverse.

## 2.4 Nombres réels

### 2.4.1 Opérations

$\mathbb{R}$  est muni de deux opérations, la somme et le produit, qui doivent être vues comme des applications :

$$+ : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x + y \end{cases} \text{ et } \times : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto xy \text{ (ou } x.y \text{ ou } x \times y\text{)} \end{cases} .$$

Nous listons ci dessous leurs propriétés et le vocabulaire associé :

#### Propriétés de la somme :

- Commutativité :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x$
- Associativité :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x + y) + z = x + (y + z)$
- 0 est élément neutre :  $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$
- Tout élément est symétrisable :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R}, x + y = y + x = 0$ .

On note  $y$  sous la forme  $-x$  et la notation  $a - b$  représente  $a + (-b)$  (soustraction).

On résume ces propriétés en disant que  $(\mathbb{R}, +)$  est un groupe commutatif.

#### Propriétés du produit :

- Commutativité :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = yx$
- Associativité :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (xy)z = x(yz)$
- 1 est élément neutre :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- Tout élément non nul est inversible :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists ! y \in \mathbb{R}^*, xy = yx = 1$ .

Ces propriétés font que  $(\mathbb{R}^*, \times)$  est un *groupe commutatif*.

On note  $y$  sous la forme  $\frac{1}{x}$  et la notation  $\frac{a}{b}$  représente  $a \times \frac{1}{b}$  : on a ainsi  $\frac{x}{x} = 1$  (avec  $x \neq 0$ ).

- Distributivité sur la somme :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x(y + z) = xy + xz$

On dit finalement que  $(\mathbb{R}, +, \times)$  a une structure de corps commutatif.

**Remarque 2.4.1.** On retrouve avec ces seules règles d'autres propriétés usuelles, par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0.x = 0$$

en effet on a  $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x$  et il suffit alors de soustraire  $0.x$  à chaque membre.

Il en va de même (= exercice) des règles suivantes (on omet les quantificateurs et on suppose tous les dénominateurs non nuls) :

- $-(ab) = (-a)b = a(-b), \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \frac{1}{b},$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ , en particulier  $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$  pour  $k \in \mathbb{R}^*$ ,
- $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a},$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$

**Exposants** : on pose,  $x^1 = x$  et, pour  $x \neq 0$ ,  $x^0 = 1$ .

La relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} = x \cdot x^n$  permet de définir  $x^n$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout entier naturel  $n$ . La propriété d'associativité du produit permet alors d'obtenir les propriétés (avec  $n$  et  $p$  dans  $\mathbb{N}$ ) :

$$x^{np} = (x^n)^p = (x^p)^n, \quad x^{n+p} = x^n \cdot x^p$$

et la convention  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$  permet d'étendre la notion d'exposant aux exposants entiers relatifs avec les mêmes règles de calcul.

### Remarque 2.4.2.

Dans  $\mathbb{N}$ , l'équation  $x + 1 = 0$  (par exemple) n'a pas de solution, c'est à dire que 1 n'est pas symétrisable dans  $\mathbb{N}$ , ainsi d'ailleurs que tous les entiers naturels non nuls. Ceci est à la base de la construction de l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs :  $-1$  est alors la solution.

Dans  $\mathbb{Z}$ , l'entier non nul  $a$  étant donné, l'équation  $xa = 1$  n'a pas de solution, sauf pour  $a \in \{-1, 1\}$  : ce problème est résolu par la construction de l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. On notera que  $(\mathbb{Q}, +, \times)$  a les mêmes propriétés calculatoires que  $(\mathbb{R}, +, \times)$  : c'est aussi un corps commutatif.

Dans  $\mathbb{Q}$ , l'équation  $x^2 = 2$  n'a pas de solution. Il y a aussi d'autres défauts, liés essentiellement à la notion de borne supérieure (voir le paragraphe 2.4.4 ci-dessous) qui rendent nécessaire la construction de l'ensemble (beaucoup) plus vaste des nombres réels.

### 2.4.2 Relation d'ordre et règles de base

Sur  $\mathbb{R}$ , il existe une relation d'ordre  $\leq$  qui permet de comparer les réels entre eux :

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[.$$

La terminologie « relation d'ordre » est liée aux propriétés suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$  (réflexivité),
2.  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$  (transitivité),
3.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y$  (antisymétrie).

Si  $x$  et  $y$  sont des réels, alors on a nécessairement  $x \leq y$  ou  $y \leq x$  : on dit que la relation d'ordre  $\leq$  est totale.

**Attention** : la relation «  $<$  » définie par :  $x < y \iff x \leq y \text{ et } x \neq y$  n'est pas une relation d'ordre (pourquoi ?).

#### Relation d'ordre et opérations :

- On peut ajouter ou soustraire un même réel aux deux membres d'une inégalité :

$$x \leq y \implies x + a \leq y + a$$

- On peut multiplier par un même réel **positif** les deux membres d'une inégalité :

$$\begin{cases} x \leq y \\ a \geq 0 \end{cases} \implies ax \leq ay$$

On dit que la relation d'ordre «  $\leq$  » est compatible avec les opérations  $+$  et  $\times$ .

- Si on multiplie par un même réel **négatif** les deux membres d'une inégalité, **cela change le sens des inégalités** :

$$\begin{cases} x \leq y \\ a \leq 0 \end{cases} \implies ax \geq ay$$

- On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens :

$$\begin{cases} x \leq y \\ a \leq b \end{cases} \implies x + a \leq y + b$$

**Attention :** on ne peut pas les soustraire membre à membre.

**Exemple :**

$$\begin{cases} x \leq y \\ a \leq -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq y \\ 1 \leq -a \end{cases} \text{ d'où } x + 1 \leq y - a$$

par contre on a pas  $x - a \leq y + 1$ .

- On peut multiplier membre à membre des inégalités de même sens **si tout les membres sont positifs** :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq a \leq b \end{cases} \implies ax \leq by$$

- **Inverse et division :**

$$0 < x \leq y \iff 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$$

D'où :  $\begin{cases} 0 < a \leq b \\ 0 < x \leq y \end{cases} \implies \frac{a}{y} \leq \frac{b}{x}$  en utilisant le produit membre à membre.

En fait, il faut toujours voir la division comme une multiplication par l'inverse ( $\frac{a}{x} = a \cdot \frac{1}{x}$ ).

### 2.4.3 Valeur absolue

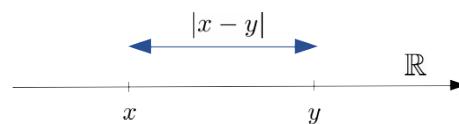
**Définition 2.4.1.** La valeur absolue d'un nombre réel  $x$  est le réel positif noté  $|x|$  tel que :

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Propriétés :**

- $|-x| = |x|$ ,
- $|xy| = |x||y|$ ,
- **Inégalités triangulaires** :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x - y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

**Remarque :**  $|x - y|$  mesure la distance entre  $x$  et  $y$  sur l'axe réel :



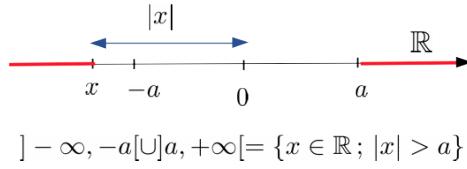
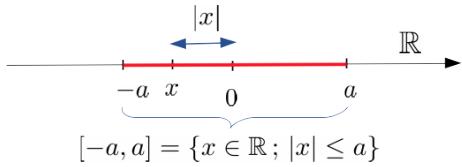
Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $a \geq 0$ . Alors on a :

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

la distance entre  $x$  et 0 est inférieure à  $a$

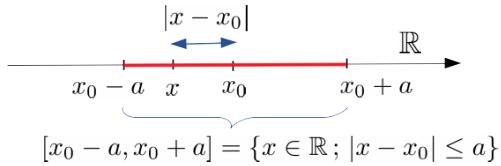
$$|x| > a \iff x < -a \text{ ou } x > a$$

la distance entre  $x$  et 0 est strictement supérieure à  $a$



**Remarque :** soient  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et  $a \geq 0$ , alors :

$$\begin{aligned} |x - x_0| \leq a &\iff -a \leq x - x_0 \leq a \\ &\iff x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \end{aligned}$$



#### 2.4.4 Majorants, minorants, borne supérieure et borne inférieure

Dans tout ce paragraphe,  $A$  désigne une partie (*i.e.* un sous-ensemble) de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 2.4.2** (Majorant, minorant).

On appelle majorant de  $A$  tout réel  $M$  tel que :  $\forall x \in A, x \leq M$ .

On appelle minorant de  $A$  tout réel  $m$  tel que :  $\forall x \in A, x \geq m$ .

**Attention :** ces éléments n'existent pas toujours ... S'il existe un majorant (resp. un minorant) on dit que  $A$  est majorée (resp. minorée).

Un ensemble de réels à la fois majoré et minoré est dit **borné**. On retiendra que :

**Proposition 2.4.1.**  $A$  est borné si et seulement si il existe un réel  $M$  tel que :  $\forall x \in A, |x| \leq M$ .

**Preuve :** en exercice.

**Exemples :**

- $A = \mathbb{N}$  : 0 est un minorant, -10 en est un autre, il n'y a pas de majorant.
- $A = ]0, 1[$  : -2 est un minorant, 1 est un majorant,  $\pi$  en est un autre.

**Plus grand élément, plus petit élément :** s'il existe un majorant  $M$  de  $A$  qui est élément de  $A$ , alors il est unique. On l'appelle *le plus grand élément de  $A$* . On écrit  $M = \max(A)$ .

De même, si un réel  $m$  est un minorant de  $A$  et est élément de  $A$ , on l'appelle *le plus petit élément de  $A$* . On écrit  $M = \min(A)$ .

L'unicité est très simple à obtenir : si  $M$  et  $M'$  sont des majorants de  $A$  et sont dans  $A$ , on a à la fois  $M \leq M'$  ( $M \in A$  et  $M'$  majorant) et  $M' \leq M$  ( $M' \in A$  et  $M$  majorant), donc  $M = M'$ .

Ces éléments n'existent pas toujours non plus ...

**Exemples :**

- $A = \mathbb{N}$  : 0 est le plus petit élément, il n'y a pas de plus grand élément.
- $A = ]0, 1[$  : ni plus petit ni plus grand élément.
- $A = ]0, 1]$  : pas de plus petit élément, 1 est le plus grand élément.  $\max(A) = 1$ .
- **Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément** (admis mais intuitif).
- **Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{N}$  admet un plus grand élément** (idem).
- Toute partie non vide et minorée de  $\mathbb{Z}$  admet un plus petit élément (idem).
- Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{Z}$  admet un plus grand élément (idem).

**Application : partie entière d'un réel.** Etant donné un réel  $x$ , l'ensemble non vide des entiers relatifs  $n$  tels que  $n \leq x$  est majoré (par  $x$ ), il admet donc un plus grand élément qu'on appelle sa partie entière notée  $\lfloor x \rfloor$  (ou  $[x]$  ou encore  $E(x)$ ) :

**Définition 2.4.3.** La partie entière d'un réel  $x$  est l'unique entier  $\lfloor x \rfloor$  vérifiant  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ .

**Exemples :**  $\lfloor 2 \rfloor = 2$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$  (attention : ce n'est pas  $-2$ ).

**Remarque 2.4.3.** Si  $a$  est un entier relatif et  $b$  un entier naturel non nul, alors le quotient  $q$  de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  n'est autre que la partie entière du rationnel  $\frac{a}{b}$ . On a en effet (voir la proposition 2.2.1)  $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$  et  $0 \leq \frac{r}{b} < 1$  ( $r$  est le reste).

**Notions de borne supérieure et de borne inférieure :**

Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ . On admettra que l'ensemble des majorants de  $A$  possède un plus petit élément  $S$  : on l'appelle la borne supérieure de  $A$  (= « plus petit de tous les majorants de  $A$  »).

$S$  est donc unique et caractérisé par :

1.  $S$  est un majorant de  $A$ ,
  2. si  $M$  est un majorant quelconque de  $A$  alors  $M \geq S$ .

On écrit  $S = \sup A$ .

De même, si  $A$  est non vide et minorée, l'ensemble des minorants possède un plus grand élément  $s$  qu'on appelle borne inférieure de  $A$  et qu'on note  $s = \inf A$  (= « plus grand de tous les minorants de  $A$  ») :

1.  $s$  est un minorant de  $A$ ,
2. si  $m$  est un minorant quelconque de  $A$  alors  $m \leq s$ .

**Exemples :**

- $A = \mathbb{N}$  : 0 est le plus petit élément et la borne inférieure. Pas de borne supérieure.
- $A = ]0, 1[$  :  $\inf A = 0$ ,  $\sup A = 1$ .
- $A = ]0, 1]$  :  $\inf A = 0$ ,  $\sup A = 1$ .

**Remarque 2.4.4.** Si  $A$  possède un plus grand élément, c'est aussi la borne supérieure mais la réciproque est fausse : voir les exemples ci-dessus. Il faut donc bien faire la différence entre  $\max(A)$  et  $\sup(A)$ , en particulier :

$$M = \max(A) \iff M = \sup(A) \text{ et } M \in A$$

Remarque analogue pour la borne inférieure et le plus petit élément.

Si  $A$  est non vide et borné, si  $s = \inf A$  et  $S = \sup A$ , on a :  $\forall x \in A, s \leq x \leq S$  et ceci est le plus précis des encadrements communs à tous les éléments de  $A$  à l'aide d'inégalités larges.

La caractérisation de la borne supérieure (resp. inférieure) donnée ci-dessus admet une formulation n'utilisant pas le langage courant et beaucoup plus efficace dans les raisonnements mathématiques. Il faut la connaître et apprendre à l'utiliser. **Une lecture attentive de la preuve devrait éclairer cette formulation :**

**Proposition 2.4.2.** *Soient  $A$  un ensemble non vide,  $s$  et  $S$  des réels. Alors :*

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leq S, \\ \forall \varepsilon > 0, \quad A \cap ]S - \varepsilon, S] \neq \emptyset \\ \text{ou encore : } \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad S - \varepsilon < x \leq S. \end{cases}$$

$$s = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \geq s, \\ \forall \varepsilon > 0, \quad A \cap [s, s + \varepsilon[ \neq \emptyset. \end{cases}$$

**Preuve :** nous allons traiter seulement le cas de la borne supérieure. L'autre cas est analogue. On va voir que les deux propriétés demandées correspondent, dans le même ordre, aux propriétés 1. et 2. de la caractérisation donnée plus haut.

**Remarque :** on va être amené à faire deux raisonnements par l'absurde (cf. chapitre 1).

**Condition nécessaire (sens «  $\implies$  ») :** on suppose que  $S$  est la borne supérieure de  $A$ . C'est donc un majorant et on a bien ( $\forall x \in A, \quad x \leq S$ ).

Soit maintenant  $\varepsilon$  un réel strictement positif (cette façon d'écrire sous-entend qu'il est quelconque - NDLR) et supposons que l'ensemble  $A \cap ]S - \varepsilon, S]$  soit vide : alors il est clair (on l'espère !) que  $S - \varepsilon$  est un majorant de  $A$  (personne pour le dépasser), ce qui contredit le fait que  $S$  soit le plus petit majorant (on a  $S - \varepsilon < S$ ). On a donc nécessairement :  $\forall \varepsilon > 0, \quad A \cap ]S - \varepsilon, S] \neq \emptyset$ .

**Condition suffisante (sens «  $\impliedby$  ») :** on suppose maintenant que les deux conditions écrites après l'accolade sont satisfaites et il s'agit de montrer que  $S = \sup A$ .

La première est la formulation mathématique de «  $S$  est un majorant de  $A$  ».

Soit  $S'$  un autre majorant : on doit prouver que  $S' \geq S$  car ceci montrera que  $S$  est le plus petit des majorants.

Supposons au contraire que  $S' < S$  : on peut écrire  $S' = S - \varepsilon$  avec  $\varepsilon = S - S' > 0$  et on sait qu'alors, par hypothèse,  $A \cap ]S - \varepsilon, S] \neq \emptyset$ . Soit  $a$  un élément de cet ensemble : il vérifie  $a \in A$  et  $S' < a \leq S$  de sorte que  $S'$  n'est pas un majorant. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse et on a donc  $S' \geq S$ , ce qu'on voulait. ■



# Chapitre 3

## Polynômes

Ce chapitre a pour seul objectif de préciser certaines des propriétés des polynômes qui seront utilisées dans ce cours, à savoir essentiellement la factorisation des polynômes à coefficients réels et la division euclidienne. Il ne sera pas fait ici de théorie approfondie comme vous pouvez en trouver dans les manuels : ce sera l'objet de cours ultérieurs.

On ne considère ici que les polynômes à coefficients réels mais tout s'étend immédiatement aux polynômes à coefficients complexes, excepté la liste des polynômes irréductibles sur lesquels on reviendra dans le chapitre sur les nombres complexes.

### 3.1 Introduction

Les polynômes sont des objets mathématiques qui vous sont familiers et que vous manipulez couramment (somme, produit, produit par un réel). On dit que  $A = 2 - 3X + X^3$ , par exemple, est un polynôme en une *indéterminée*  $X$  (que l'on peut noter aussi  $A(X)$ ) : mais quel est au juste le statut mathématique de ce «  $X$  » (qui n'est pas une variable ...) ?

Considérons deux polynômes  $A = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$  et  $B = b_0 + b_1X + b_2X^2$  où on suppose  $a_3 \neq 0$  et  $b_2 \neq 0$  : on dit que  $A$  est de degré 3 et  $B$  de degré 2.

Étant convenu d'ordonner les polynômes suivant les puissances croissantes de  $X$ ,  $A$  est déterminé sans ambiguïté par la donnée de la liste de ses coefficients  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  et  $B$  par  $(b_0, b_1, b_2)$ .

La somme  $A + B$  correspond alors à la liste  $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$  en posant  $b_3 = 0$ .

Le produit  $AB$  va fournir un polynôme de degré 5 qui commence par  $a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + \dots$ . Plus généralement on trouve facilement que le coefficient de  $X^p$ , avec  $0 \leq p \leq 5$ ,

$$\text{est } c_p = \sum_{k=0}^p a_k b_{p-k}.$$

Le produit  $kA$ , où  $k$  est un réel, correspond à  $(ka_0, ka_1, ka_2, ka_3)$ .

Il en résulte que les règles de calcul sur les polynômes sont en fait des règles de calcul sur les objets mathématiques que sont les suites de réels nuls à partir d'un certain rang (les coefficients des monômes qui ne figurent pas sont nuls. En pratique, bien sûr, on ne les écrit pas).

La théorie des polynômes à coefficients réels (ou autres) considère en fait l'ensemble de ces suites, au statut clair, muni de ces règles de calcul posées *a priori* comme des définitions. La lettre  $X$  désigne alors le polynôme associé à la suite  $(0, 1, 0, \dots)$ . Le produit  $XX$ , noté  $X^2$ , fournit la suite  $(0, 0, 1, 0, \dots)$  (vérification facile) et ainsi de suite. Ceci donne un sens à  $X$  et justifie l'écriture usuellement adoptée pour les polynômes. Enfin, l'égalité de deux polynômes équivaut à l'égalité des deux suites de coefficients qui les définissent.

Le degré d'un polynôme  $A$  défini par la suite nulle à partir d'un certain rang  $(a_0, a_1, \dots)$  est par définition le plus grand entier  $n$  tel que  $a_n \neq 0$  et est noté  $\deg(A)$ . On rappelle les règles suivantes :

$$\deg(A + B) \leq \max(\deg(A), \deg(B)), \quad \text{si } AB \neq 0, \quad \deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$$

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à une indéterminée  $X$  et à coefficients réels.

## 3.2 Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$

Le résultat suivant est à rapprocher de la division euclidienne dans  $\mathbb{Z}$ .

**Proposition 3.2.1.** Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes à coefficients réels avec  $B \neq 0$ . Il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes tels que  $A = BQ + R$  et  $\deg(R) < \deg(B)$ .  
 $Q$  et  $R$  s'appellent respectivement quotient et reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

**Preuve :** on prouve séparément l'existence et l'unicité du couple  $(Q, R)$ .

**Existence :** si  $A = 0$  il suffit de prendre  $Q = R = 0$ , sinon on procède par récurrence sur  $n = \deg(A)$ . Soit  $B = b_p X^p + \dots + a_0$  (écrit suivant les puissances décroissantes) avec  $b_p \neq 0$  de sorte que  $\deg(B) = p$ . Lorsque  $n < p$  on pose  $Q = 0$  et  $R = A$ , sinon on suppose la propriété vraie pour tous les polynômes  $A$  tels que  $\deg(A) \leq n$  et on cherche à la prouver pour  $A = a_{n+1} X^{n+1} + \dots + a_0$  avec  $a_{n+1} \neq 0$ .

Posons  $Q_1 = \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p}$  : le polynôme  $A_1 = A - BQ_1$  est de degré au plus  $n$  car on a “tué” le monôme de plus haut degré dans  $A$ . Par hypothèse de récurrence on a l'existence d'un couple  $(Q_2, R_2)$  tel que  $A_1 = BQ_2 + R_2$  avec  $\deg(R_2) < p$ . On a alors  $A = A_1 + BQ_1 = B(Q_1 + Q_2) + R_2$  et il suffit de poser  $Q = Q_1 + Q_2$  et  $R = R_2$ .

**Unicité :** supposons que l'on ait  $A = BQ + R$  et  $A = B'Q' + R'$  avec  $\deg(R) < \deg(B)$  et  $\deg(R') < \deg(B)$ . En soustrayant membre à membre les deux égalités on obtient  $B(Q' - Q) = R' - R$ . Si  $Q' - Q \neq 0$ , on a d'une part  $\deg(B(Q' - Q)) = \deg(B) + \deg(Q' - Q) \geq p = \deg(B)$  et d'autre part  $\deg(B(Q' - Q)) = \deg(R' - R) < \max(\deg(R'), \deg(R)) < p$  : c'est contradictoire. Donc  $Q' - Q = 0$  et par conséquent  $R' - R = 0$ .

■

**Exemple :**

$$\begin{array}{r}
 X^3 \quad +X^2 \\
 -X^3 \quad +X^2 \\
 \hline
 2X^2 \\
 -2X^2 \quad +2X \\
 \hline
 2X \quad -1 \\
 -2X \quad +2 \\
 \hline
 +1
 \end{array}
 \left| \begin{array}{r}
 X \quad -1 \\
 \hline
 X^2 \quad +2X \quad +2
 \end{array} \right|$$

**Consigne de rédaction :** à l'issue du calcul on doit écrire la conclusion. Par exemple :

$$A = B(X^2 + 2X + 2) + 1$$

Le quotient est  $X^2 + 2X + 2$  et le reste est 1.

**Procédure :** on ordonne chaque polynômes suivant les puissances décroissantes. On cherche un monôme dont le produit par le terme dominant de  $B$  (ici  $X$ ) donne le terme dominant de  $A$  (ici  $X^3$ ). C'est clairement  $X^2$ . On effectue alors le produit  $X^2 B = X^3 - X^2$  que l'on retranche à  $A$  : on l'écrit sous  $A$  en changeant les signes et en respectant l'ordre décroissant des exposants, quitte à laisser un blanc lorsqu'un exposant est absent (noter l'espace laissé entre  $X^2$  et  $-1$  dans l'écriture de  $A$ ). On ajoute à  $A$  et on recommence alors avec le résultat obtenu.

Pour alléger, on peut se dispenser d'abaisser tous les monômes de  $A$  à chaque étape : le  $-1$ , par

exemple, est pris en compte seulement à la fin. On peut procéder autrement si l'on préfère, de même certains ne changent pas le signe mais retranchent... Dans tous les cas ce doit être propre, lisible et bien sûr correct.

**Remarque 3.2.1.** On rappelle qu'un polynôme  $B$  divise un polynôme  $A$  s'il existe un polynôme  $C$  tel que  $A = BC$  (on écrit  $B|A$ ). Le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul si et seulement si  $B$  divise  $A$ .

### 3.3 Fonctions polynomiales, racines

À tout polynôme à coefficients réels  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  on associe la fonction réelle  $\tilde{P}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ (on a remplacé l'indéterminée } X \text{ par la variable } x\text{).}$$

On dit que  $\tilde{P}$  est la fonction polynomiale associée à  $P$ . En pratique, pour simplifier, on notera  $P$  cette fonction, plutôt que  $\tilde{P}$  : le contexte évite les confusions.

**Définition 3.3.1.** Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels. On dit que le réel  $a$  est une racine de  $P$  si  $P(a) = 0$ .

Dans cette définition on aurait dû écrire  $\tilde{P}(a) = 0$  mais on s'est permis, sans conséquence néfaste, la simplification évoquée précédemment. On retiendra les résultats suivants, très importants en pratique :

**Proposition 3.3.1.** Soient  $P$  un polynôme et  $a$  un réel.  $a$  est une racine de  $P$  si et seulement si  $X - a$  divise  $P$ .

**Preuve :** Si  $X - a$  divise  $P$ , il existe un polynôme  $P_1$  tel que  $P = (X - a)P_1$  et il est alors clair que  $P(a) = 0$ . Réciproquement, supposons que  $a$  soit une racine de  $P$  et effectuons la division euclidienne de  $P$  par  $X - a$  :  $P = (X - a)Q + R$  avec  $\deg(R) < 1$  ( $R$  est donc une constante). Comme  $R(a) = P(a)$  la constante est nécessairement nulle et on a  $P = (X - a)Q$  i.e.  $X - a$  divise  $P$ . ■

**Conséquence pratique :** si on observe que  $P(a) = 0$  alors on sait que l'on peut factoriser  $P$  par  $X - a$ . Pour ce faire on dispose de deux méthodes :

- **la division euclidienne** : elle aboutira à  $P = (X - a)B$  (reste nul),
- **les coefficients indéterminés** : si  $\deg(P) = n \geq 2$  avec coefficient dominant  $a_n$  on sait qu'on peut écrire  $P = (X - a)(b_n X^{n-1} + b_{n-1} X^{n-2} + \dots + b_0)$ . On effectue alors ce produit, on regroupe les termes de même degré et on identifie les coefficients obtenus avec ceux de  $P$ . On remarque tout de suite que  $b_n = a_n$  et que  $ab_0 = a_0$ .

**Exemple :**  $P = X^3 - 4X^2 + X + 2$ . On observe que  $P(1) = 0$  : on pourra donc écrire  $P$  sous la forme  $(X - 1)(aX^2 + bX + c)$ . On voit immédiatement que l'on aura  $a = 1$  et  $c = -2$  : on les remplace. En identifiant alors les termes de degré 1 et 2 on obtient les égalités  $b - 1 = -4$  et  $-2 - b = 1$  : une seule de ces deux égalités suffit puisqu'on sait qu'il y a une solution, mais cela peut faire office de contrôle. Finalement  $b = -3$  et on a :  $X^3 - 4X^2 + X + 2 = (X - 1)(X^2 - 3X - 2)$ .

On pourra retrouver ce résultat en effectuant la division euclidienne ...

**Corollaire 3.3.1.** Un polynôme non nul de degré  $n \geq 0$  possède au plus  $n$  racines distinctes.

**Preuve :** nous prouvons ce résultat par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$  le polynôme est une constante non nulle et ne possède donc aucune racine.

Supposons le résultat vrai pour tous les polynômes de degré  $n$ , où  $n$  est un entier fixé. Soit alors

$P$  un polynôme de degré  $n + 1$  possédant au moins  $n + 2$  racines distinctes  $a_1, \dots, a_{n+2}$ . D'après la proposition 3.3.1 il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P = (X - a_1)Q$  et, les racines étant distinctes, on a  $Q(a_2) = \dots = Q(a_{n+2}) = 0$  :  $Q$  possède au moins  $n + 1$  racines distinctes. Mais  $\deg(Q) = n$  donc, par hypothèse de récurrence, il est nécessairement nul et on a ainsi  $P = 0$ . Ceci achève la récurrence (on a établi la contraposée). ■

**Corollaire 3.3.2.** Soient  $P, Q$  des polynômes, alors  $\tilde{P} = \tilde{Q} \iff P = Q$ .

Il en résulte que deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si les coefficients des termes de même degré sont égaux.

**Preuve :** si  $\tilde{P} = \tilde{Q}$  alors la fonction polynomiale  $\tilde{P} - \tilde{Q}$ , associée au polynôme  $P - Q$ , est nulle et ainsi  $P - Q$  possède une infinité de racines. Il est donc nul. ■

+++++ Pour aller plus loin : racines multiples +++++++

**Définition 3.3.2** (ordre d'une racine). On appelle ordre de multiplicité d'une racine  $a$  d'un polynôme  $P$  le plus grand entier  $m$  tel que  $(X - a)^m$  divise  $P$ .

Lorsque  $m = 2$  on parle de racine double et lorsque  $m = 3$ , de racine triple. Il y a un lien entre l'ordre de multiplicité d'une racine et les racines des dérivées successives d'un polynôme, notion que nous définissons ci-dessous :

**Définition 3.3.3** (polynôme dérivé). Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $n$ . On appelle polynôme dérivé de  $P$  le polynôme  $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$

La fonction polynomiale  $\tilde{P}'$  est bien sûr la dérivée de  $\tilde{P}$  et on définit de façon naturelle les dérivées successives de  $P$  avec les mêmes notations que pour les fonctions. Nous n'irons pas plus loin dans cette direction (importante) mais le lien entre ordre de multiplicité et polynômes dérivés sera abordé en TD sur un cas particulier. Le résultat général est le suivant :

**Proposition 3.3.2.** Soient  $P$  un polynôme et  $a$  un réel.  $a$  est une racine de  $P$  de multiplicité  $m \in \mathbb{N}^*$  si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0.$$

## 3.4 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

**Définition 3.4.1.** On dit qu'un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  est irréductible s'il est non-constant et si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme  $\lambda P$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  (ces polynômes sont dits *associés* à  $P$ ).

On admettra les résultats suivants. On reviendra sur les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  dans le prochain chapitre (nombres complexes).

**Proposition 3.4.1.** Tout polynôme non constant est un produit de facteurs irréductibles. La décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs, sauf à changer certains facteurs en facteurs associés.

**Proposition 3.4.2.** *Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.*

**Attention :** il ne faut pas confondre irréductibilité et absence de racine :  $X^4 + X^2 + 1$ , par exemple, n'a pas de racine (dans  $\mathbb{R}$ ) mais n'est pas irréductible :  $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ .



# Chapitre 4

## Les nombres complexes

### 4.1 Introduction

L'idée des nombres complexes est due aux mathématiciens italiens de l'université de Bologne, Dal Ferro, Tartaglia, Cardan : ils ont imaginé, vers 1550, une « racine carrée de -1 » pour résoudre les équations du troisième degré. On sait d'ailleurs, à un niveau plus simple, que l'équation  $x^2 + 1 = 0$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ . Grâce aux progrès de l'Algèbre, les nombres complexes ont acquis, depuis, un statut mathématique précis. Leur construction n'est pas au programme de ce cours ; mentionnons seulement qu'il est possible de la faire à partir des couples  $(x, y)$  de réels (ceux-là même qui vont donner  $x + iy$ ) pour lesquels on étend les notions de somme et de produit de façon convenable :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad (x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

On peut vérifier que ces opérations ont les mêmes propriétés que les opérations  $+$  et  $\times$  habituelles dans  $\mathbb{R}$  : commutativité, associativité, distributivité de  $\times$  par rapport à  $+$ .

Les réels correspondent alors aux couples de la forme  $(x, 0)$  dont l'ensemble est stable par ces opérations : on note  $(x, 0)$  plus simplement  $x$  et on introduit l'élément  $i \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)$  qui est tel que,  $i^2 = (-1, 0)$  c'est à dire  $-1$  avec la convention précédente. Comme  $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) \times (0, 1)$  (le vérifier !), on obtient la notation usuelle  $x + iy$ .

Ce chapitre est essentiellement consacré à des rappels.

### 4.2 Représentation algébrique des nombres complexes

#### 4.2.1 Introduction basique

Conformément à ce qui a été introduit ci-dessus, l'ensemble des nombres complexes est

$$\mathbb{C} = \{x + iy; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

$x$  s'appelle la partie réelle de  $z$ , notée  $x = \operatorname{Re}(z)$

$y$  s'appelle la partie imaginaire de  $z$ , notée  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

L'écriture d'un nombre complexe  $z$  sous la forme  $x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$  s'appelle la **forme algébrique** de  $z$ .

On a  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  et :

|  |
|--|
| $z = z' \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$ |
| $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$   |
| $z = 0 \iff x = y = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$                                  |

On munit  $\mathbb{C}$  de deux opérations :

- **Addition** : si  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  alors  $z + z' = x + x' + i(y + y')$ .
- **Multiplication** : si  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  alors  $zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$ .

**Cas particulier** : si  $k \in \mathbb{R}$  et  $z = x + iy$  alors  $kz = kx + iky$ .

On a  $i = 0 + 1i$  : en appliquant les règles ci-dessus on obtient  $i^2 = -1$ .

Ces règles, appliquées aux réels, redonnent les opérations usuelles. **On peut formellement calculer comme dans  $\mathbb{R}$ , avec la particularité liée à l'utilisation de  $i$ .**

**Plan complexe** : grâce au lien entre  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^2$  il est d'usage de représenter  $z = x + iy$  par le point  $M(x, y)$  (ou par le vecteur  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ) dans le plan rapporté à un repère orthonormal, qui prend alors le nom de plan complexe. Précisons :

**Définition 4.2.1.** Soient  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  un vecteur et  $M(x, y)$  un point.

On appelle affixe de  $\vec{u}$  ou du point  $M$  le nombre complexe  $z = x + iy$  noté aussi  $\text{aff}(\vec{u})$  ou  $\text{aff}(M)$ .

Inversement on dit que  $M(x, y)$  est le **point image** de  $z = x + iy$ . On le note aussi  $M(z)$ .

On a alors le résultat très simple :

**Proposition 4.2.1.** Soient  $A$  et  $B$  des points d'affixes respectifs  $z_A$  et  $z_B$  alors :

$$\boxed{\text{aff}(\vec{AB}) = z_B - z_A}$$

L'axe  $Ox$  est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z_M = x \in \mathbb{R}$  (axe réel),

l'axe  $Oy$  est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z_M = iy$ ,  $y \in \mathbb{R}$  ( axe des imaginaires purs)

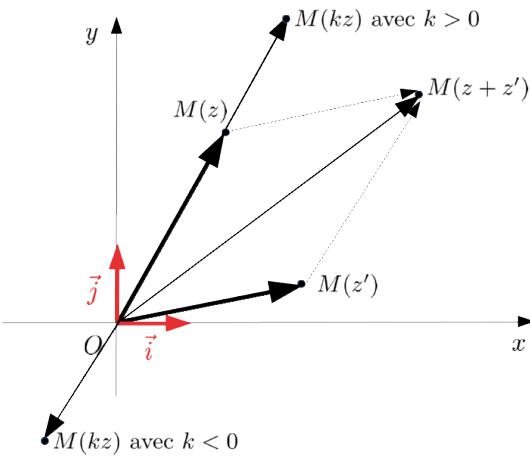


FIGURE 4.1 – Somme et produit par un réel

## 4.2.2 Conjugaison, module

**Définition 4.2.2.** Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe (avec  $x, y \in \mathbb{R}$ ).

- On appelle conjugué de  $z$ , et on note  $\bar{z}$ , le nombre complexe  $x - iy$ .
- On appelle module de  $z$ , et on note  $|z|$ , le réel positif  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

Ces deux quantités sont liées, en effet :

$$z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

**Remarque :** si  $z \in \mathbb{R}$  on a  $z = x = \operatorname{Re} z$  et donc  $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ . Le module généralise donc la notion de valeur absolue d'un réel. D'autre part, du point de vue géométrique :

**Proposition 4.2.2.** Soient  $A$  et  $B$  des points d'affixes respectifs  $z_A$  et  $z_B$  et  $\vec{u}$  un vecteur d'affixe  $z$ , alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|, \quad \|\vec{u}\| = |z|$$

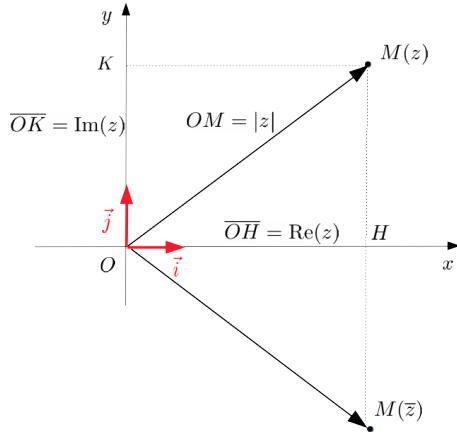


FIGURE 4.2 – Conjugué et module

• Propriétés de la conjugaison :

- ◊  $\bar{\bar{z}} = z$
- ◊  $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$
- ◊  $z$  est imaginaire pur  $\iff \bar{z} = -z$
- ◊  $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$ ,  $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ ,  $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
- ◊  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

• Propriétés du module :

- ◊  $z = 0 \iff |z| = 0$
- ◊  $|\bar{z}| = |z|$ ,
- ◊  $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ ,  $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- ◊  $|z^n| = |z|^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$
- ◊ inégalités triangulaires (voir figure 4.3 : inégalités dans le triangle  $OM(z)M(z+z')$ )

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

- ◊  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ ,  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$  : inégalités dans le triangle  $OHM(z)$ .

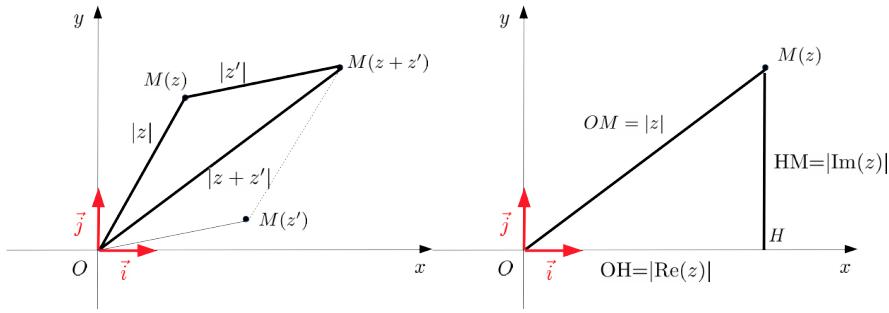


FIGURE 4.3 – Inégalités triangulaires et module

- Calcul d'un inverse** - Il est utile de savoir manipuler conjugaison et module pour calculer sans avoir recours à la forme algébrique. Par exemple, pour l'inverse d'un nombre complexe  $z = x + iy \neq 0$  :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

La première égalité est obtenue « en multipliant et divisant par le conjugué »...

- Calcul de  $|z + z'|^2$**  :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\overline{z + z'}) \\ &= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z'\bar{z}' + z\bar{z}' + z'\bar{z} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} \end{aligned}$$

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{z}')$$

**Remarque 4.2.1.** On a donc en particulier :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\bar{z}'| \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| \\ &\leq (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

d'où  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  : l'inégalité triangulaire est démontrée.

En remplaçant  $z'$  par  $-z'$  on obtient :

$$|z - z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2 \operatorname{Re}(z\bar{z}')$$

**Attention** : ne pas confondre  $z^2$  et  $|z|^2$  :

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \text{ tandis que } |z|^2 = x^2 + y^2$$

On vérifiera en exercice que l'égalité n'a lieu que pour les réels

### 4.3 Argument, forme trigonométrique

**Cercle trigonométrique** : c'est le cercle  $\mathcal{C}(O, 1)$  de centre  $O$  et de rayon 1 dans le plan orienté (on choisit par défaut l'orientation usuelle). C'est l'ensemble des points dont l'affixe est de module égal à 1. C'est l'image dans le plan complexe de l'ensemble

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

- Si  $z \in \mathbb{U}$ , son point image  $M(z)$  est sur le cercle trigonométrique et on sait y associer un réel  $\theta$ , mesure de l'angle orienté de vecteurs  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM(z)})$ , définie modulo  $2\pi$  c'est à dire à l'ajout près d'un nombre quelconque de la forme  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  :  $M(z)$  a pour coordonnées  $(\cos \theta, \sin \theta)$  et on a

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

- Si  $z \in \mathbb{C}^*$ , alors  $u = \frac{z}{|z|}$  est dans  $U$ . On peut donc lui associer  $\theta$  tel que  $u = \cos \theta + i \sin \theta$  et on a :  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

**Définition 4.3.1.** On appelle argument du nombre complexe non nul  $z$  tout réel  $\theta$  tel que  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

Si  $\theta_0$  est l'un d'eux, tous les autres sont de la forme  $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$  quelconque. On écrit  $\arg(z) = \theta_0 [2\pi]$  (ou même  $\arg(z) = \theta_0$  pour simplifier, s'il n'y a pas d'ambiguité).

**Remarque :** si  $z = 0$  on a  $|z| = 0$  mais l'argument n'est pas défini. Pour passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique on applique les formules :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

D'un point de vue géométrique on a immédiatement :

**Proposition 4.3.1.** Soient  $A$  et  $B$  des points d'affixes respectifs  $z_A$  et  $z_B$  et  $\vec{u}$  un vecteur d'affixe  $z$ , alors :  $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \arg(z) [2\pi]$  et  $(\widehat{\vec{i}, \vec{AB}}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi]$

On a le résultat fondamental :

**Proposition 4.3.2** (Argument d'un produit). Soient  $z, z' \in \mathbb{C}^*$ , alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi].$$

**Preuve :** si  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  et  $z' = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')$  on a :

$$\begin{aligned} zz' &= |z||z'|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= |zz'|((\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')) \\ &= |zz'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

ce qui donne la relation annoncée. ■

Cette propriété justifie, à cause de la similitude avec les propriétés des exposants, l'introduction de la notation

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{déf}}{=} \cos \theta + i \sin \theta.$$

Avec cette notation, elle s'écrit en effet simplement :  $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ .

En fait, il y a là plus qu'une simple convention, mais ceci dépasse le cadre du cours.

Tout nombre complexe non nul s'écrit  $z = r e^{i\theta}$  avec  $r = |z|$  et  $\theta = \arg(z) [2\pi]$

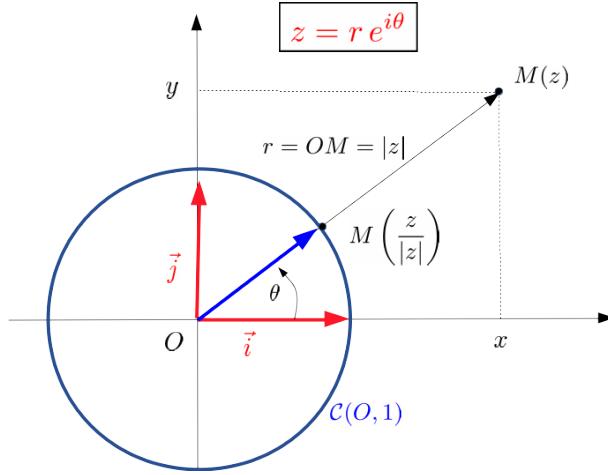


FIGURE 4.4 – Forme trigonométrique

**Remarque 4.3.1.** Soient  $r \in \mathbb{R}$  (pas de signe a priori),  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $z = r e^{i\theta}$ .

- Si  $r = 0$  alors  $z = 0$  et  $|z| = r = 0$  (pas d'argument défini),
- si  $r > 0$  alors  $|z| = r$  et  $\arg(z) = \theta [2\pi]$ ,
- si  $r < 0$  alors  $|z| = -r$  et  $\arg(z) = \theta + \pi [2\pi]$ .

On a en effet  $r e^{i\theta} = (-r) e^{i(\theta+\pi)}$  car  $e^{i\pi} = -1$

Les propriétés calculatoires de la forme trigonométrique sont résumées dans la proposition suivante :

**Proposition 4.3.3.** Soient  $z = r e^{i\theta}$ ,  $z' = r' e^{i\theta'}$ , avec  $r, r' > 0$  (forme trigonométrique) alors :

- ◊  $z = z' \iff r = r'$  et  $\theta = \theta' [2\pi]$
- ◊  $zz' = rr' e^{i(\theta+\theta')}$
- ◊  $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$ , en particulier  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' [2\pi]$ ,
- ◊  $\bar{z} = re^{-i\theta}$  donc  $\arg(\bar{z}) = -\arg z, [2\pi]$ ,
- ◊  $\forall z \in \mathbb{Z}, \quad z^n = r^n e^{in\theta}$ , donc  $\arg(z^n) = n \arg z [2\pi]$
- ◊  $z \in \mathbb{R} \iff \arg z = 0$  ou  $\arg z = \pi [2\pi]$ ,
- ◊  $z$  imaginaire pur  $\iff \arg z = \frac{\pi}{2}$  ou  $\arg z = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

**Exemples :**

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ donc } |z| = \sqrt{2} \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{4} [2\pi] : 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$z = -1 = \cos \pi + i \sin \pi \text{ donc } |i| = 1 \text{ et } \arg(-1) = \pi [2\pi] : -1 = e^{i\pi}.$$

$$z = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ donc } |i| = 1 \text{ et } \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi] : i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Du point de vue géométrique on obtient :

**Proposition 4.3.4.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  des vecteurs non nuls d'affixes respectifs  $z$  et  $z'$ , alors :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \arg z' - \arg z [2\pi] = \arg \frac{z'}{z} [2\pi]$$

Soient quatre points  $A(z_A)$ ,  $B(z_B)$ ,  $C(z_C)$ ,  $D(z_D)$  tels que  $A \neq B$  et  $C \neq D$ , alors :

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{CD})} = \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} [2\pi]$$

## 4.4 Applications

### 4.4.1 Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe non nul

**Définition 4.4.1.** Soient  $z$  un nombre complexe et  $n$  un entier naturel non nul. On appelle racine  $n$ -ième de  $z$  tout nombre complexe  $Z$  tel que  $Z^n = z$ .

Clairement, ceci ne présente un intérêt que pour  $z \neq 0$  et  $n \geq 2$ .

**Proposition 4.4.1.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , tout nombre complexe non nul  $z = r e^{i\theta}$ ,  $r > 0$ , possède exactement  $n$  racines  $n$ -ièmes  $(Z_0, \dots, Z_{n-1})$  données par  $Z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ ,  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

*Preuve :* on cherche  $Z$  sous la forme  $Z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $\rho > 0$  :  $Z^n = \rho^n e^{in\varphi}$  et on a

$$Z^n = z \iff \rho^n = r \text{ et } n\varphi = \theta [2\pi]$$

c'est à dire  $\rho^n = r$  et  $n\varphi = \theta [2\pi]$ . Or :

$$\rho^n = r \iff \rho = \sqrt[n]{r} \text{ et }$$

$$\begin{aligned} n\varphi = \theta [2\pi] &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, n\varphi = \theta + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Posons  $Z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$  : pour  $k = n$  on obtient comme argument  $\frac{\theta}{n} + 2\pi$  donc  $Z_n = Z_0$  et, plus généralement,  $Z_{k+n} = Z_k$ . Il suffit donc de prendre  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . ■

**Remarque :** Les points images  $M_k = M(Z_k)$  sont sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt[n]{r}$  et forment les sommets d'un polygone régulier convexe à  $n$  sommets.

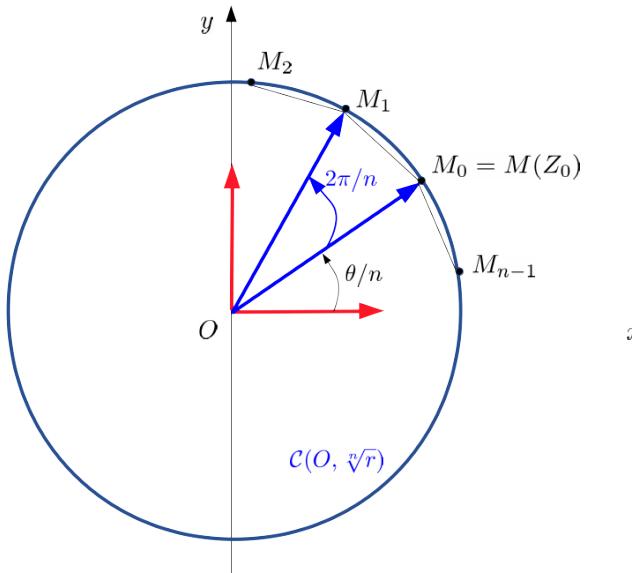


FIGURE 4.5 – Racines  $n$ -ièmes

**Cas particulier :** les « racines  $n$ -ièmes de l’unité »

**Proposition 4.4.2.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l’équation  $Z^n = 1$  possède exactement  $n$  solutions appelées racines  $n$ -ièmes de l’unité. Ce sont les nombres complexes  $(1, u, u^2, \dots, u^{n-1})$  avec  $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ .

En effet, si  $z = 1$  on a  $r = 1$  et  $\theta = 0$  donc  $Z_k = \sqrt[n]{1} e^{i(\frac{0}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = e^{i(\frac{2k\pi}{n})} = (e^{i(\frac{2\pi}{n})})^k$ ,  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

**Exemples :**

◊ Racines cubiques de l’unité :  $z = 1 = e^{0i}$ ,  $Z_k = e^{i(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3})}$ ,  $k = 0, 1, 2$ , on a donc trois racines cubiques :  $Z_0 = 1$ ,  $Z_1 = e^{i(\frac{2\pi}{3})} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $Z_2 = e^{i(\frac{4\pi}{3})} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{Z_1}$ .

On note parfois  $e^{i(\frac{2\pi}{3})}$  par  $j$  : les racines cubiques de 1 sont alors 1,  $j$  et  $j^2 = \bar{j}$ .

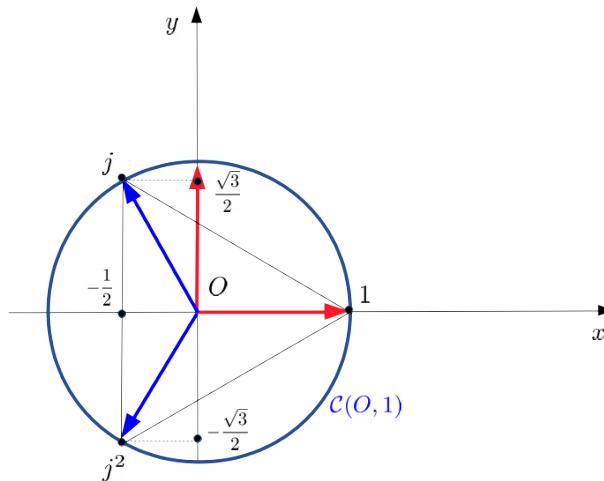


FIGURE 4.6 – Racines cubiques de 1

◊ Racines cubiques de 2 : les précédentes, multipliées par  $\sqrt[3]{2}$ .

◊ Racines 4-ièmes de  $1+i$  :  $z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $Z_k = \sqrt[8]{2} e^{i(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2})}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .

#### 4.4.2 Racines carrées

On veut résoudre  $Z^2 = z$  où  $z \neq 0$  est donné sous la forme  $z = r e^{i\theta}$ ,  $r > 0$ ...

- **Méthode trigonométrique** : on applique ce qui précède avec  $n = 2$  :  $Z_k = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)}$ ,  $k = 0, 1$ .

On a donc deux racines carrées opposées car  $Z_0 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$  et  $Z_1 = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} = e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\pi} = -Z_0$ .

- **Méthode algébrique** : on pose  $z = x + iy$ ,  $Z = X + iY$  et on déduit de l'équation  $Z^2 = z$ , d'inconnue  $Z$ , un système d'équations d'inconnues  $X, Y$ .

$$\begin{aligned} Z^2 = z &\iff X^2 - Y^2 + 2iXY = z = x + iy \\ &\iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi  $|Z|^2 = |Z^2| = |z|$  donc  $X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ , ce qui permet d'obtenir  $X^2$  et  $Y^2$  :

$$X^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} + x), \quad Y^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} - x).$$

Cela donne quatre possibilités, mais l'équation  $2XY = y$  donne le signe du produit  $XY$  (celui de  $y$ ), ce qui réduit les possibilités à deux ...

**Exemple** :  $z = 3 + 4i$ ,  $Z = X + iY$

$$\begin{aligned} Z^2 = 3 + 4i &\iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = 3 & (1) \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{9 + 16} = 5 & (2) \\ 2XY = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X^2 = 4 & (1) + (2) \\ Y^2 = 1 & (2) - (1) \\ XY = 2 > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X = 2, Y = 1 \text{ ou } X = -2, Y = -1 \\ Z = 2 + i \text{ ou } Z = -2 - i \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarque 4.4.1.** Dans le cas particulier important où  $z = x$  est un réel :

- si  $x > 0$ , on retrouve les racines usuelles  $\sqrt{x}$  et  $-\sqrt{x}$ ,
- si  $x < 0$ , on écrit  $z = -|x| = i^2|x|$  et on obtient les racines conjuguées  $\pm i\sqrt{|x|} = \pm i\sqrt{-x}$ .

#### 4.4.3 Équations du second degré

Soient  $a, b, c$  trois nombres complexes avec  $a \neq 0$ . On veut résoudre l'équation  $az^2 + bz + c = 0$ . Le principe est le même que dans  $\mathbb{R}$ . On part de l'identité :

$$az^2 + bz + c = a \left( \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

Posons alors  $\Delta = b^2 - 4ac$  : ce nombre complexe admet dans  $\mathbb{C}$  deux racines carrées opposées  $\delta$  et  $-\delta$ , calculées par l'une des deux méthodes précédentes. L'équation équivaut alors à :

$$\left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left( \frac{\delta}{2a} \right)^2$$

et on obtient les solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

**Exemple :** résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + (3 - i)z + 2(1 - i) = 0$ .

$$\Delta = (3 - i)^2 - 8(1 - i) = 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = (\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})^2 = (1 + i)^2.$$

On a donc, par exemple,  $\delta = 1 + i$  et on obtient les solutions :

$$z_1 = \frac{-3 + i + 1 + i}{2} = -1 + i, \quad z_2 = \frac{-3 + i - 1 - i}{2} = -2.$$

**Cas particulier :**  $a, b, c$  réels et  $\Delta < 0$ . Alors les racines complexes de  $\Delta$  sont  $\pm i\sqrt{-\Delta}$  et les solutions de l'équations sont conjuguées l'une de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

**Exemple :**  $x^2 + x + 1 = 0$ .

On trouve  $\Delta = -3$  et on obtient dans  $\mathbb{C}$  les racines complexes conjuguées :

$$x' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

**Attention :** écrire  $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$  est une faute.

## 4.5 Polynômes à coefficients complexes

On peut reprendre mot pour mot les définitions et résultats du chapitre 3 en remplaçant  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$ , à l'exception du paragraphe sur les polynômes irréductibles. Il existe en effet un résultat fondamental (dont la démonstration est hors programme) :

**Théorème 4.5.1** (théorème de d'Alembert-Gauss). *Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  possède au moins une racine dans  $\mathbb{C}$*

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

**Corollaire 4.5.1.** *Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes de degré 1*

Considérons maintenant un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  : on peut le considérer comme un élément de  $\mathbb{C}[X]$ . On a alors une propriété intéressante et simple :

**Proposition 4.5.1.** *Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , alors pour tout nombre complexe  $\alpha$ ,  $P(\alpha) = 0 \iff P(\bar{\alpha}) = 0$ .*

Autrement dit, si  $\alpha$  est une racine de  $P$  alors  $\bar{\alpha}$  aussi (et réciproquement puisque  $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ ).

**Preuve :** comme  $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ , il suffit de démontrer l'implication  $P(\alpha) = 0 \implies P(\bar{\alpha}) = 0$ . Supposons que  $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$  avec  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  et que  $P(\alpha) = 0$  : on a  $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0$  et en prenant le conjugué de chaque membre :  $a_0 + a_1\bar{\alpha} + \cdots + a_n\bar{\alpha}^n = 0$  (car les coefficients réels sont leurs propres conjugués), c'est à dire  $P(\bar{\alpha}) = 0$ . ■

+ + + + + + + + Pour aller plus loin + + + + + + + +

On suppose ici qu'on a étudié le complément sur les racines multiples au chapitre 3. Le théorème 4.5.1 a une autre conséquence :

**Corollaire 4.5.2.** *Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}^*$  possède exactement  $n$  racines comptées avec leur ordre de multiplicité*

« comptées avec leur ordre de multiplicité » signifie qu'une racine double compte pour deux, etc ...

On peut alors justifier la proposition 3.4.2 sur les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  :

considérons une racine  $\alpha$  d'ordre  $m$  : on a, d'après la proposition 3.3.2  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$  et  $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ . **Les coefficients de  $P$  et de ses dérivées étant des réels**, on a aussi, d'après la proposition 4.5.1 :  $P(\bar{\alpha}) = P'(\bar{\alpha}) = \dots = P^{(m-1)}(\bar{\alpha}) = 0$  et  $P^{(m)}(\bar{\alpha}) \neq 0$ . Il en résulte que  $\bar{\alpha}$  est une racine de  $P$  de même ordre  $m$  que  $\alpha$ .

Si  $\alpha$  est réelle, on a rien de nouveau, mais dans la décomposition de  $P$  en produit de facteurs irréductibles on peut le cas échéant regrouper les facteurs correspondant à deux racines non réelles conjuguées . On obtient des termes **à coefficients réels** de la forme :

$$(X - \alpha)^m (X - \bar{\alpha})^m = (X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2)^m$$

dont le discriminant  $\Delta = 4(\operatorname{Re}(\alpha)^2 - |\alpha|)$  est strictement négatif car  $|\alpha|^2 = \operatorname{Im}(\alpha)^2 + \operatorname{Re}(\alpha)^2 > \operatorname{Re}(\alpha)^2$ . Finalement, comme indiqué au chapitre 3, les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes du premier degré et ceux du second degré à discriminant strictement négatif.

#### 4.5.1 Trigonométrie

- **Formule de Moivre :**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Cela permet d'obtenir  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$  sous forme d'une expression polynomiale en  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$ .

**Exemple :**

$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$  par la formule de Moivre. D'autre part :

$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta$  par la formule du binôme.

En identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient donc :

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

- **Formules d'Euler :**

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Elles permettent de linéariser une expression une expression polynomiale en  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  (transformation inverse de la précédente).

**Exemples :**

1. Forme linéarisée de  $\cos^3 \theta$  :

$$\begin{aligned}
\cos^3 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \\
&= \frac{e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} \\
&= \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}}{8} \\
&= \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos\theta).
\end{aligned}$$

2. Forme linéarisée de  $\cos^2 \theta \sin^4 \theta$  :

$$\begin{aligned}
\cos^2 \theta \sin^4 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 \\
&= \frac{1}{2^6} (e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta})(e^{4i\theta} - 4e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} - 4e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}) \\
&= \frac{1}{2^6} (e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta})(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) \\
&= \frac{1}{2^6} (e^{6i\theta} + e^{-6i\theta} - 2e^{4i\theta} - 2e^{-4i\theta} - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} + 4) \\
&= \frac{1}{32} (\cos(6\theta) - 2 \cos(4\theta) - \cos(2\theta) + 2)
\end{aligned}$$



# Chapitre 5

## Fonctions usuelles

Ce chapitre passe en revue les définitions et propriétés de fonctions d'usage courant vues dans les classes de lycée. Le seul point nouveau concerne la fonction tangente.

### 5.1 Quelques rappels

- **Intervalles de  $\mathbb{R}$**

**Définition 5.1.1.** Un intervalle de  $\mathbb{R}$  est une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall(x, y) \in I \times I, \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

Autrement dit, si un réel est compris entre deux éléments de  $I$  alors il doit lui-même être dans  $I$ .  $\mathbb{R}^*$ , par exemple, n'est pas un intervalle.

Les intervalles sont les sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  des types suivants :

- **Intervalles bornés :**

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$  (intervalle fermé),  $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$  (intervalle ouvert).

$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$  et  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$  (intervalle semi-ouvert).

- **Intervalles non-bornés :**

$[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$  et  $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$ .

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$  et  $]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$

$\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ .

- **Fonctions croissantes ou décroissantes sur un intervalle**

Une fonction croissante « conserve l'ordre » tandis qu'une fonction décroissante « inverse l'ordre » :

**Définition 5.1.2.** Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- On dit que  $f$  est croissante si elle vérifie :

$$\forall(x, y) \in I \times I, x < y \implies f(x) \leq f(y)$$

- On dit que  $f$  est **strictement** croissante si elle vérifie :

$$\forall(x, y) \in I \times I, x < y \implies f(x) < f(y)$$

- On dit que  $f$  est décroissante si elle vérifie :

$$\forall(x, y) \in I \times I, x < y \implies f(x) \geq f(y)$$

— On dit que  $f$  est **strictement** décroissante si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I \times I, x < y \implies f(x) > f(y)$$

- **Quelques propriétés remarquables**

**Définition 5.1.3.**  $f$  est une fonction paire si

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = f(x).$$

Dans ce cas le graphe de  $f$  en repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe  $Oy$ .

**Définition 5.1.4.**  $f$  est une fonction impaire si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

Dans ce cas le graphe de  $f$  est symétrique par rapport à  $O$ .

**Remarque 5.1.1.** Plus généralement :

— si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, (a+x \in \mathcal{D}_f \implies a-x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(a+x) = f(a-x))$$

alors le graphe de  $f$  est symétrique par rapport à la droite  $x = a$ .

— si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, (a-x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(a-x) = f(x))$$

alors le graphe de  $f$  en repère orthogonal est symétrique par rapport à la droite  $x = \frac{a}{2}$ .

**Définition 5.1.5.**  $f$  est une fonction périodique s'il existe un réel  $T > 0$  tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, x+T \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x+T) = f(x)$$

On dit que  $T$  est une période de  $f$ . Le plus petit de ces réels  $T > 0$ , s'il existe, est appelé la période de  $f$ .

La représentation graphique étant faite sur un intervalle quelconque de longueur  $T$ , la courbe complète s'obtient en effectuant les translations de vecteurs  $n T \vec{i}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 5.2 Logarithme népérien

### 5.2.1 Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction, notée  $\ln$ , définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

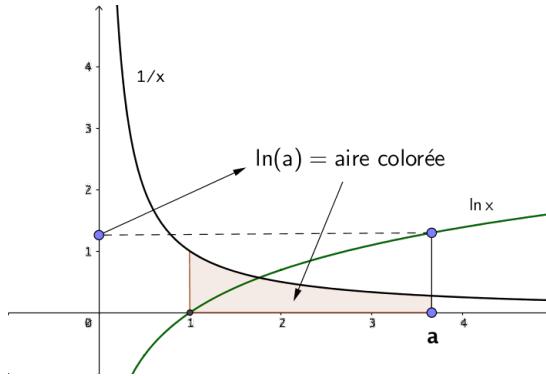


FIGURE 5.1 – Fonction logarithme népérien

En d'autres termes, c'est l'unique fonction  $f$  dérivable sur  $]0, +\infty[$  telle que :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \text{ pour tout } x \in ]0, +\infty[, \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

**En particulier :**  $\ln$  est continue et dérivable sur son domaine  $\mathcal{D}_{\ln} = ]0, +\infty[$ ,  $\ln(1) = 0$  et pour tout  $x > 0$ ,  $(\ln)'(x) = \frac{1}{x} > 0$ .

À partir de la définition sous forme intégrale, on a une interprétation du logarithme népérien en termes d'aire algébrique. On pourra par exemple obtenir un encadrement de  $\ln 2$  à l'aide d'une feuille de papier millimétré et d'un crayon, en ne calculant que des inverses pour tracer le graphe de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

### 5.2.2 Propriétés

**Propriétés algébriques :**

- $\forall a > 0, \forall b > 0, \ln(ab) = \ln a + \ln b$

**Preuve :** on pose, pour  $x > 0$ ,  $f(x) = \ln(ax) - \ln x - \ln a$ . On a  $f'(x) = 0$ , Donc  $f$  est une fonction constante sur  $]0, +\infty[$ . De plus  $f(1) = 0$ , donc  $f$  est la fonction nulle et on a ainsi montré :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \ln(ax) = \ln a + \ln x$ . Il reste alors à remplacer  $x$  par  $b$ . ■

- **Conséquences :** pour  $a > 0$  et  $b > 0$ ,

|   |   |
|---|---|
| $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ | $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b,$   |
| $\ln a^n = n \ln a$ pour $n \in \mathbb{N}$ , | $\ln a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \ln a$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ , |
| $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$            |   |

**Propriétés analytiques :**

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

**Preuve :** (à lire après étude du chapitre 6) on montre d'abord que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

Soit  $M > 0$ . La fonction  $\ln$  étant strictement croissante, on a  $\ln 2 > \ln 1 = 0$ . Il existe donc un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \ln 2 \geq M$ . Posons alors  $A = 2^n$  : on a  $\ln A = n \ln 2 \geq M$ . De nouveau grâce à la croissance de  $\ln$  on a, pour  $x > 0$  :  $x \geq A \implies \ln x \geq \ln A$ .

Ainsi, pour tout  $M > 0$ , on a pu trouver un  $A \in ]0, +\infty[$  tel que  $\forall x \geq A$ ,  $\ln x \geq M$ .

Cela correspond à la définition de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

En posant  $x = \frac{1}{t}$ , on obtient :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\ln t = -\infty$ . ■

**Conséquences :**

- $\ln$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier, il existe un réel unique, noté  $e > 0$ , tel que  $\ln e = 1$ .

- le graphe présente une asymptote verticale en  $x = 0$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$ .

**Preuve** : pour  $t \geq 1$  on a  $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ , donc :

$$\forall x \geq 1, 0 \leq \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x},$$

et ainsi :  $\forall x \geq 1, 0 \leq \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ , d'où le résultat grâce au théorème des gendarmes.

La deuxième limite est obtenue en posant  $x = \frac{1}{t}$ , ce qui donne  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{\ln t}{t} = 0^-$ . ■

- Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ , le graphe présente une branche parabolique horizontale en  $+\infty$ .

- Si  $u : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , alors

$\begin{array}{ll} \ln u : & I \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(u(x)) \end{array}$  est dérivable et  $(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$  pour tout  $x \in I$ .

- Si  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  ne s'annulant pas sur  $I$ , alors  $\ln |u| : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable et  $(\ln |u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$  pour tout  $x \in I$

## 5.3 Fonction exponentielle

### 5.3.1 Définition

On a vu que la fonction logarithme népérien  $\ln$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

La réciproque de cette fonction s'appelle l'exponentielle (de base  $e$ ). Elle est notée  $e^x$  ou  $\exp x$  et vérifie :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, (y = \exp x \iff x = \ln y)}$$

En particulier on a :  $\exp 0 = 1$ ,  $\exp 1 = e$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\ln(\exp x) = x$  et, pour tout  $y \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\exp(\ln y) = y$ .

- $\exp$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(e^x)' = e^x > 0$ .

La fonction  $\exp$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . C'est aussi une conséquence de la définition puisque cette fonction est la bijection réciproque d'une fonction strictement croissante. Dans un repère orthogonormal, les graphes de  $\ln$  et  $\exp$  sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation  $y = x$ ).

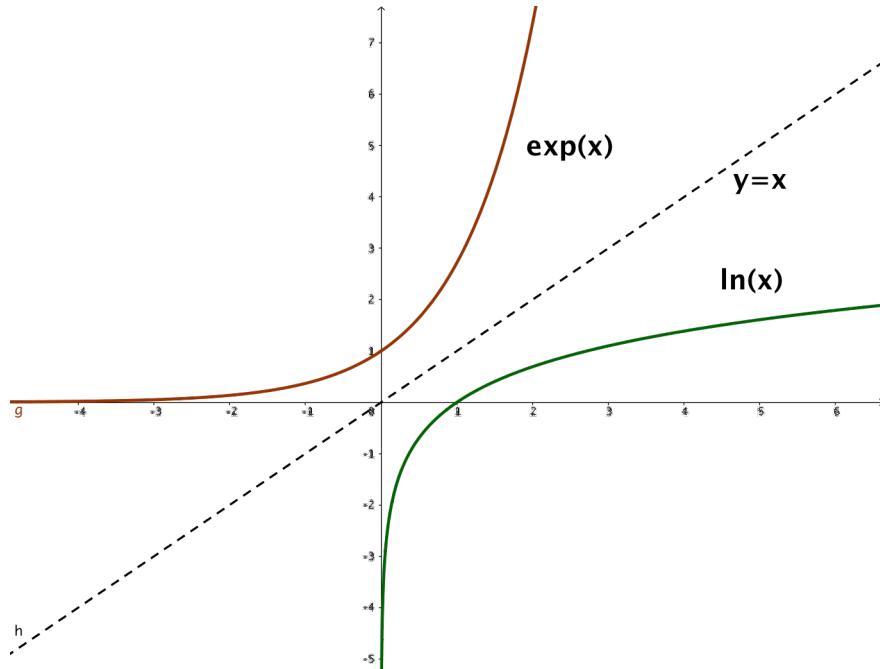


FIGURE 5.2 – Fonctions logarithme et exponentielle

### 5.3.2 Propriétés

**Propriétés algébriques :**

$$\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b, \text{ pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp a}, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

$$(\exp a)^r = \exp(ar), \text{ pour tout } a \in \mathbb{R} \text{ et } r \in \mathbb{Q}$$

**Propriétés analytiques :**

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-x) = 0.$

Si  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable sur  $I$ , alors

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I, f'(x) = u'(x) \exp(u(x))$

## 5.4 Exposants réels, fonctions puissances

La définition d'une puissance entière telle que  $2^3 \stackrel{\text{déf}}{=} 2 \times 2 \times 2$  ou  $2^{-3} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2^3}$  ne pose pas de difficulté. Si  $r = \frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  on peut définir par exemple  $2^r$  comme l'unique réel positif  $X$  tel que  $X^q = 2^p$  en utilisant que la fonction  $x \mapsto x^q$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi,  $2^{3/2}$  est l'unique réel positif  $X$  tel que  $X^2 = 2^3 = 8$ , donc  $2^{3/2} = \sqrt{8}$ , mais comment définir  $2^{\sqrt{3}}$  ?

Une définition raisonnable devra être cohérente avec les propriétés des exposants entiers. En particulier on devra avoir  $2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2$  et  $e^x$ , avec cette définition, devra correspondre à  $\exp(x)$ .

La propriété rappelée plus haut :  $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \ln a^n = n \ln a$  équivaut à :  $\forall n \in \mathbb{N}, a^n = \exp(n \ln a)$ . De même :

$$\forall a > 0, \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \ln a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \ln a \iff a^{\frac{p}{q}} = \exp\left(\frac{p}{q} \ln a\right)$$

Par exemple  $a^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln a} = e^{\ln \sqrt{a}} = \sqrt{a}$ .

Ceci permet facilement d'étendre la notion d'exposant aux réels en posant, pour  $a > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $a^\alpha := \exp(\alpha \ln a)$ . Le membre de droite est défini dès que  $a > 0$  et donne un sens au membre de gauche. On aura ainsi  $2^{\sqrt{3}} = \exp(\sqrt{3} \ln 2) \simeq 3,32$ .

De plus pour  $a = e$  et  $\alpha = x$  on obtient bien  $e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$ .

### 5.4.1 Exposants réels

Pour  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  on pose  $a^b = e^{b \ln a}$

Grâce aux propriétés algébriques des fonctions logarithme et exponentielle on montre alors facilement que les propriétés usuelles des exposants entiers ou rationnels s'étendent aux exposants réels en général :

Pour  $a > 0, a' > 0, b \in \mathbb{R}$  et  $b' \in \mathbb{R}$ ,

$$1^b = 1, \quad ((a^b)^{b'}) = a^{b'b'}, \quad a^b a^{b'} = a^{b+b'}, \quad \frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}, \quad (a a')^b = a^b a'^b, \quad \left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}$$

### 5.4.2 Fonctions puissances $x^\alpha$ , avec $\alpha \in \mathbb{R}$ . Fonctions racines $n$ -ièmes

**Définition 5.4.1.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On appelle *fonction puissance  $\alpha$*  la fonction, que nous noterons  $h_\alpha$ , définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h_\alpha(x) = x^\alpha$  :

$$h_\alpha(x) = x^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} e^{\alpha \ln x}$$

**Proposition 5.4.1.** La fonction  $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .

En effet, pour  $x > 0$  :  $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ .

Le comportement de la fonction puissance dépend donc du signe de  $\alpha$  mais pour  $\alpha > 0$  il dépend aussi de la position de  $\alpha$  par rapport à 1. Une bonne façon de retenir l'ensemble consiste à penser aux cas usuels  $\alpha = -1$  (pour  $\alpha < 0$ ),  $\alpha = 1/2$  (i.e.  $\sqrt{x}$ , pour  $0 < \alpha < 1$ ) et  $\alpha = 2$  (pour  $\alpha > 1$ ).

- Si  $\alpha < 0$  :

$h$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} h_\alpha(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_\alpha(x) = 0$ .

On peut alors prolonger  $h_\alpha$  par continuité en  $x = 0$  en posant  $h_\alpha(0) = 0$ .

- Si  $\alpha > 0$  :

$h$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} h_\alpha(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_\alpha(x) = +\infty$ .

— Si  $\alpha \in ]0, 1[$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} h'_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha x^{\alpha-1} = +\infty$ , donc la courbe de la fonction  $h_\alpha$  prolongée en 0 présente une tangente verticale en  $x = 0$ .

— Si  $\alpha > 1$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha x^{\alpha-1} = 0$ , donc la courbe de la fonction  $h_\alpha$  prolongée en 0 présente une tangente horizontale en  $x = 0$ .

**Remarque 5.4.1.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h_\alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$

Dans le premier cas, la fonction  $h_\alpha$  croît moins vite que  $x$  en  $+\infty$ , dans le second il croît plus vite. Graphiquement cela se traduit par une « branche infinie » du type « branche parabolique » tournée respectivement dans la direction  $Ox$  et  $Oy$ , comme dans les cas  $x^{1/2} = \sqrt{x}$  et  $x^2$ .

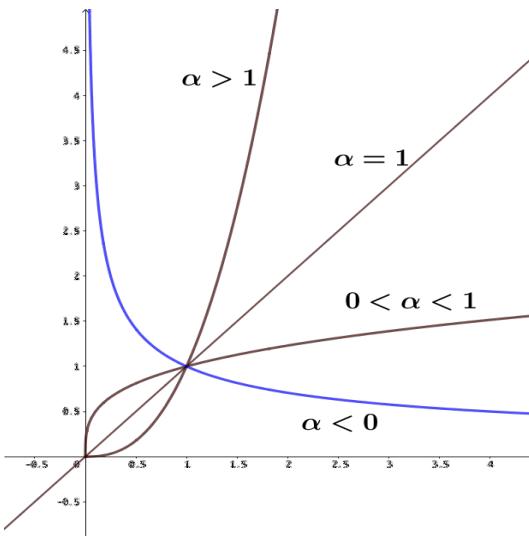


FIGURE 5.3 – Fonctions puissances  $h_\alpha$

**Proposition 5.4.2** (Croissances comparées). Si  $\alpha > 0$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

Cette règle peut être retenue de la façon suivante :

« En cas de forme indéterminée, c'est l'exponentielle de  $x$  qui l'emporte sur les puissances de  $x$  qui elles même l'emportent sur le logarithme de  $x$  »

**Proposition 5.4.3** (Dérivée de  $u^\alpha$ ). Si  $u : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto u(x) \end{cases}$  est une fonction dérivable sur  $I$ , alors

$f : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto f(x) = u(x)^\alpha \end{cases}$  est dérivable sur  $I$  et

$$f'(x) = (u(x)^\alpha)' = \alpha u(x)^{\alpha-1} u'(x)$$

**ATTENTION :** ne pas confondre  $x \mapsto x^a$  et  $x \mapsto a^x$ .

Par exemple, si  $f(x) = 2^x = e^{x \ln 2}$ , on a  $f'(x) = e^{x \ln 2} \ln 2 = 2^x \ln 2$ , tandis que  $(x^2)' = 2x$ .

De façon générale :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = a^x \ln a \quad \text{et} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0, (x^a)' = a x^{a-1}}$$

**Définition 5.4.2.** La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ , où  $a > 0$ , s'appelle la fonction exponentielle de base  $a$ . Pour  $a = e$  on retrouve l'exponentielle usuelle.

On s'intéresse enfin aux fonctions racines  $n$ -ièmes, parmi lesquelles se trouve la fonction racine carrée bien connue. La définition suivante s'appuie sur le fait que pour  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $X \mapsto X^n$  est une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$  :

**Définition 5.4.3.** Pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $x \geq 0$ ,  $\sqrt[n]{x}$  est l'unique réel  $X \geq 0$  tel que  $X^n = x$ .

Pour  $x > 0$  on vérifie immédiatement que :

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln x}$$

La fonction racine carrée correspond à  $n = 2$  (on écrit alors plus simplement  $\sqrt{x}$ ). On rappelle à son sujet la propriété très importante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|.$$

Le résultat suivant est un cas particulier de la proposition 5.4.3. On l'énonce tout de même en raison de son importance :

**Proposition 5.4.4.** Pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  la fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

On notera bien que **ces fonctions ne sont pas dérivables en zéro**.

**Exemples :**  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ .

**Remarque 5.4.2.** Lorsque  $\alpha$  est un entier strictement positif, la fonction  $x^\alpha$  est bien sûr définie sur  $\mathbb{R}$  au sens usuel (produit de  $\alpha$  réels égaux à  $x$ ) et si  $\alpha$  est un entier strictement négatif,  $x^\alpha$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  comme inverse de  $x^{-\alpha}$ . On vient de voir que les fonctions  $x^{\frac{1}{n}}$  sont définies pour  $x > 0$ .

**La définition donnée plus haut est la seule qui convienne dans tous les cas, pour  $x > 0$ .**

## 5.5 Fonctions trigonométriques

### 5.5.1 Définition des fonctions trigonométriques

Soit  $x$  un réel. Le plan étant orienté, on peut lui associer un unique point  $M$  du cercle trigonométrique  $\mathcal{C}(0, 1)$  tel que  $x$  soit une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$  : voir figure 5.4 ci-dessous.

**Définition 5.5.1.**

Les fonctions cosinus et sinus sont les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui à tout réel  $x$  associent respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point  $M$  du cercle  $\mathcal{C}(0, 1)$  défini par  $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}) = x [2\pi]$ .

Sur la figure 5.4 on a donc  $\cos x = \overline{OC}$ ,  $\sin x = \overline{OS}$  et le théorème de Pythagore dans le triangle  $OMC$  donne une première relation :  $OM^2 = 1 = OC^2 + OS^2 \Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

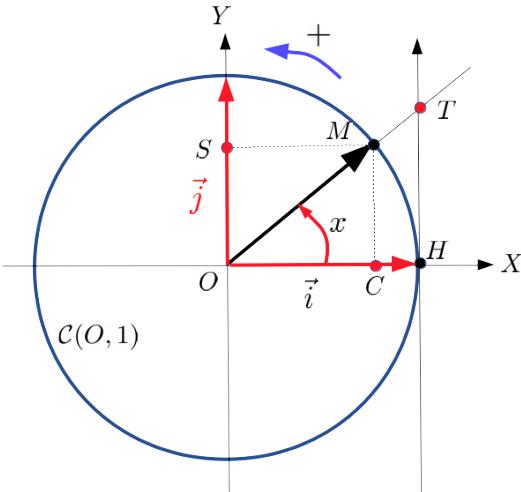


FIGURE 5.4 – Cercle trigonométrique

On retiendra les « lignes trigonométriques » usuelles vues au lycée :

| $\theta$      | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|
| $\cos \theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | -1    |
| $\sin \theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0     |
| $\tan \theta$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $+\infty$       | 0     |

- La fonction **sinus**, notée  $\sin$  est une fonction périodique de période  $2\pi$ , continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x)' = \cos x$$

- La fonction **cosinus**, notée  $\cos$ , est une fonction périodique de période  $2\pi$ , continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos x)' = -\sin x$$

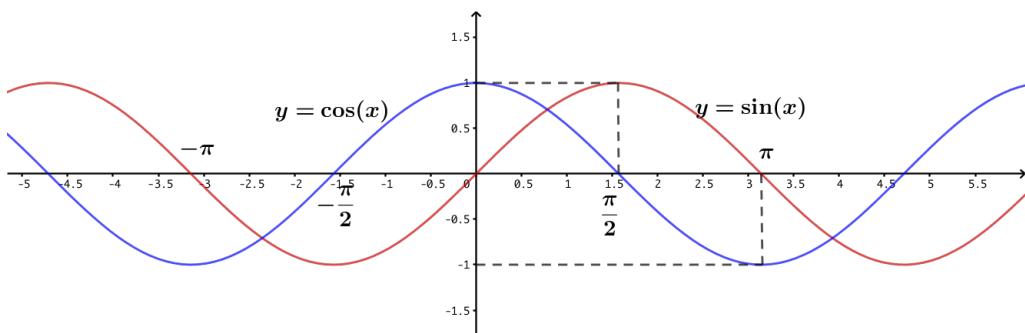


FIGURE 5.5 – Fonctions sinus et cosinus

### Définition 5.5.2.

La fonction **tangente**, notée  $\tan$ , est la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$  par  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .

Le domaine exclut les réels  $x$  qui annulent  $\cos x$ .

Sur la figure 5.4 on a, grâce au théorème de Thalès :  $\tan x = \frac{HT}{OT}$ .

**Proposition 5.5.1.** *La fonction **tangente** est une fonction périodique de période  $\pi$ , continue et dérivable sur son domaine. Sa dérivée est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Cette fonction est donc strictement croissante sur tout intervalle de son domaine.

On vérifie sans peine, à partir de la définition et avec les théorèmes usuels sur les limites, que

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$$

il en résulte que la fonction  $\tan$  définit une bijection strictement croissante de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ .

Les droites  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sont asymptotes verticales à la courbe.

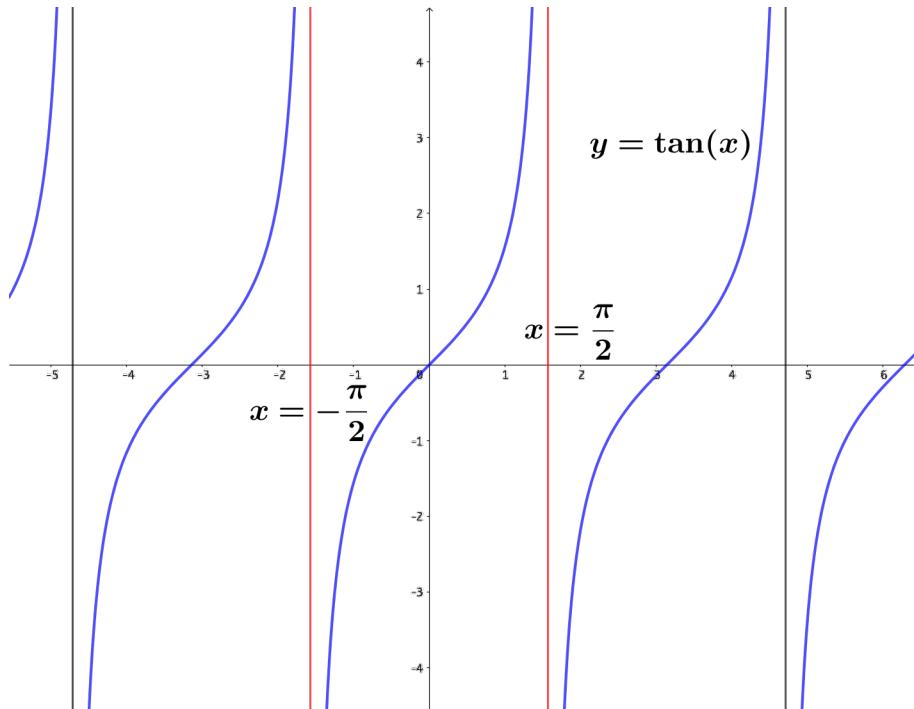


FIGURE 5.6 – Fonction tangente

### 5.5.2 Formulaire

Toutes les formules trigonométriques se retrouvent à partir d'un petit nombre d'entre elles.

Ce premier groupe de formules se retrouve aisément à l'aide du cercle trigonométrique :

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x, & \cos(-x) &= \cos x, \\ \sin(x + \pi) &= -\sin x, & \cos(x + \pi) &= -\cos x, \\ \sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x, \\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \cos x, & \cos(x + \frac{\pi}{2}) &= -\sin x, \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) &= \cos x, & \cos(\frac{\pi}{2} - x) &= \sin x.\end{aligned}$$

La définition de la tangente :  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  permet de retrouver les formules analogues la concernant (voir ci-dessous).

Il est recommandé de mémoriser les cinq formules suivantes, si possible en les visualisant telles qu'écrites ci-dessous :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1, \tag{5.1}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \tag{5.2}$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, \tag{5.3}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \tag{5.4}$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \tag{5.5}$$

Elles permettent de retrouver toutes les autres formules à l'aide de calculs simples. C'est un exercice à faire plusieurs fois jusqu'à maîtriser ces calculs. Une autre méthode consiste à utiliser les nombres complexes (voir chapitre 4).

**Exemples de calculs :**

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad (\text{diviser numérateur et dénominateur par le produit } \cos a \cos b),$$

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a,$$

- Pour transformer  $\cos a \times \cos b$  sous forme d'une somme, il suffit d'ajouter membre à membre les égalités (5.2) et (5.3) et on obtient :  $\cos a \times \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$ .

On obtient ainsi le groupe de formules :

$$\begin{aligned}\cos a \times \cos b &= \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) & \sin a \times \sin b &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin a \times \cos b &= \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))\end{aligned}$$

- Pour transformer  $\cos p + \cos q$  sous forme d'un produit, on utilise à nouveau (5.2) et (5.3) en les ajoutant :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b.$$

On pose alors  $\begin{cases} a+b = p \\ a-b = q \end{cases}$  soit, de manière équivalente :  $\begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$ ,

$$\text{ce qui donne : } \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

On obtient ainsi le groupe de formules :

|   |  |
|---|--|
| $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ | $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ |
| $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ | $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$  |

- Autres formules usuelles :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x, & \sin(2x) &= 2 \cos x \sin x, \\ &= 2 \cos^2 x - 1, & \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \\ &= 1 - 2 \sin^2 x, \end{aligned}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

ou, de façon équivalente :

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

Si, pour  $x \neq \pi + 2k\pi$ , on pose  $t = \tan \frac{x}{2}$ , on a :

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\text{Par exemple : } \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

et on divise numérateur et dénominateur par  $\cos^2 \frac{x}{2}$  ...

### 5.5.3 Résolution d'équation et d'inéquations

$$\cos x = \cos \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2\ell\pi \text{ avec } (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2\ell\pi \text{ avec } (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Soit  $\alpha \in [0, \pi]$ . Alors :  $\cos x \geq \cos \alpha \iff x \in [-\alpha + 2k\pi, \alpha + 2k\pi]$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Alors :  $\sin x \geq \sin \alpha \iff x \in [\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi]$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exemple d'équation :**  $\cos x + \cos 2x = 0$  sur  $]-\pi, \pi]$ .

*Première méthode*

$$\cos x + \cos 2x = 0 \iff \cos 2x = -\cos x \iff \cos 2x = \cos(x + \pi)$$

On a donc :

$$2x = x + \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -x - \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

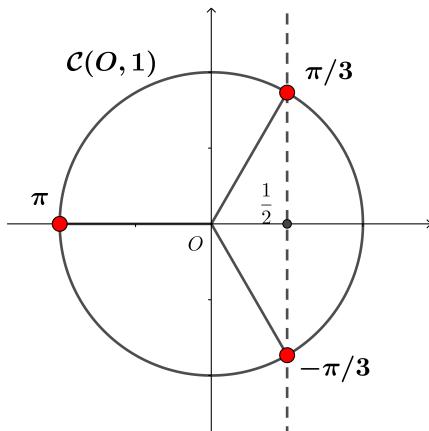
Soit :

$$x = \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sur  $]-\pi, \pi]$ , on obtient  $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \pi\right\}$

**Remarque :** la première famille de solutions est contenue dans la deuxième. En effet, en prenant  $k = 2 + 3\ell$  dans la deuxième, ( $\ell \in \mathbb{Z}$ ) on obtient  $x = \pi + 2\ell\pi$ .

On le voit plus simplement avec les points images des solutions :



**Deuxième méthode :** changement d'inconnue

On a  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$  donc, en posant  $X = \cos x$ , on est ramené à résoudre l'équation

$$2X^2 + X - 1 = 0$$

Les solutions sont  $X_1 = -1$  et  $X_2 = \frac{1}{2}$  et résout ensuite successivement les équations

$$\cos x = -1 \text{ et } \cos x = \frac{1}{2}$$

Sur  $]-\pi, \pi]$ , on obtient à nouveau  $\left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \pi\right\}$

**Troisième méthode :** transformation de somme en produit

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 2x = 0 &\iff 2 \cos\left(\frac{x+2x}{2}\right) \cos\left(\frac{x-2x}{2}\right) = 0 \\ &\iff 2 \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ &\iff \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ &\iff \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \end{aligned}$$

Sur  $]-\pi, \pi]$ , on retrouve bien  $\left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \pi\right\}$

**Exemple d'inéquation :**  $\cos x + \cos 2x \geq 0$  sur l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ .

Le changement d'inconnue  $X = \cos x$  vu auparavant nous ramène à l'inéquation  $2X^2 + X - 1 \geq 0$ .

En appliquant la règle sur le signe du trinôme on obtient  $X \leq -1$  ou  $X \geq \frac{1}{2}$ . Ensuite :

$$\cos x \leq -1 \iff \cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x \geq \frac{1}{2} \iff \cos x \geq \cos \frac{\pi}{3} \iff x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right].$$

L'ensemble des solutions sur  $]-\pi, \pi]$  est  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \{\pi\}$ .

On peut aussi reprendre la factorisation issue de la transformation de somme en produit et faire un tableau de signes en s'aider du cercle trigonométrique.

$$\cos x + \cos 2x \geq 0 \iff 2 \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$$

|                                 | $x$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\pi$ |
|---------------------------------|-----|--------|------------------|-----------------|-------|
| $\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ |     | -      | 0                | +               | 0     |
| $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$  |     | +      | +                | +               | 0     |
| $\cos x + \cos(2x)$             |     | -      | 0                | +               | -     |

On retrouve l'ensemble  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \{\pi\}$ .

# Chapitre 6

## Limites et continuité

L'objectif de ce chapitre est de consolider et compléter des notions utilisées dans les classes de lycée.

### 6.1 Généralités

- **Fonctions majorées, minorées, bornées**

**Définition 6.1.1.** Une fonction réelle définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$  est dite majorée sur  $D$  si l'ensemble  $f(D)$  est une partie majorée de  $\mathbb{R}$ , c'est à dire si :  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq M$ .

On définit les notions de fonction minorée, bornée sur le même modèle :

$f$  minorée :  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \geq m$ .

$f$  bornée :  $f$  majorée et minorée, i.e.  $\exists (m, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall x \in D, m \leq f(x) \leq M$ .

On dit que  $M$  est un majorant et  $m$  un minorant de la fonction.

Il n'y a pas unicité des minorants et des majorants.

Une façon équivalente d'écrire qu'une fonction est bornée :

**Proposition 6.1.1.**  $f$  bornée sur  $D \iff \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, |f(x)| \leq A$

**Exemples** : la fonction  $x \mapsto \cos x$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  : on a  $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| \leq 1$ . La fonction  $x \mapsto \ln x$  n'est ni majorée ni minorée sur son domaine  $\mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est minorée (par 0) mais non majorée sur  $\mathbb{R}_+$ . La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est bornée sur  $[1, 2]$  mais pas sur  $]0, +\infty[$ .

- **Borne supérieure, borne inférieure d'une fonction**

**Définition 6.1.2.** Si l'ensemble  $f(D)$  admet une borne supérieure  $S$  dans  $\mathbb{R}$  alors on dit que  $S$  est la borne supérieure de  $f$  et on note  $S = \sup_{x \in D} f(x)$  ou même  $S = \sup_D f$ .

Cela signifie que  $S$  est un majorant de  $f$  et que, si  $M$  est un majorant de  $f$ , on a  $S \leq M$ . Ou encore :

$$\forall x \in D, f(x) \leq S \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists x \in D, S - \varepsilon < f(x) \leq S \quad (6.1)$$

On définit la borne inférieure de  $f$  suivant le même modèle.

**Attention** : la borne inférieure et la borne supérieure n'existent pas toujours.

Si elles existent, elles sont uniques.

Si une fonction n'est pas majorée (resp. minorée) sur  $D$ , on écrit éventuellement :  $\sup_D f = +\infty$  (resp.  $\inf_D f = -\infty$ ).

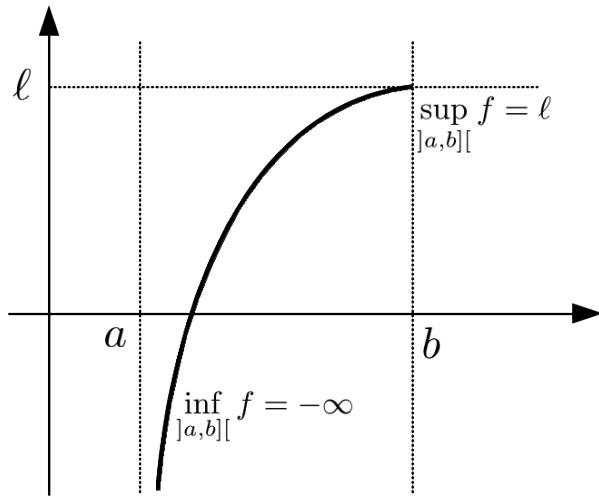


FIGURE 6.1 – Exemple de bornes supérieures et inférieures pour une fonction croissante

## 6.2 Définitions des limites et de la continuité

La notion de limite (qui inclus celle de continuité comme cas particulier) a été abordée au lycée d'un point de vue intuitif. Quitte à admettre un certain nombre de résultats, ce que nous continuerons largement à faire dans ce cours introductif, on a les outils suffisants pour déterminer effectivement des limites dans les cas usuels.

Toutefois, des expressions telles que :

Quand  $x$  se rapproche de 0,  $f(x)$  se rapproche aussi de 0,

ou encore :

si on veut que  $f(x)$  soit très proche de 0, il suffit de prendre  $x$  suffisamment proche de 0,

censées exprimer que  $f$  admet pour limite 0 en  $x = 0$  sont au mieux beaucoup trop vagues et, en fait, incorrectes. Comme on l'a vu au chapitre 1, une expression mathématique doit être dépourvue de toute ambiguïté et permettre de s'insérer dans des démonstrations.

### 6.2.1 Limite finie en un point $a$

Dans ce paragraphe,  $f$  est une fonction réelle définie sur  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  est un réel qui possède la propriété suivante :

$$a \in D \text{ ou } (\forall \varepsilon > 0, D \cap ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \neq \emptyset). \quad (6.2)$$

**On dit alors que  $a$  est dans l'adhérence de  $D$  et on écrit  $a \in \overline{D}$ .**

Cela signifie que si  $f$  n'est pas définie en  $a$ , elle doit être définie en des points arbitrairement proches de  $a$  : il faut pouvoir « faire tendre  $x$  vers  $a$  » en restant dans le domaine de  $f$ .

**En pratique  $f$  sera définie au moins sur un intervalle dont  $a$  est une borne ou sur un intervalle ouvert contenant  $a$ .**

**Exemples :**  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $a = 0$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $a = 3$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x - 1}$  et  $a = 1$ . Par contre chercher la limite de  $\sqrt{x}$  en  $a = -1$  n'a aucun sens.

**Définition 6.2.1.** Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  admet pour limite  $\ell$  en  $a$  (ou que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$ ) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon). \quad (6.3)$$

**Explication :** quel que soit le réel strictement positif  $\varepsilon$  donné, même très petit, on doit pouvoir relever le défi suivant : trouver un intervalle  $[a - \alpha, a + \alpha]$  sur lequel  $f(x)$  et  $\ell$  seront distants de moins de  $\varepsilon$  (avec  $x \in D$ , bien sûr).

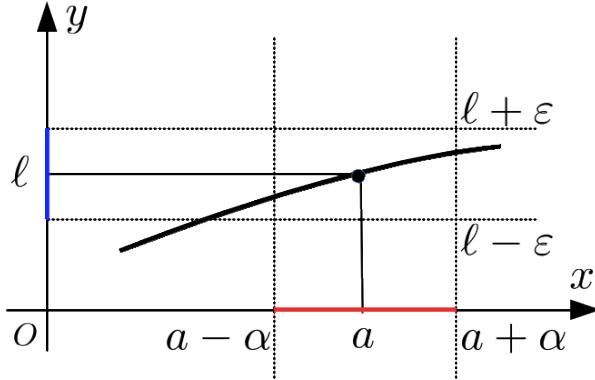


FIGURE 6.2 – Limite finie en un point

**Notation :**  $\lim_a f = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  (ne pas mélanger les deux).

- **Exemples usuels :**  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto x^3$ ,  $x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$  : toutes ces fonctions ont pour limite 0 en  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$

**Remarque :** la notation  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell^+$  signifie que l'on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  et  $f(x) \geq \ell$  « au voisinage de  $a$  », c'est à dire sur au moins un ensemble  $D \cap [x - \alpha, x + \alpha]$  avec  $\alpha > 0$ .

« On dit :  $f(x)$  tend vers  $\ell$  par valeurs supérieures quand  $x$  tend vers  $a$  »

- Lorsque  $f$  admet une limite en un point  $a$  de son domaine ( $a \in D$ ), la situation peut être précisée :

**Proposition 6.2.1.** Si une fonction  $f$  admet une limite  $\ell$  en un point  $a$  de son domaine, alors  $\ell = f(a)$

On dit alors que  $f$  est continue en  $a$ . Ceci fait l'objet d'une autre section.

**Preuve :** soit  $\varepsilon > 0$  (cette expression sous-entend que  $\varepsilon$  est quelconque). D'après (6.3) il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x \in D, (|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon),$$

or, pour  $x = a$  on a  $|x - a| = 0 \leq \alpha$ , donc nécessairement  $|f(a) - \ell| \leq \varepsilon$ . Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, |f(a) - \ell| \leq \varepsilon,$$

ce qui équivaut à  $|f(a) - \ell| = 0$  (voir la propriété (1.1) prouvée au chapitre 1), c'est à dire  $f(a) = \ell$ . ■

- **Limite à droite, limite à gauche** : on obtient ces notions en remplaçant dans la relation de définition (6.3) le terme  $|x-a| \leq \alpha$ , c'est à dire aussi  $a-\alpha \leq x \leq a+\alpha$ , respectivement par  $a < x \leq a+\alpha$ ,  $a-\alpha \leq x < a$ . Ainsi, par exemple :

**Définition 6.2.2.** Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  admet  $\ell$  pour limite à gauche en  $a$  (ou que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  par valeurs inférieures) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (a - \alpha \leq x < a \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon). \quad (6.4)$$

On remarquera que  $x = a$  n'est pas concerné.

**Exercice** : écrire la définition de la limite à droite.

**Notations** :  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$  pour la limite à droite et  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$  pour la limite à gauche.

**Exemple** :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0$  ( $E$  est la fonction *partie entière*).

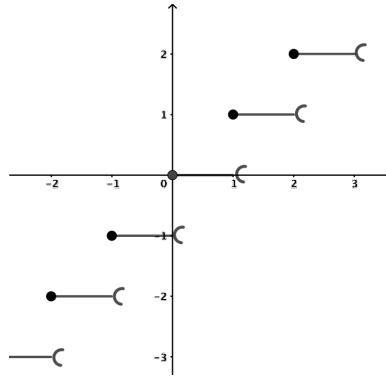


FIGURE 6.3 – Fonction partie entière

À titre d'exemple, nous donnons le résultat suivant, illustré figure 6.1 :

**Proposition 6.2.2.** Soit  $f$  une fonction croissante sur un intervalle  $]a, b[$  et majorée. Alors  $f$  admet une limite à gauche en  $b$  donnée par  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{]a, b[} f$ .

**Preuve** :  $f(]a, b[)$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et, par hypothèse, majorée, elle admet donc une borne supérieure  $\ell = \sup_{]a, b[} f$ . Montrons que  $\ell$  est la limite de  $f$  à gauche en  $b$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  : d'après la caractérisation de la borne supérieure (6.1) il existe un réel  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $\ell - \varepsilon < f(x_0) \leq \ell$ . Comme  $f$  est croissante et majorée par  $\ell$  on a :

$$\forall x \in ]a, b[, x \geq x_0 \implies \ell - \varepsilon < f(x) \leq \ell.$$

Posons  $\alpha = b - x_0$ , alors d'après ce qui précède :

$$\forall x \in ]a, b[, b - \alpha \leq x < b \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Le réel  $\varepsilon > 0$  étant a priori quelconque, on en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in ]a, b[, b - \alpha \leq x < b \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

et ceci établit le résultat annoncé. ■

Le lien entre ces notions est précisé dans la proposition suivante :

**Proposition 6.2.3.**

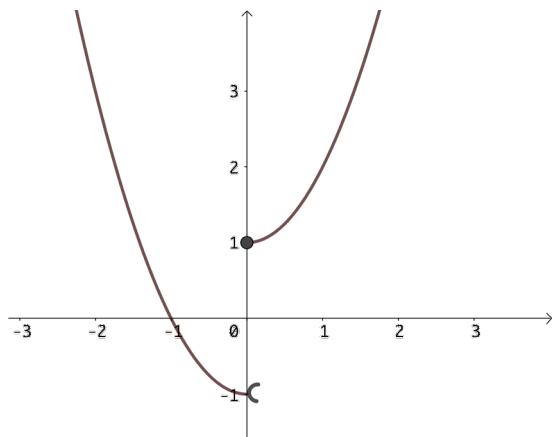
Si  $f$  n'est pas définie en  $a$  alors  $f$  admet une limite en  $a$  si et seulement si  $f$  admet des limites à droite et à gauche en  $a$  qui sont égales, on a alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

Si  $f$  est définie en  $a$  alors  $f$  admet une limite en  $a$  si et seulement si  $f$  admet des limites à droite et à gauche en  $a$  qui sont égales à  $f(a)$ .

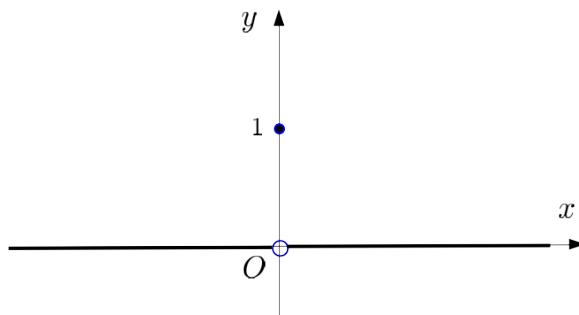
Cette caractérisation de la limite permet de prouver qu'une limite n'existe pas. Par exemple, **si on trouve deux limites différentes à gauche et à droite en  $a$ , alors la limite en  $a$  n'existe pas.**

**Exemples :**

1. La fonction partie entière  $E$  n'a pas de limite en  $a = 1$  (voir exemple précédent). En fait elle n'a pas de limite aux points de  $\mathbb{Z}$ .
2. La fonction  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - 1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$  n'admet pas de limite en 0 car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ .



3. Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(0) = 1$  et  $f(x) = 0$  pour tout réel  $x \neq 0$  : on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  et cependant la limite en zéro n'existe pas (ce devrait être  $1 = f(0)$ ).



**Remarque 6.2.1.** Ce dernier exemple peut dérouter : on aimeraient pouvoir dire que la limite de  $f$  en zéro est  $\ell = 0$ . Ceci est le résultat d'un choix dans la façon de définir la limite en un point (inégalité  $|x - a| \leq \alpha$  plutôt que  $0 < |x - a| \leq \alpha$  dans (6.3)), choix qui n'a pas toujours été celui-ci dans le passé. L'une de ses raisons d'être est la forme simple que prend le résultat 6.3.1 sur la limite d'une fonction composée qui, sinon, exige des précautions un peu lourdes). **Notons que ces subtilités n'ont pas à être prises en compte dès que  $f$  n'est pas définie en  $a$ , ce qui est le cas de la majorité**

## des situations intéressantes.

Pour pallier ce petit désagrément on a la notion de limite suivant une partie, que vous avez déjà utilisée sans l'avoir formulée précisément ni nommée comme telle :

**Définition 6.2.3.** Soient  $A \subset \mathbb{R}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  admet pour limite  $\ell$  en  $a$  suivant  $A$  (ou que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$ ,  $x$  appartenant à  $A$ ) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{D}, (|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon). \quad (6.5)$$

On écrit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \ell$ .

**Exemples :**

- Reprenons la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^*$  et valant 1 en  $x = 0$  : il n'y a pas de limite en 0 mais on a  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}^*}} f(x) = 0$ , que l'on écrit usuellement  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$ .
- Anticipons sur la définition du nombre dérivé en un point  $a$  (chapitre 7) :

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ici  $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ .

- Dérivée à droite en  $a$  : c'est la limite en  $a$  suivant  $A = ]a, +\infty[$ .
- Dérivée à gauche en  $a$  : c'est la limite en  $a$  suivant  $A = ]-\infty, a[$ .

### 6.2.2 Limite infinie en un point $a$

Dans ce paragraphe on garde les mêmes hypothèses sur  $f$ .

**Définition 6.2.4.**

On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$  si elle satisfait la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \alpha \implies f(x) \geq A). \quad (6.6)$$

On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $a$  si elle satisfait la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \alpha \implies f(x) \leq A). \quad (6.7)$$

**Remarque 6.2.2.**

- Dans le premier cas on peut se restreindre à  $A > 0$  et dans le second à  $A < 0$ .
- On peut définir des limites infinies en  $a$  en se ramenant à la limite nulle en  $a$  :
 
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0^-$$
- Il résulte des définitions que si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  ou  $+\infty$  alors  $f$  ne peut pas être définie en  $a$ .

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .

- On peut encore parler de limite à gauche et de limites à droite. Par exemple :

**Définition 6.2.5.**

On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  à gauche en  $a$  si elle satisfait la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (a - \alpha \leq x < a \implies f(x) \geq A). \quad (6.8)$$

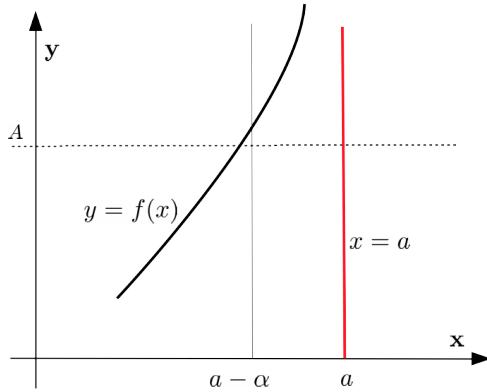


FIGURE 6.4 – Limite infinie à gauche en un point

**Exemples :**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ , donc la limite de  $\frac{1}{x}$  quand  $x$  tend vers 0 n'existe pas.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Une situation classique :

**Proposition 6.2.4.** Soit  $f$  une fonction croissante sur un intervalle  $]a, b[$  et non minorée, alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ . Si cette fonction est non majorée alors  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ .

La fonction représentée figure 6.1 relève de la première partie de cette proposition.

**Remarque 6.2.3.** On peut se ramener en  $a = 0$  en posant  $x = a + t$  : on a alors  $t$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$  et vice versa.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + t) = l$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + t) = +\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + t) = -\infty$ .

**Exemple :**  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$  en  $a = 1$ . On pose  $x = 1 + t$ .

$$f(x) = \frac{(1+t)^2 - 2(1+t) + 1}{(1+t)^2 - 3(1+t) + 2} = \frac{t^2}{t^2 - t} = \frac{t}{t-1}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t-1} = 0.$$

### 6.2.3 Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

On suppose ici, pour simplifier, que le domaine  $D$  de  $f$  contient un intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  (pour le cas d'une limite en  $+\infty$ ) ou de la forme  $] - \infty, a]$  (pour le cas d'une limite en  $-\infty$ ).

**Définition 6.2.6.** On dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $+\infty$  si elle satisfait la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, (x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon). \quad (6.9)$$

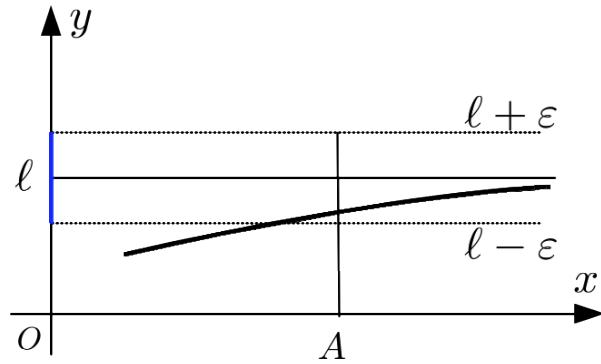


FIGURE 6.5 – Limite finie en  $+\infty$

**Définition 6.2.7.** On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  si elle satisfait la propriété :

$$\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, (x \geq A \implies f(x) \geq M). \quad (6.10)$$

**Remarque :** on peut se ramener au cas d'une limite en  $a = 0$  en posant  $x = \frac{1}{t}$ .

On a alors  $t$  tend vers  $0^+$  si et seulement si  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $t$  tend vers  $0^-$  si et seulement si  $x$  tend vers  $-\infty$ . Ainsi :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{t}) = l$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{t}) = +\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{t}) = -\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\frac{1}{t}) = l$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\frac{1}{t}) = +\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\frac{1}{t}) = -\infty$ .

**Exemples :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

#### 6.2.4 Continuité

**Définition 6.2.8.** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de domaine de définition  $D$  et  $a \in D$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $f$  admet une limite en  $a$ .

Compte tenu de ce qui a été vu précédemment on a des formulations équivalentes :

- $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- $f$  est continue en  $a$  si et seulement si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, (|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$ .

- **Continuité à gauche et à droite en un point :**

On dit que  $f$  est continue à gauche en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

On dit que  $f$  est continue à droite en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .

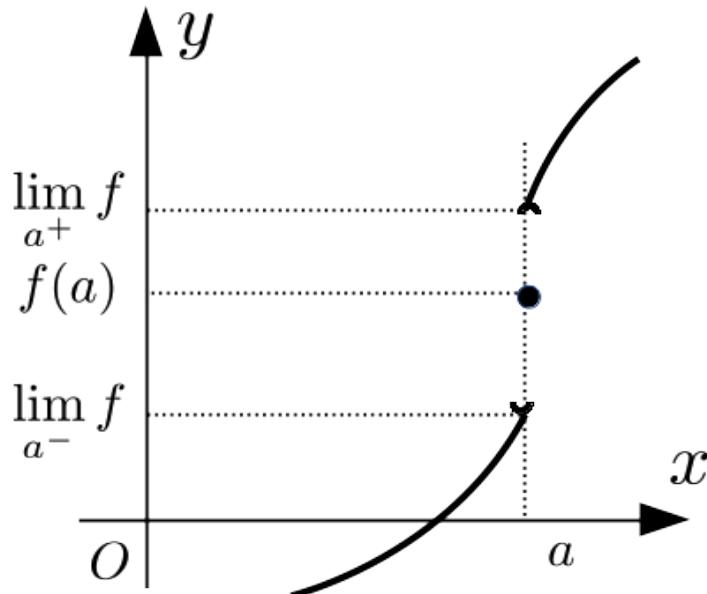


FIGURE 6.6 – Exemple de discontinuité en  $a$

- Prolongement par continuité :

**Proposition 6.2.5** (et définition). Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de domaine de définition  $D$  et  $a$  un réel tel que  $a \notin D$ . On suppose que  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$ . La fonction  $\bar{f} : D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\bar{f}(x) = f(x)$  si  $x \in D$  et  $\bar{f}(a) = \ell$  est continue en  $a$ . C'est l'unique fonction continue en  $a$  et coïncidant avec  $f$  sur  $D$  : on l'appelle « prolongement par continuité de  $f$  en  $a$  ».

C'est une conséquence immédiate de la définition de la limite en  $a$ . Il est souvent utile de considérer ce prolongement, que l'on note encore  $f$ , plutôt que  $\bar{f}$ , par abus d'écriture. On a également les notions de prolongement par continuité à gauche ou à droite...

**Exemple :** la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  peut se prolonger par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1$ .

- Continuité sur un intervalle :

**Définition 6.2.9.** On dit que  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  de bornes  $a = \inf I$  et  $b = \sup I$  si elle est continue en chaque point de l'intervalle ouvert  $]a, b[$ , continue à droite en  $a$  si  $a \in I$  et continue à gauche en  $b$  si  $b \in I$ .

- Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires :

Lorsqu'une fonction est continue sur un intervalle, le fait qu'elle "ne fasse pas de saut" se traduit par une propriété très importante en pratique. Si par exemple je relève une température de 15 degrés le matin et de 25 degrés le soir, je suis sûr qu'une température de 20 degrés a été atteinte au moins une fois dans la journée (on modélise la température par une fonction continue de la variable temps).

**Théorème 6.2.1** (th. des valeurs intermédiaires).

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  (de longueur non nulle),  $a, b$  deux éléments de  $I$  tels que  $a \leq b$ .

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $I$  alors  $f$  prend toutes les valeurs comprises entre  $f(a)$  et  $f(b)$  : si par ex. on a  $f(a) \leq f(b)$  alors

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \exists x \in [a, b], f(x) = y.$$

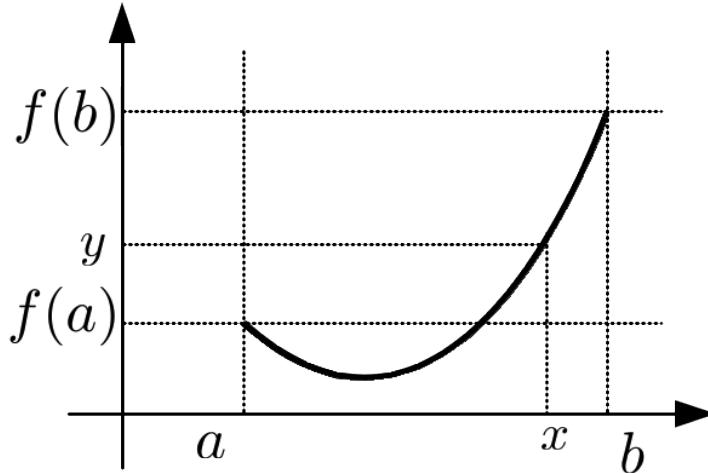


FIGURE 6.7 – Continuité et valeurs intermédiaires

- Cela permet d'affirmer l'existence d'au moins une solution  $x$  dans l'intervalle  $[a, b]$  de l'équation  $f(x) = y$  où  $y$  est donné.
- Si on sait que  $f$  est strictement croissante sur  $[a, b]$  (ou strictement décroissante), on en déduit que  $f(x) = y$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[a, b]$ .

On peut énoncer ce théorème sous une forme équivalente :

**Théorème 6.2.2** (th. des valeurs intermédiaires-bis).

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  (de longueur non nulle). Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $I$  alors  $f(I)$  est un intervalle.

**Corollaire 6.2.1.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $I$  et prend au moins une valeur positive et une valeur négative, alors elle s'annule sur  $I$  i.e. l'équation  $f(x) = 0$  a au moins une solution sur  $I$ .

- Continuité sur un segment

Le résultat, fondamental, est le suivant :

**Théorème 6.2.3.** Si  $f$  est une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ , alors l'image  $\mathbf{f}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$  de ce segment est un segment  $[\mathbf{m}, \mathbf{M}]$ .

**Commentaire-** Cela signifie trois choses :

1.  $f$  est bornée : on a en effet  $m \leq f \leq M$ ,
2.  $f$  atteint ses bornes : en effet, comme  $m, M \in f([a, b])$ , il existe des réels  $c$  et  $d$  dans  $[a, b]$  tels que  $f(c) = m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  et  $f(d) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ ,
3.  $f$  prend toutes les valeurs comprises entre ses bornes.

**En particulier :** une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  est bornée et atteint ses bornes.

## 6.3 Propriétés et détermination pratique

On énonce dans cette section des propriétés utilisées dans la pratique de la recherche des limites, qui évitent le recours aux définitions.

### 6.3.1 Changement de variable

On peut éventuellement se ramener en  $a = 0$  en faisant un changement de variable :

|                                     |                                   |  |
|-------------------------------------|-----------------------------------|--|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$       | : le changement $t = x - a$       | ramène à $\lim_{t \rightarrow 0} f(t + a)$         |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | : le changement $t = \frac{1}{x}$ | ramène à $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{t})$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | : le changement $t = \frac{1}{x}$ | ramène à $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\frac{1}{t})$ |

### 6.3.2 Opérations algébriques

#### Limite d'une somme

Soient  $l \in \mathbb{R}$ ,  $l' \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$ .

|                                     |          |           |           |           |           |           |
|-------------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$       | $l$      | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$       | $l'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $ND$      |

Cas indéterminé : «  $+\infty + -\infty$  »

#### Limite d'un produit

Soient  $l \in \mathbb{R}$ ,  $l' \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$ .

|                                  |       |           |           |           |           |           |           |           |             |
|----------------------------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$    | $l$   | $l > 0$   | $l > 0$   | $l < 0$   | $l < 0$   | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$         |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$    | $l'$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$ | $ll'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $ND$        |

Cas indéterminé : «  $0 \times \infty$  »

#### Limite d'un quotient

##### a) Cas où le dénominateur a une limite non nulle

Soient  $l \in \mathbb{R}$ ,  $l' \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$ .

|  |                |             |           |           |           |           |             |
|--|----------------|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$                        | $l$            | $l$         | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$                        | $l' \neq 0$    | $\pm\infty$ | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $\pm\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$         | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $ND$        |

Cas indéterminé : «  $\frac{\infty}{\infty}$ , »

**β) Cas où le dénominateur a une limite nulle**

Soient  $l \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$ .

|  |           |           |           |           |    |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|----|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$                        | $l > 0$   | $l > 0$   | $l < 0$   | $l < 0$   | 0  |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$                        | $0^+$     | $0^-$     | $0^+$     | $0^-$     | 0  |
| $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ND |

Cas indéterminé : «  $\frac{0}{0}$  »

### 6.3.3 Composition

**Proposition 6.3.1.** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(I) \subset J$ .

Soient  $a \in \bar{I}$  (cf. critère 6.2) et  $b \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell \implies \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell.$$

Ce résultat est valable avec  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$  et  $b = +\infty$  ou  $b = -\infty$  lorsque cela a un sens.

**Remarque 6.3.1.** On peut montrer que sous les hypothèses de cet énoncé, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  on a nécessairement  $b \in \bar{J}$  ce qui explique qu'il n'y ait aucune hypothèse particulière sur  $b$ .

**Exemples :**

- $F(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ ,  $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$ . ci  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $g(y) = \sqrt{y}$  et  $F = g \circ f$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$  et  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

- $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - 1}}$ ,  $\mathcal{D}_F = ]\frac{1}{3}, +\infty[$ .

Ici  $f(x) = 3x - 1$ ,  $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$  et  $F = g \circ f$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} 3x - 1 = 0^+$  et  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{y}} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} F(x) = +\infty$

### 6.3.4 Limites et comparaison

**Proposition 6.3.2.**

Si  $f \geq h$  sur  $]A, +\infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Si  $f \leq g$  sur  $]A, +\infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

**Exemple :**

$$f(x) = \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^2 + 1}}, \mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^4 + \frac{1}{x^2 + 1} \geq x^4$ , car  $\frac{1}{x^2 + 1} \geq 0$ .

D'où  $f(x) \geq \sqrt{x^4} = x^2$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**Proposition 6.3.3.** Si  $|f(x) - l| \leq u(x)$ , pour tout  $x \in ]A, +\infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

**Proposition 6.3.4** (Théorème des gendarmes).

Si  $h \leq f \leq g$  sur  $]A, +\infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ , alors  $f$  admet une limite en  $+\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

- Dans le cas de limites en  $-\infty$ , il suffit de remplacer, dans ces théorèmes,  $]A, +\infty[$  par  $]-\infty, A[$  et  $x \rightarrow +\infty$  par  $x \rightarrow -\infty$ .
- Dans le cas de limites en  $a \in \mathbb{R}$ , il suffit de remplacer, dans ces théorèmes,  $]A, +\infty[$  par  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  et  $x \rightarrow +\infty$  par  $x \rightarrow a$ .

### 6.3.5 Continuité en un point et opérations usuelles

**Proposition 6.3.5.** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  continues en  $a \in I$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Alors  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\lambda f$  et  $\frac{1}{f}$  sont continues en  $a$  (si  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ ).

**Proposition 6.3.6** (composition). Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in I$ .

Si  $f$  est continue en  $a$ ,  $f(I) \subset J$  et  $g$  continue en  $b = f(a)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

### 6.3.6 Exemples classiques

#### Fonctions polynomiales

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$  avec  $a_n \neq 0$  (on dit que  $f$  est de degré  $n$ ).

**Proposition 6.3.7.**

Les fonctions polynomiales sont continues en tout point  $a$  de  $\mathbb{R}$  :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . De plus :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \text{ si } a_n > 0 \\ &= -\infty \text{ si } a_n < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty \text{ si } a_n > 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ &= +\infty \text{ si } a_n < 0 \text{ et } n \text{ impair} \\ &= -\infty \text{ si } a_n > 0 \text{ et } n \text{ impair} \\ &= -\infty \text{ si } a_n < 0 \text{ et } n \text{ pair} \end{aligned}$$

On retiendra que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_nx^n$$

### Fonctions rationnelles

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_px^p}$  sous forme réduite (on ne peut pas simplifier).

#### Proposition 6.3.8.

Les fonctions rationnelles sont continues en tout point  $a$  de leur domaine :

si  $Q(a) \neq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . De plus :

- Si  $Q(a) = 0$  et  $P(a) \neq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ .
- Si  $n < p$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ .
- Si  $n > p$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ .
- Si  $n = p$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}$  (c'est le rapport des termes de plus haut degré).

De façon générale on retiendra que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + \cdots + b_px^p} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_nx^n}{b_px^p}$$

## 6.4 Une application à l'étude d'asymptotes

Il a été étudié dans les classes de lycée la notion d'asymptote à la courbe représentative d'une fonction  $f$  dans deux situations :

- une limite infinie en un point du bord du domaine de définition, ce qui conduit à l'existence d'une asymptote parallèle à  $Oy$ , ou « asymptote verticale »,
- une limite finie en  $+\infty$  ou  $-\infty$ , ce qui conduit à l'existence d'une asymptote parallèle à  $Ox$ , ou « asymptote horizontale ».

On se propose de généraliser cette notion au cas d'une asymptote éventuelle non parallèle aux axes : on parle « d'asymptote oblique ». Pour cela on considère une fonction réelle  $f$  définie sur un intervalle non borné, par exemple de la forme  $]x_0, +\infty[$ .

**Définition 6.4.1.** S'il existe des réels  $a$  et  $b$  et une fonction  $\varphi$  telle que  $f(x) = ax + b + \varphi(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$  alors on dit que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote en  $+\infty$  à la courbe  $\Gamma_f$  représentative de  $f$ .

**Interprétation :**  $ax + b$  est une approximation de  $f(x)$  au voisinage de  $+\infty$ , de même qu'une fonction affine tangente permet d'approcher la fonction au voisinage du point de tangence.

Il se peut que  $f(x)$  soit écrit sous cette forme, auquel cas (après avoir vérifié que la limite de  $\varphi$  est nulle), on conclut immédiatement. Notons que cette définition inclut le cas  $a = 0$  qui correspond à une limite finie et une asymptote horizontale. On obtient donc une asymptote non parallèle aux axes uniquement si  $a \neq 0$ , auquel cas  $f$  admet une limite infinie en  $+\infty$ .

Sur la figure 6.8 ci-dessous on a  $\varphi(x) = \overline{PM}$ .

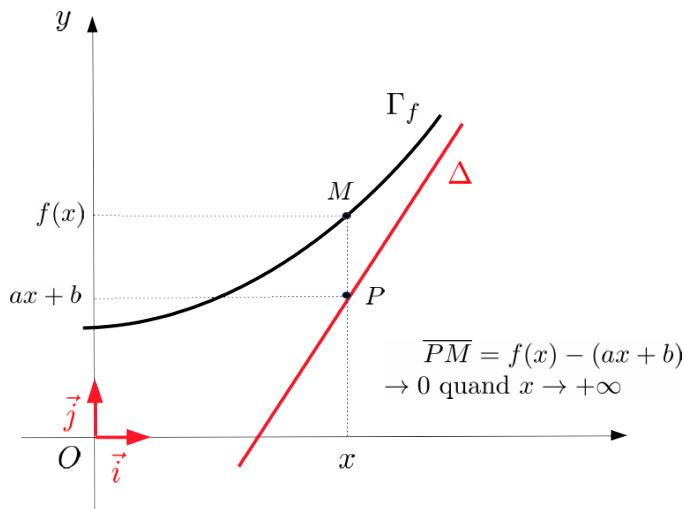
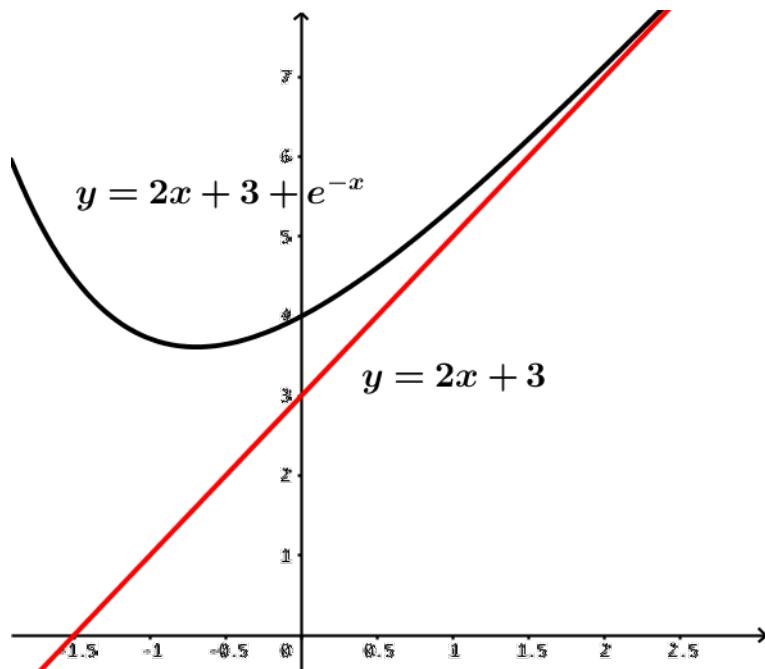


FIGURE 6.8 – Droite asymptote

**Exemple :**  $f(x) = 2x + 3 + e^{-x}$  en  $+\infty$  : on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  donc la droite d'équation  $y = 2x + 3$  est asymptote à la courbe en  $+\infty$ .



En général les réels  $a$  et  $b$  doivent être déterminés, s'ils existent.

**Proposition 6.4.1.** Si la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$  alors :

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$$

Réciproquement, si en  $+\infty$   $\frac{f(x)}{x}$  admet une limite finie non nulle  $a$  et si  $f(x) - ax$  admet une limite finie  $b$  alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe  $\Gamma_f$  représentative de  $f$ .

On peut étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote simplement en étudiant le signe de  $\overline{PM} = f(x) - (ax + b)$ .

#### Remarque 6.4.1.

- Il n'y a pas nécessairement d'asymptote oblique, même si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ou  $-\infty$ , en effet  $\frac{f(x)}{x}$  peut ne pas avoir de limite ou, dans le cas où  $a$  existe,  $f(x) - ax$  peut ne pas avoir de limite.

**Exemples :**  $f(x) = x \sin x$  en  $+\infty$  pour laquelle  $\frac{f(x)}{x}$  n'a pas de limite (voir figure 6.9), et  $f(x) = x + 3\sqrt{x}$  pour laquelle  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  mais  $f(x) - x$  n'a pas de limite finie (voir figure 6.10).

- Enfin on se gardera de croire naïvement qu'une courbe qui admet une droite asymptote en  $+\infty$ , par exemple, « tend vers son asymptote sans jamais la rattraper ». C'est une vision romantique qu'il faut abandonner.

**Exemple :**  $f(x) = x + 3 \frac{\sin 3x}{x}$ . La droite d'équation  $y = x$  est asymptote en  $+\infty$  : voir figure 6.11

- Ce qui précède s'adapte immédiatement au cas où  $x \rightarrow -\infty$ .

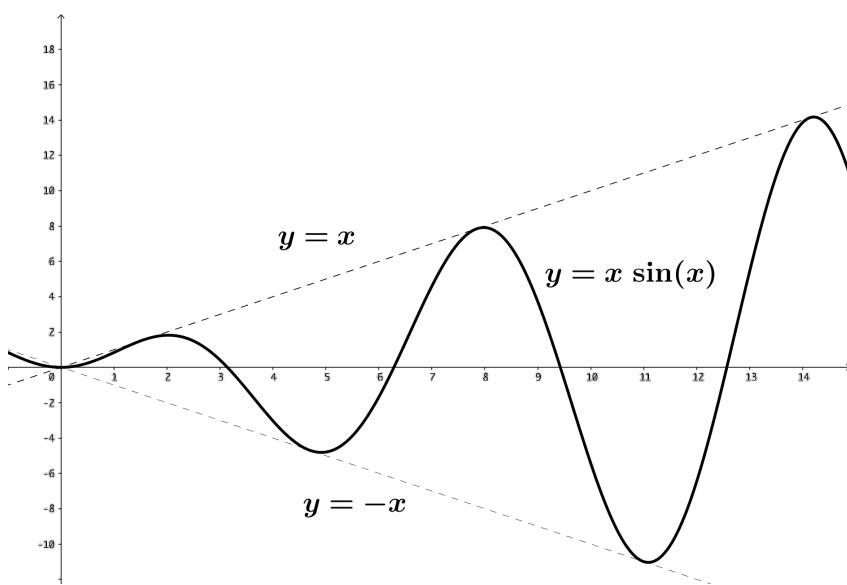


FIGURE 6.9 –  $f(x) = x \sin x$  en  $+\infty$

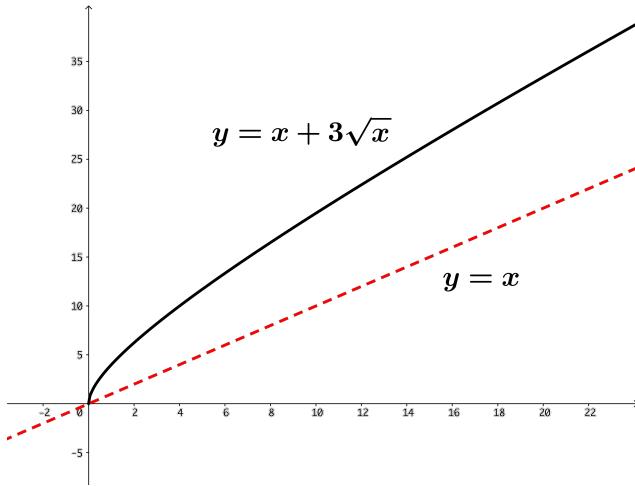


FIGURE 6.10 –  $f(x) = x + 3\sqrt{x}$  en  $+\infty$

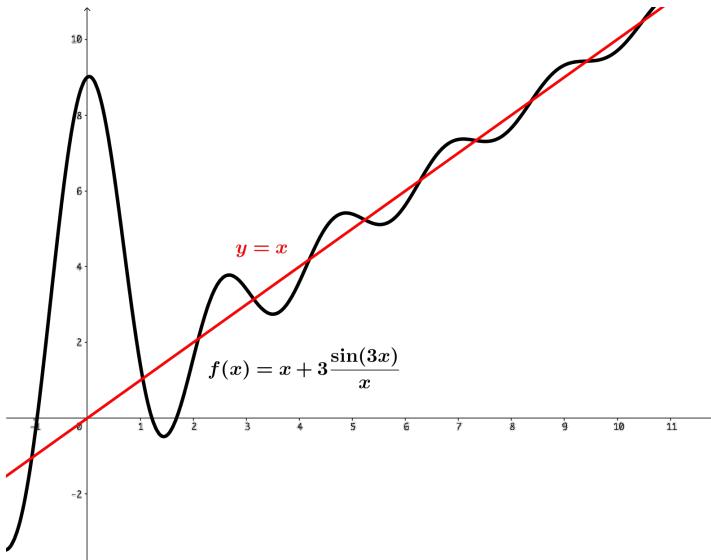


FIGURE 6.11 –  $f(x) = x + 3 \frac{\sin 3x}{x}$  en  $+\infty$

Nous terminons par un exemple d'étude de fonction illustrant ce qui précède .

#### Un exemple d'étude complète :

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{3(x+1)}$$

- Ensemble de définition :  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty]$ .
- Pas de parité ni de périodicité pour cette fonction.
- Branches infinies :
  - ◊ quand  $x \rightarrow -1$  : asymptote verticale  $x = -1$

◊ quand  $x \rightarrow +\infty$  : on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On recherche une asymptote oblique éventuelle. On calcule alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^2}{3x(x+1)} = \frac{1}{3} \text{ (rapport des termes de plus haut degré), donc } a = \frac{1}{3}.$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}f(x) - ax &= f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{(x+2)^2 + x(x+1)}{3(x+1)} \\&= \frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 - x}{3(x+1)} = \frac{3x+4}{3(x+1)} \rightarrow 1 \text{ quand } x \rightarrow +\infty\end{aligned}$$

Donc  $b = 1$

On a donc une asymptote  $y = \frac{1}{3}x + 1$  en  $+\infty$ . On a le même résultat en  $-\infty$ .

On peut étudier la position du graphe par rapport à l'asymptote.

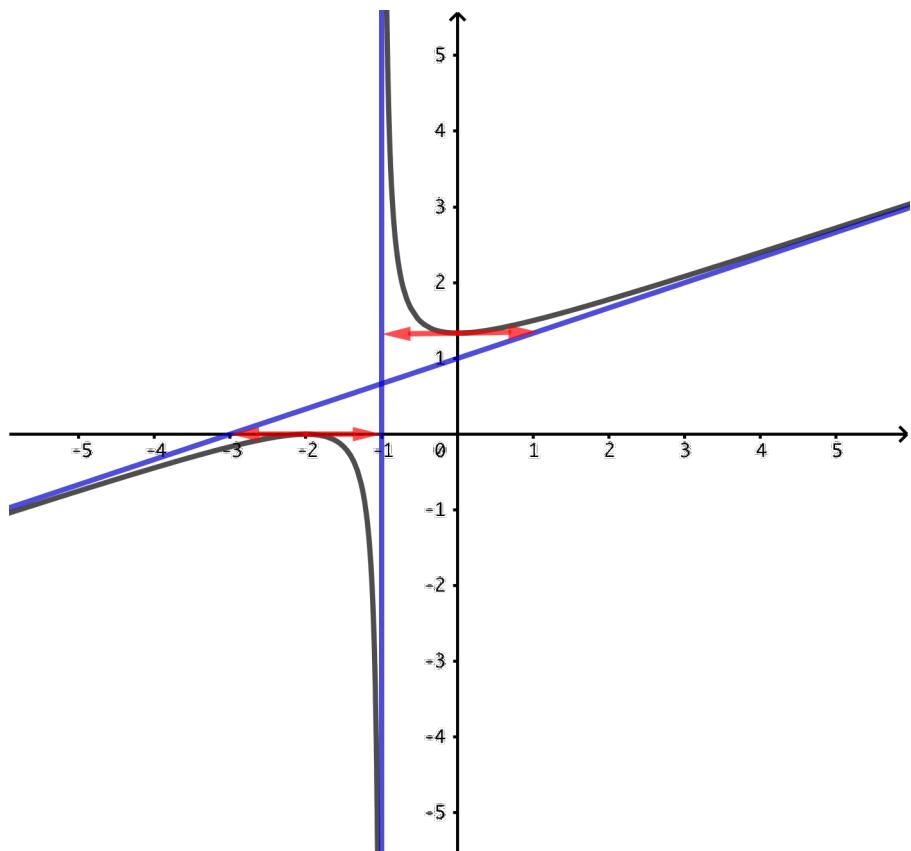
$$\begin{aligned}f(x) - (ax + b) &= f(x) - \left(\frac{1}{3}x + 1\right) = \frac{3x+4}{3(x+1)} - 1 \\&= \frac{3x+4-3x-3}{3(x+1)} \\&= \frac{1}{3(x+1)} > 0 \text{ si } x > -1, < 0 \text{ si } x < -1:\end{aligned}$$

la courbe est au dessus de l'asymptote pour  $x > -1$  et au dessous pour  $x < -1$ .

- $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{3(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{3(x+1)^2}$ , d'où le tableau de variation :

|         |           |      |           |       |           |
|---------|-----------|------|-----------|-------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-1$      | $0$   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | -    | -         | +     |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $0$  | $-\infty$ | $4/3$ | $+\infty$ |

- Tracé :



# Chapitre 7

## Dérivabilité, accroissements finis

### 7.1 Dérivation : définitions

On considère une fonction réelle  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  (toujours supposé non vide et non réduit à un point). Son graphe est noté  $\Gamma_f$  : pour  $x \in I$ ,  $(x, f(x)) \in \Gamma_f$  et  $M(x)$  est le point de coordonnées  $(x, f(x))$  dans un repère du plan.

- **Taux de variation :**

**Définition 7.1.1.** Soient  $a, b \in I$  avec  $a \neq b$ . On appelle taux de variation (ou *taux d'accroissement*) de  $f$  entre  $a$  et  $b$  le réel  $\tau(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\tau(a, b)$  est le coefficient directeur (ou *pente*) de la sécante  $(M(a)M(b))$  :

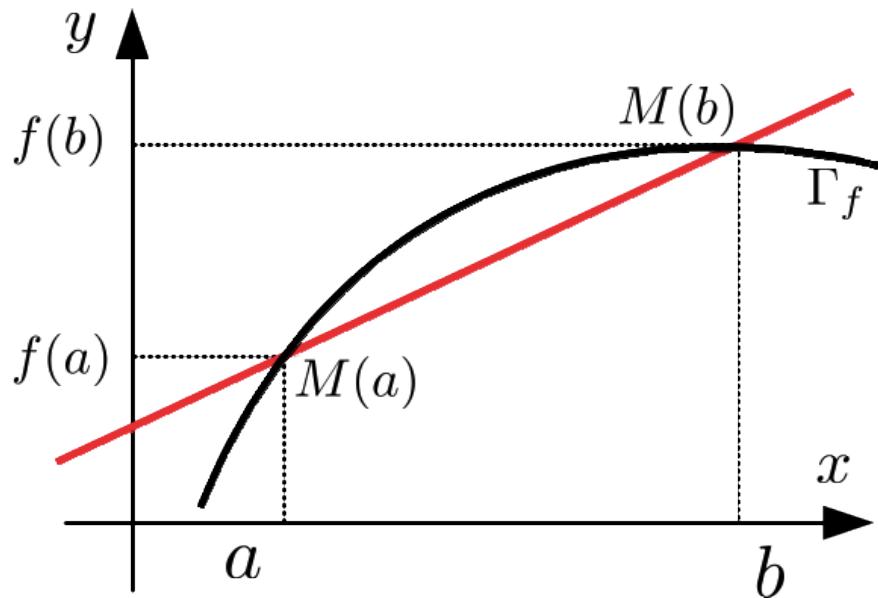


FIGURE 7.1 – Interprétation graphique du taux de variation

**Exemples :** on peut illustrer cette notion dans deux situations différentes :

- La variable  $x$  est une distance horizontale sur une carte topographique et  $y$  est l'altitude. Alors  $\tau(a, b)$  est la pente moyenne sur le parcours entre  $M(a)$  et  $M(b)$ . Cette valeur est affichée à l'attention des cyclistes sur certaines routes (en %).

- La variable  $x$  est le temps et  $y$  la position d'un point mobile sur un axe (ici celui des ordonnées) :  $\tau(a, b)$  est la vitesse moyenne du point entre les instants  $a$  et  $b$ .

Dans chacun de ces deux exemples, on peut être intéressé par une information plus précise : dans le premier, la pente à l'endroit où on se trouve (c'est ce que ressentent les mollets du cycliste), dans le second, la vitesse instantanée (celle, plus ou moins, qu'indique le compteur) : il s'agit dans les deux cas de considérer des points  $a$  et  $b$  « très voisins ». Mathématiquement, il s'agit de passer à la limite quand  $b$  tend vers  $a$  : on aura alors ces informations en  $x = a$ .

- **Dérivabilité en un point :**

**Définition 7.1.2.** On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si le taux de variation  $\tau(a, a+h)$  a une limite finie quand  $h \rightarrow 0$ , c'est à dire si  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe (et est finie). Dans ce cas, on note  $f'(a)$  cette limite et on l'appelle nombre dérivé de  $f$  en  $a$ .

**Exemple 7.1.1.**  $f : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 + x + 1 \end{cases}, a = 0.$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 1 = 1$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1$ .

**Remarque 7.1.1.** on a aussi :  $f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Il existe une caractérisation équivalente de la dérivabilité :

**Proposition 7.1.1.**  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si il existe une fonction  $\varepsilon$  de limite nulle en zéro telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a) \quad (7.1)$$

Posant  $x = a+h$ , on peut écrire (7.1) sous la forme :  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

En fait, pour  $h \neq 0$  on a  $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$  et le résultat s'en déduit sans peine.

L'expression (7.1) s'appelle le développement limité de  $f$  à l'ordre un au voisinage de  $a$ .

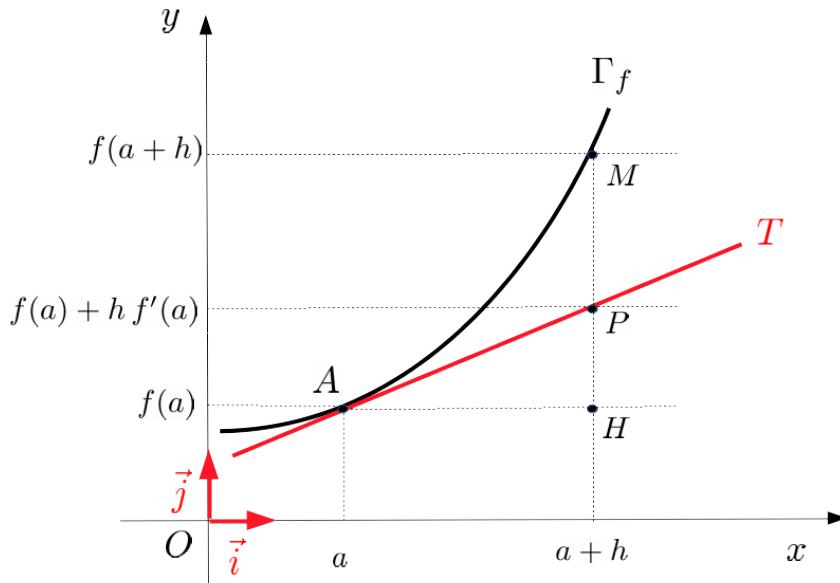
- **Interprétation graphique, tangente à une courbe :**

La position limite des sécantes ( $AM$ ) est la tangente  $T$  à  $\Gamma_f$  au point  $A$ , elle a pour coefficient directeur  $f'(a)$  et son équation est donc :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

La fonction  $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$  s'appelle la fonction affine tangente à  $f$  en  $a$ . En un certain sens c'est la fonction affine qui approxime le mieux  $f$  au voisinage de  $a$ . L'erreur d'approximation n'est autre que la quantité  $(x - a)\varepsilon(x - a)$  qui tend vers zéro «plus vite que  $(x - a)$ » quand  $x \rightarrow a$ .

Ces différents termes sont interprétés sur la figure 7.2 ci-dessous. On a posé  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}\vec{i}$ ,  $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{HP}\vec{j}$  etc...



$\overline{AH} = h$  : accroissement en  $x$

$\overline{HP} = h f'(a)$  : accroissement de la fonction affine tangente

$\overline{HM} = f(a+h) - f(a)$  : accroissement de  $f$

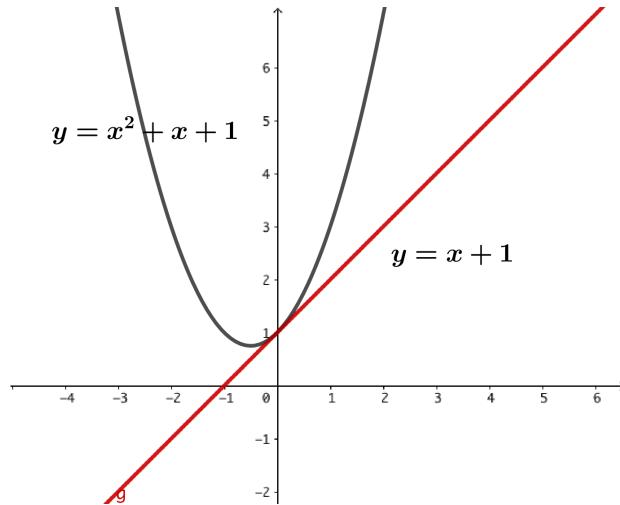
$\overline{PM} = h \epsilon(h)$  : écart courbe - tangente

$$\overline{HM} = \overline{HP} + \overline{PM}$$

FIGURE 7.2 – Interprétation graphique de la dérivée

### Exemple :

Pour l'exemple 7.1.1, l'équation de la tangente au point  $M_0 = (0, f(0)) = (0, 1)$  est :  $y = 1 + x$ .



- **Fonction dérivée :**

**Définition 7.1.3.** On dit que  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  si  $f$  est dérivable en chaque point de  $I$ . On définit alors la fonction dérivée de  $f$ , notée  $f'$ , qui associe à tout  $x \in I$  le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  :  $f'(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

- Dérivabilité à gauche et à droite :

**Définition 7.1.4.** On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  si  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe. Dans ce cas, on note  $f'_g(a)$  cette limite.

On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  si  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe. Dans ce cas, on note  $f'_d(a)$  cette limite.

**Exemple 1 :**  $f(x) = |x|$  en  $a = 0$ .

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -1 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 1.$$

Donc  $f$  admet des dérivées à gauche et à droite en 0, mais n'est pas dérivable en 0 car

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  n'existe pas. On a  $f'_g(0) = -1$  et  $f'_d(0) = 1$ .

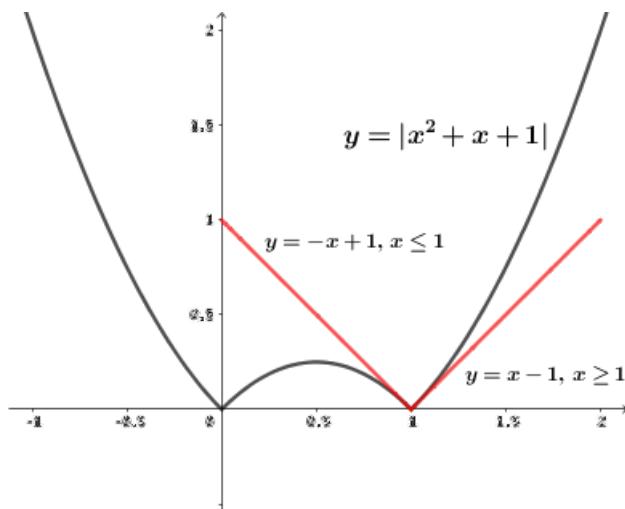
**Exemple 2 :**  $f(x) = |x^2 - x|$  en  $a = 1$ .

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{|(1+h)^2 - (1+h)|}{h} = \frac{|1 + 2h + h^2 - 1 - h|}{h} = \frac{|h(1+h)|}{h}$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} 1 + h = 1$$

$$\text{et } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} -(1+h) = -1.$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en  $a = 1$  car  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  n'a pas de limite quand  $h \rightarrow 0$ . Mais  $f'_d(1) = 1$  et  $f'_g(1) = -1$ . On dit que le point d'abscisse 1 est un *point anguleux*.



- Dérivabilité sur un segment :

**Définition 7.1.5.** On dit que  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$  si  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ , dérivable à gauche en  $b$  et dérivable à droite en  $a$ .

## 7.2 Théorèmes généraux

On trouvera ici les principaux résultats effectivement utilisés.

**Proposition 7.2.1.** *Si  $f$  dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .*

*Preuve :* le second membre de (7.1) a pour limite  $f(a)$  quand  $x \rightarrow a$ , on a donc  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . ■

**Attention :** la réciproque est fausse, c'est à dire qu'une fonction continue en  $a$  n'est pas nécessairement dérivable en  $a$  : considérer la valeur absolue en  $a = 0$ . En fait on peut construire une fonction continue sur  $[0, 1]$  qui n'est dérivable en aucun point de cet intervalle (fonction de Bolzano). Si on pouvait tracer son graphe, il aurait cette allure (qui s'y frotte s'y pique) :



On comprend alors pourquoi on dit qu'une fonction dérivable est « plus régulière » qu'une fonction simplement continue...

**Proposition 7.2.2.** *Soient  $u$  et  $v$  définies sur  $I$  et dérivables en  $a \in I$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
 $u + v$ ,  $\lambda u$  et  $uv$  sont dérivables en  $a$  et*

$$(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a), \quad (\lambda u)'(a) = \lambda u'(a), \quad (uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

**Proposition 7.2.3.** *Soit  $v$  définie sur  $I$ , ne s'annulant pas sur  $I$  et dérivable en  $a \in I$  et  $u$  définie sur  $I$  et dérivable en  $a \in I$ ,*

*$\frac{u}{v}$  est dérivable en  $a$  et*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v(a)^2}$$

**Proposition 7.2.4.** Soit  $u$  dérivable en  $a \in I$ ,  $f$  définie sur  $J$  intervalle contenant  $u(I)$  et dérivable en  $b = u(a)$ , alors  $f \circ u$  est dérivable en  $a$  et

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{u})'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}(\mathbf{a})) \mathbf{u}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b}) \mathbf{u}'(\mathbf{a})$$

**Exemple :**  $F(x) = (x^2 + x)^3$

$F(x) = f(u(x))$  avec  $u(x) = x^2 + x$  et  $f(y) = y^3$

$$u'(x) = 2x + 1, \quad f'(y) = 3y^2$$

$$F'(x) = f'(u(x)) u'(x) = 3(x^2 + x)^2(2x + 1)$$

**Dérivées particulières :**

- **Dérivée de  $u^n$**  : soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , alors  $u^n$  est dérivable :
  - en tout point de  $I$  lorsque  $n \geq 0$ ,
  - en tout point de  $I$  où  $u$  ne s'annule pas, si  $n \leq -1$ ,
 et, dans les deux cas,  $(u^n(x))' = n u(x)^{n-1} u'(x)$ .

Plus généralement, si  $u > 0$  sur  $I$  alors pour tout réel  $\alpha$  la fonction  $u^\alpha$  est dérivable sur  $I$  et on a  $(u^\alpha(x))' = \alpha u(x)^{\alpha-1} u'(x)$ .

- **Dérivée de  $\sqrt{u}$**  : soit  $u$  une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle  $I$ , alors  $\sqrt{u}$  est dérivable sur  $I$  et  $(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ .

**Exemples :**

- $f(x) = \frac{1}{(2x^2 + 1)^3} = [u(x)]^{-3}$

$2x^2 + 1 > 0$  donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$$n = -3; \quad u(x) = 2x^2 + 1; \quad u'(x) = \dots \quad (\text{compléter})$$

donc  $f'(x) = -3u'(x)[u(x)]^{-4} = \dots \quad (\text{compléter})$

- $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{u(x)}$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \text{ et donc } \mathcal{D}_f = [-1, +\infty[ \quad u(x) = x^3 + 1; \quad u'(x) = \dots \quad (\text{compléter})$$

donc  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et  $f'(x) = \dots \quad (\text{compléter})$

### 7.3 Dérivation et extrema d'une fonction

**Définition 7.3.1** (Extremum local, extremum global). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c \in \mathcal{D}_f$ .

- On dit que  $f$  présente un maximum local en  $c$ , si et seulement si, il existe un intervalle ouvert  $]\alpha, \beta[$ , contenant  $c$ , tel que  $f(x) \leq f(c)$  pour tout  $x \in ]\alpha, \beta[ \cap \mathcal{D}_f$ .
- On dit que  $f$  présente un minimum local en  $c$ , si et seulement si, il existe un intervalle ouvert  $]\alpha, \beta[$ , contenant  $c$ , tel que  $f(x) \geq f(c)$  pour tout  $x \in ]\alpha, \beta[ \cap \mathcal{D}_f$ .
- On appelle extremum local un maximum local ou un minimum local.

On parle d'extremum global, ou absolu, quand les inégalités sont valables pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ .

Le résultat fondamental est le suivant :

**Proposition 7.3.1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $]a, b[$ . Si  $f$  présente un extremum local en un point  $c \in ]a, b[$ , alors  $f'(c) = 0$ .

**Preuve :** supposons par exemple que  $c$  soit un point de maximum local et soit  $]\alpha, \beta[$  un intervalle ouvert inclus dans  $]a, b[$ , sur lequel on a  $f(x) \leq f(c)$ . Soit  $h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $a + h \in ]\alpha, \beta[$  : si  $h > 0$  alors  $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$  et on en déduit  $f'_d(c) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ ; si au contraire  $h < 0$  alors  $f'_g(c) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$ . Comme  $f$  est dérivable en  $c$  on a  $0 \leq f'_g(c) = f'(c) = f'_d(c) \leq 0$ , ce qui ne peut se produire que si  $f'(c) = 0$ . ■

La tangente à la courbe de  $\Gamma_f$  au point  $(c, f(c))$  est alors parallèle à l'axe des abscisses.

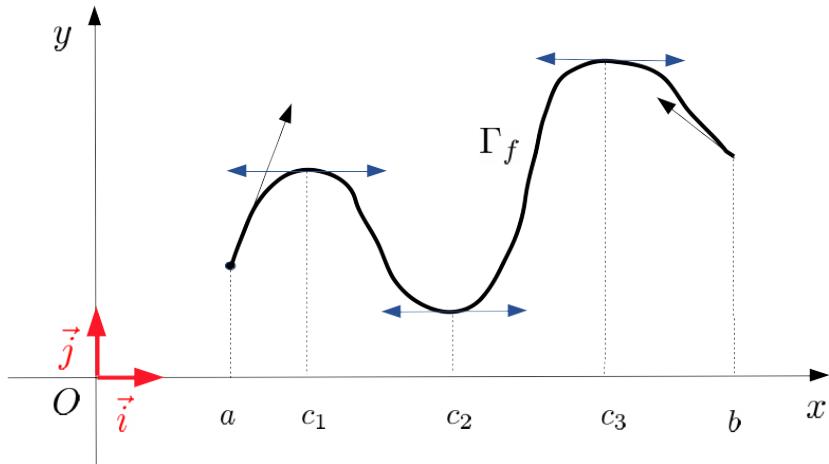


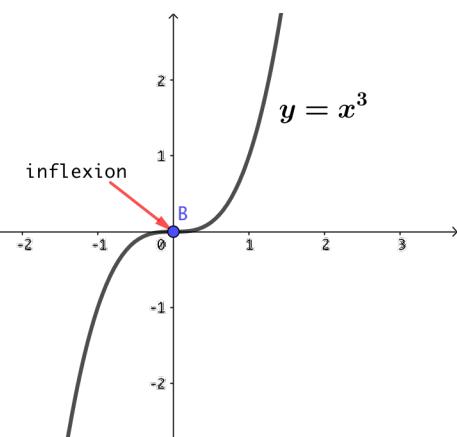
FIGURE 7.3 – Extrema d'une fonction : minimum relatif en  $a$ ,  $c_2$ ,  $b$ , maximum relatif en  $c_0$ ,  $c_3$ .

**Attention :** si  $f'(c) = 0$ ,  $c$  n'est pas nécessairement un point d'extremum. On dit que  $c$  est un point critique de  $f$ . On vérifie grâce au tableau de variations s'il s'agit ou non d'un extremum : la dérivée doit s'annuler et changer de signe, ou bien rester nulle sur un intervalle ouvert de centre  $c$  (elle est alors constante sur cet intervalle). Si  $f'(c) = 0$ ,  $c \in ]a, b[$ , sans que  $c$  ne soit un point d'extremum local de  $f$ , on parle de point d'inflexion, ou point col, de  $f$ .

Sur les points  $a$  et  $b$  du bord de l'intervalle, figure 7.3 on a des extrema locaux mais la tangente n'est pas horizontale.

**Exemple (point d'inflexion) :**

$f(x) = (x^3, c = 0, f'(x) = 3x^2$  donc  $f'(0) = 0$  et 0 est un point critique de  $f$ , mais  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  donc 0 ne peut pas être un point d'extremum de  $f$ .



Si  $f$  n'est pas dérivable en  $c$ , on peut quand même avoir un extremum local en  $c$  mais dans ce cas, on n'a pas de tangente horizontale : pour la fonction valeur absolue,  $c = 0$  est un point de minimum absolu...

## 7.4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

### 7.4.1 Énoncés et preuves

**Théorème 7.4.1** (Théorème de Rolle).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\begin{cases} \text{continue sur } [a, b], \\ \text{dérivable sur } ]a, b[ \end{cases}$  alors :

$$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0.$$

**Preuve :** d'après le théorème 6.2.3 du chapitre 6, il existe des points  $\alpha$  et  $\beta$  de  $[a, b]$  tels que  $f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)] : \forall x \in [a, b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ .

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont aux extrémités de  $[a, b]$ , la condition  $f(a) = f(b)$  entraîne que  $f([a, b])$  est réduit à un point :  $f$  est constante. Sa dérivée est alors nulle partout et n'importe quel point  $c \in ]a, b[$  convient.

Si au contraire l'un des points  $\alpha, \beta$  au moins est un point de  $]a, b[$ , désignons-le par  $c$  : c'est un point d'extremum (minimum absolu pour  $\alpha$ , maximum absolu pour  $\beta$ ) et d'après la proposition 7.3.1 on a  $f'(c) = 0$ . ■

Ce résultat est illustré figure 7.4 : il y a ici deux valeurs de  $c$  possibles ( $c$  et  $d$ ) qui correspondent tous les deux à un extremum relatif dans  $]a, b[$  : le cycliste qui part et arrive en deux points situés à la même altitude aura au moins une fois l'occasion de se retrouver à l'horizontale, ici deux fois, même si  $c$  et  $d$  n'ont pas le même rôle sur le plan du moral ...

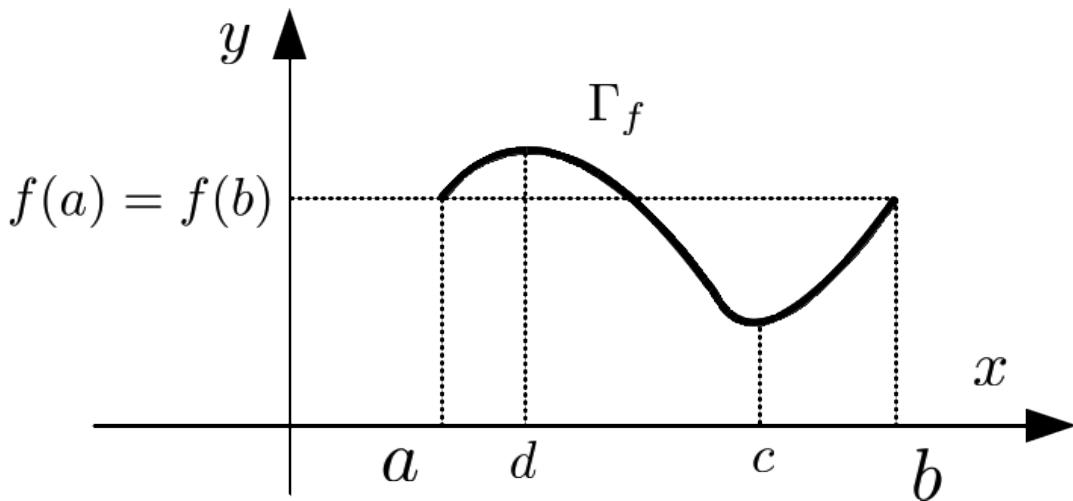
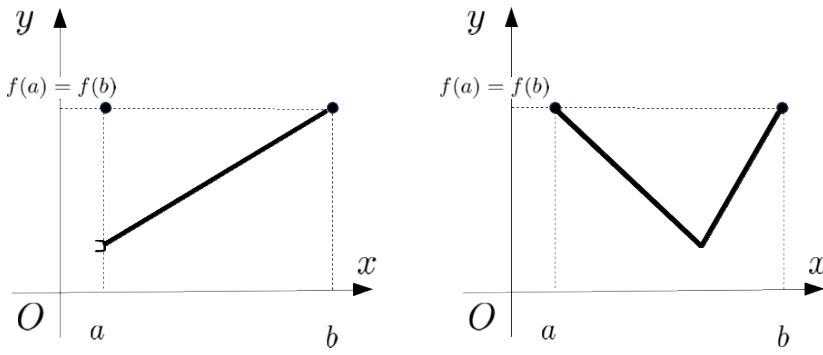


FIGURE 7.4 – Contexte du théorème de Rolle

**Attention :** il ne faut pas retenir seulement l'hypothèse  $f(a) = f(b)$ . Dans les deux figures ci-dessous, où elle est vérifiée mais pas la conclusion, on cherchera quelle est l'hypothèse manquante ...



Le (célèbre) théorème des accroissements finis, riche en applications, est une extension du précédent : on enlève l'hypothèse  $f(a) = f(b)$ .

**Théorème 7.4.2** (Théorème des accroissements finis).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\begin{cases} \text{continue sur } [a, b] \\ \text{et dérivable sur } ]a, b[ \end{cases}$  alors :

$$\exists c \in ]a, b[, f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

**Preuve** : la sécante qui passe par les points d'abscisses respectives  $a$  et  $b$  a pour équation  $y = g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ . La fonction définie sur  $[a, b]$  par  $h(x) = f(x) - g(x)$  vérifie  $h(a) = h(b) = 0$ , de plus elle est continue sur  $[a, b]$  ( $f$  et  $g$  le sont) et dérivable sur  $]a, b[$  (c'est le cas pour  $f$ , par hypothèse, et  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ).

D'après le théorème de Rolle il existe donc un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $h'(c) = 0$ . Or :

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$\text{et } h'(c) = 0 \iff \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

■

Sur la figure 7.5 ci-dessous, il y a trois réels  $c$  qui conviennent (dont  $c_1$  et  $c_2$ ). En  $c_2$ , par exemple, le cycliste ressent exactement la pente qui, si elle était partout la même, réaliseraient le même dénivelé  $f(b) - f(a)$ .

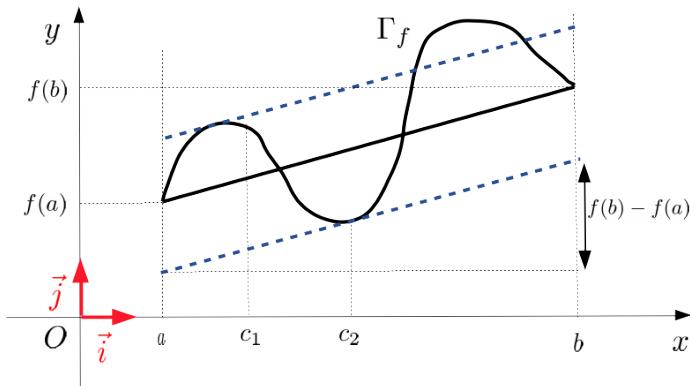


FIGURE 7.5 – Contexte du théorème des accroissements finis

**Corollaire 7.4.1** (inégalité des accroissements finis).

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $I$ , alors :

1. s'il existe des réels  $m$  et  $M$  tels que  $\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$ , alors pour tout couple  $(a, b) \in I \times I$  tel que  $a \leq b$  on a :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a). \quad (7.2)$$

2. s'il existe un réel  $k \geq 0$  tel que  $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$ , alors :

$$\forall (x, y) \in I, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|. \quad (7.3)$$

**Preuve** : pour le premier point on suppose que  $a < b$ , sinon le résultat est trivial. Le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ , or, par hypothèse, on a  $m \leq f'(c) \leq M$  : l'inégalité en résulte car  $b-a > 0$ .

Le deuxième point est une conséquence immédiate du premier en posant  $m = -k$  et  $M = k$ . ■

**Exemple** : votre vitesse reste comprise entre 30km/h et 90 km/h... En 20 mn vous parcourrez une distance comprise entre 10km et 30 km.

Ce n'est pas plus compliqué que cela. Attention tout de même aux hypothèses ...

#### 7.4.2 Applications

- **Sens de variation d'une fonction**

Commençons par un résultat intuitif, admis dans les classes antérieures :

**Proposition 7.4.1.**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Si la dérivée est nulle sur  $I$  ( $\forall x \in I, f'(x) = 0$ ), alors  $f$  est constante sur  $I$ .

**Preuve** : l'inégalité (7.3) est vérifiée avec  $k = 0$ , donc :  $\forall (x, y) \in I, |f(y) - f(x)| = 0$ , i.e.  $f(x) = f(y)$ . ■

Les deux résultats suivants, et ceux qui sont analogues en changeant le signe de la dérivée, sont à la base de l'étude du sens de variation des fonctions :

**Proposition 7.4.2.**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , alors

$f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si :  $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ .

**Preuve** : supposons  $f'(x) \geq 0$  sur  $I$  et soit  $(x, y) \in [a, b]^2$  avec  $x < y$ . Appliquons l'inégalité des accroissements finis (7.2), côté gauche, avec  $m = 0$  :  $0 \leq f(y) - f(x)$  i.e.  $f(y) \geq f(x)$ , ce qui prouve la croissance.

Réciproquement, si  $f$  est croissante sur  $I$  et si  $a \in I$ , alors pour tout  $x \neq a$  dans  $I$  les quantités  $f(x) - f(a)$  et  $x - a$  sont de même signe, donc  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$  et ainsi :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

**Proposition 7.4.3.**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

$$\text{si } \forall x \in I, f'(x) > 0, \text{ alors } f \text{ est strictement croissante sur } I.$$

**Remarque :** on ne peut pas utiliser (7.2) dans ce cas, car on ne peut pas garantir que  $m > 0$ . En effet la borne inférieure d'un ensemble de nombres strictement positifs (ici, les dérivées) peut être nulle. Exemple :  $\inf \mathbb{R}_+^* = 0$ .

**Preuve :** supposons  $f'(x) > 0$  sur  $I$  et soit  $(x, y) \in [a, b]^2$  avec  $x < y$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel  $c$  tel que  $x < c < y$  et  $f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{>0} \underbrace{(y-x)}_{>0}$ , donc  $f(y) > f(x)$ . ■

**Remarque 7.4.1.** si  $f'(x) \geq 0$  sur  $I$  et si cette dérivée ne s'annule qu'en un nombre fini de points, on a le même résultat. Exemple :  $f(x) = x^3$  sur  $\mathbb{R}$ .

Il suffit de raisonner sur chacun des sous-intervalles où  $f' > 0$ .

**Corollaire 7.4.2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . Alors :

- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $f$  est une bijection strictement croissante de  $[a, b]$  sur  $[f(a), f(b)]$ .
- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $f$  est une bijection strictement décroissante de  $[a, b]$  sur  $[f(b), f(a)]$ .

### • Limite d'une dérivée en un point et dérivabilité en ce point

Le résultat suivant permet, dans les cas favorables, d'étudier la dérivabilité en un point particulier sans recours au taux d'accroissement. Etudions un exemple type : on considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

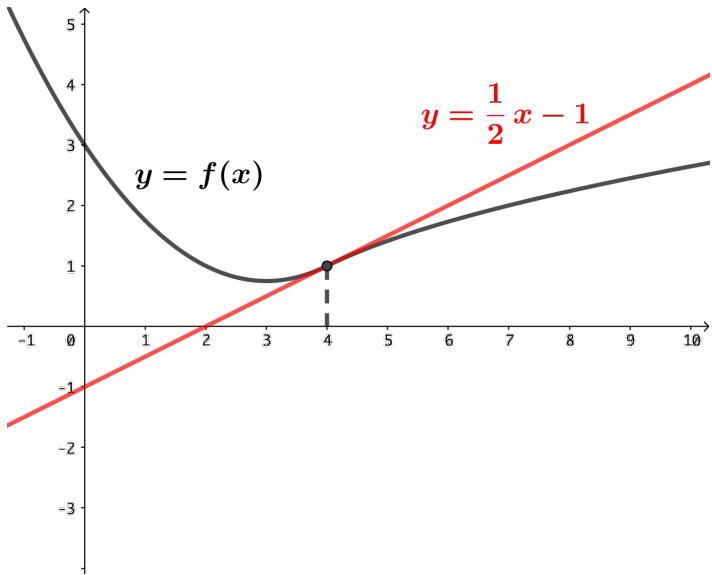
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 3 & \text{si } x < 4, \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Cette fonction est continue et dérivable pour  $x < 4$  et  $x > 4$  par simple application des théorèmes usuels. On trouve sans difficulté que les limites à gauche et à droite en  $a = 4$  sont égales (à 1) mais cette fonction est-elle dérivable en ce point ?

Pour  $x < 4$  on a  $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$  et ainsi  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \frac{1}{2}$ . Pour  $x > 4$  on a  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = \frac{1}{2}$ . On se dit que les tangentes de part et d'autre du point d'abscisse  $a$  ont la même position limite en ce point et l'intuition nous dit que  $f$  est dérivable en  $a = 4$  avec  $f'(4) = \frac{1}{2}$ . Est-ce correct ? Et s'il n'y avait pas eu la même limite, ou pas de limite du tout ? La réponse est là :

**Proposition 7.4.4.** Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ , continue en  $a \in I$  et dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ . Si la dérivée  $f'$  a une limite finie  $\ell$  en  $a$  (resp. à droite, à gauche en  $a$ ) alors  $f$  est dérivable en  $a$  (resp. à droite, à gauche en  $a$ ) et  $f'(a) = \ell$  (resp.  $f'_d(a) = \ell$ ,  $f'_g(a) = \ell$ ).

C'est ce résultat que l'on applique : on conclut successivement que  $f'_g(4) = \frac{1}{2}$ ,  $f'_d(4) = \frac{1}{2}$  et donc, en effet, que  $f$  est dérivable en  $a = 4$  avec  $f'(4) = \frac{1}{2}$ .



**Preuve :** on donne une preuve sommaire, dans le cas, par exemple, de la dérivée à gauche. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow a^-} = \ell$  et on veut montrer que  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  a la même limite. Soit  $x \in I$  avec  $x < a$  :  $f$  étant continue sur  $[x, a]$  et dérivable sur  $]x, a[$ , le théorème des accroissements finis donne l'existence d'un réel  $c_x \in ]x, a[$  (il dépend de  $x$ ) tel que  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$ , or quand  $x \rightarrow a^-$ , nécessairement  $c_x \rightarrow a^-$  et donc  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \rightarrow \ell$ , ce qui donne la conclusion. ■

C'est une rédaction un peu rapide car  $c_x$  n'est pas unique donc l'expression  $c_x \rightarrow a^-$  est un raccourci. On sera plus rigoureux pour la règle de l'Hopital ci-dessous, deuxième cas (comparer les deux rédactions).

**Remarque :** on montre en fait que si  $f'$  a une limite en un point, alors le taux d'accroissement a la même limite. Cela reste valable avec une limite infinie : il n'y a pas alors dérivabilité mais existence d'une (demi) tangente verticale.

**Attention :** la réciproque est fausse. Il se peut que le taux d'accroissement ait une limite (donc qu'il y ait dérivabilité) sans que  $f'$  ait une limite. Autrement dit, une dérivée n'est pas forcément continue. Il y a un exemple classique :

**Exemple :** on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(0) = 0$  et, si  $x \neq 0$ ,  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ . Le taux d'accroissement entre zéro et  $x \neq 0$  est  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ .  $f$  est donc dérivable en zéro et  $f'(0) = 0$ . Par contre, pour  $x \neq 0$  on a  $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$  qui n'a pas de limite en zéro (le premier terme tend vers zéro mais le second n'a pas de limite ... pourquoi?).

### • Règle de l'Hopital

Cette règle concerne la recherche de limites sous la forme (supposée indéterminée)  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Nous allons en fait en voir deux variantes et seule la deuxième utilise un résultat de cette section (le théorème de Rolle).

**Proposition 7.4.5** (règle(s) de l'Hôpital).

1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ .

On suppose que  $f(a) = g(a) = 0$  et que  $g'(a) \neq 0$ , alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

2. Soient  $I$  un intervalle ouvert,  $a \in I$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I$  et dérivables sur  $I \setminus \{a\}$  telles que  $f(a) = g(a) = 0$ ,  $g(x) \neq 0$  et  $g'(x) \neq 0$  sur  $I \setminus \{a\}$ .

Si le quotient  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  a une limite finie  $\ell$  en  $a$ , alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

**Preuve :** commençons par le **premier cas**. Remarquons qu'il existe un intervalle ouvert de centre  $a$  sur lequel  $g(x) \neq 0$  pour  $x \neq a$ , ce qui justifie l'existence du rapport  $\frac{f(x)}{g(x)}$  sur cet intervalle privé de  $a$ . En effet le développement limité à l'ordre un de  $g$  au voisinage de  $a$  s'écrit :

$$g(x) = g(a) + (x - a) g'(a) + (x - a) \varepsilon(x - a) = (x - a) g'(a) + (x - a) \varepsilon(x - a) = (x - a) (g'(a) + \varepsilon(x - a))$$

avec  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x - a) = 0$ , donc pour  $x$  assez proche de  $a$  (i.e. sur un certain intervalle de la forme  $]a - \alpha, a + \alpha[$ ),  $g'(a) + \varepsilon(x - a) \neq 0$  et  $g$  ne s'annule qu'en  $x = a$ .

Pour  $x \neq a$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)}$  : comme  $g'(a) \neq 0$ , le second quotient, qui a pour limite  $\frac{1}{g'(a)}$  quand  $x \rightarrow a$ , est défini pour  $x$  assez proche de  $a$  et le résultat s'en suit immédiatement.

**Second cas -** Soit  $\varepsilon > 0$ , comme on suppose  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que pour

$x \in I \setminus \{a\}$  on a :  $|x - a| \leq \alpha \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| \leq \varepsilon$ . Fixons un tel  $x$  et introduisons la fonction  $h$  de la variable  $t \in I$  par  $h(t) = f(t)g(x) - g(t)f(x)$ . Supposant par exemple que  $x > a$  (pour fixer les notations des intervalles) on a :  $h$  continue sur  $[a, x]$ , dérivable sur  $]a, x[$  et  $h(a) = h(x) = 0$ .

D'après le théorème de Rolle, il existe un réel  $c_x$  (il dépend de  $x$ ) tel que  $c_x \in ]a, x[$  et  $h'(c_x) = 0$ .

On a  $h'(t) = f'(t)g(x) - g'(t)f(x)$ , donc on obtient  $f'(c_x)g(x) - g'(c_x)f(x) = 0$  d'où  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ .

De plus  $|c_x - a| < |x - a| \leq \alpha$  donc on a  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - \ell \right| \leq \varepsilon$ . On a ainsi prouvé que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - a| \leq \alpha \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| \leq \varepsilon,$$

et on a le résultat annoncé. ■

**Remarque 7.4.2.** En fait, le deuxième résultat est également valide pour les limites infinies, et aussi si  $f$  et  $g$  tendent vers l'infini en  $a$ , et si  $x$  tend vers  $-\infty$  ou  $+\infty$ , c'est donc une règle très souple. Pour plus de détails on pourra consulter Wikipedia : [https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle\\_de\\_L'H%C3%B4pital](https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_de_L'H%C3%B4pital).

On peut aussi écrire les mêmes résultats en termes de limites à droite ou à gauche.

On peut si besoin appliquer cette règle plusieurs fois de suite jusqu'à lever l'indétermination.

**On notera qu'on énonce des conditions suffisantes :** si la limite de  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe alors etc...

La réciproque est fausse !

**Exemple :** trouver  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

Ici,  $f(x) = \sin x - x$ ,  $g(x) = x^3$ . On a  $f(0) = g(0) = 0$ ,  $f'(x) = \cos x - 1$  et  $g'(x) = 3x^2$ .

Hélas,  $\frac{\cos x - 1}{3x^2}$  conduit encore à une forme indéterminée «  $\frac{0}{0}$  »... alors on recommence avec les dérivées de ces fonctions, c'est à dire  $-\sin x$  et  $6x$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$ , donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

Vous apprendrez par la suite une méthode plus directe pour ce type de question.

## 7.5 Dérivées successives, dérivées partielles

- **Dérivées successives**

**Définition 7.5.1.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Par convention :  $f^{(0)} = f$  et :

- si  $f$  est dérivable sur  $I$  on note  $f^{(1)} = f'$  sa dérivée (dérivée première, ou d'ordre un),
- si de plus  $f'$  est dérivable, on pose  $f^{(2)} = (f')' = f''$  : dérivée seconde de  $f$  (ou dérivée d'ordre deux),
- de proche en proche, si  $f$  admet une dérivée d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  qui est elle-même dérivable, on pose  $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ .

**Exemple :**  $f(x) = x^3 + 2x + 1$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 2, f''(x) = 6x, f^{(3)}(x) = 6, f^{(4)}(x) = 0$$

**Définition 7.5.2.**

- Par convention une fonction  $f$  continue sur  $I$  est dite de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $I$ . On écrit  $f \in \mathcal{C}^0(I)$ .
- Une fonction  $n$  fois dérivable et de dérivée  $n$ -ième continue est dite de classe  $\mathcal{C}^n$  :  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ .
- Une fonction qui est de classe  $\mathcal{C}^n$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$  est dite de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Exemples :** les fonctions polynômes, les fonctions  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\exp$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Le résultat suivant permet de calculer rapidement les dérivées successives d'un produit  $f g$  de deux fonctions. Il généralise la formule bien connue :  $(f g)' = f' g + f g'$ . On remarquera l'analogie avec la formule du binôme de Newton.

**Proposition 7.5.1** (Formule de Leibniz). *Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions  $n$  fois dérивables sur  $I$ . Alors le produit  $f g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et sa dérivée d'ordre  $n$  est donnée par la formule de Leibniz :*

$$(f g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

**Exemple :**

$$(f g)^{(4)} = f^{(4)} g + 4 f^{(3)} g' + 6 f'' g'' + 4 f' g^{(3)} + f g^{(4)}$$

- **Dérivées partielles (hors programme, complément pour la physique)**

En mathématiques, en physique et dans toutes les sciences qui utilisent les mathématiques on a à utiliser des fonctions dépendant de plusieurs variables (en physique, par exemple, le volume d'un gaz est une fonction de la température et de la pression). Il est possible d'étudier les variations d'une telle fonction lorsque toutes les variables sont maintenues à une valeur fixe, sauf une. Par exemple on peut regarder comment varie le volume en fonction de la pression à température constante.

Nous allons nous restreindre au cas d'une fonction de deux variables  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) \end{cases}$ , par exemple  $f(x, y) = x^2y^3 + 2x^2 + y^3 + 2x$ .

**Définition 7.5.3.**

On appelle première fonction partielle de  $f$  en  $(a, b)$  la fonction  $f(\cdot, b) : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x, b) \end{cases}$ .

On appelle deuxième fonction partielle de  $f$  en  $(a, b)$  la fonction  $f(a, \cdot) : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto f(a, y) \end{cases}$ .

Si la première fonction partielle est dérivable, on note  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sa dérivée. Ainsi, au point  $(x, y)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Si la deuxième fonction partielle est dérivable, on note  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sa dérivée. Ainsi, au point  $(x, y)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Sur l'exemple choisi, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + 4x + 2 \quad (\text{on considère } y \text{ comme une constante}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + 3y^2 \quad (\text{on considère } x \text{ comme une constante})$$

On peut ensuite calculer les dérivées partielles secondes par rapport aux deux variables en appliquant le même principe aux fonctions dérivées partielles premières déjà calculées. Ainsi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = 2y^3 + 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = 6x^2y + 6y.$$

On remarque que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ , mais dans le cas général cette égalité est soumise à certaines conditions qui sortent du cadre de ce cours.



# Chapitre 8

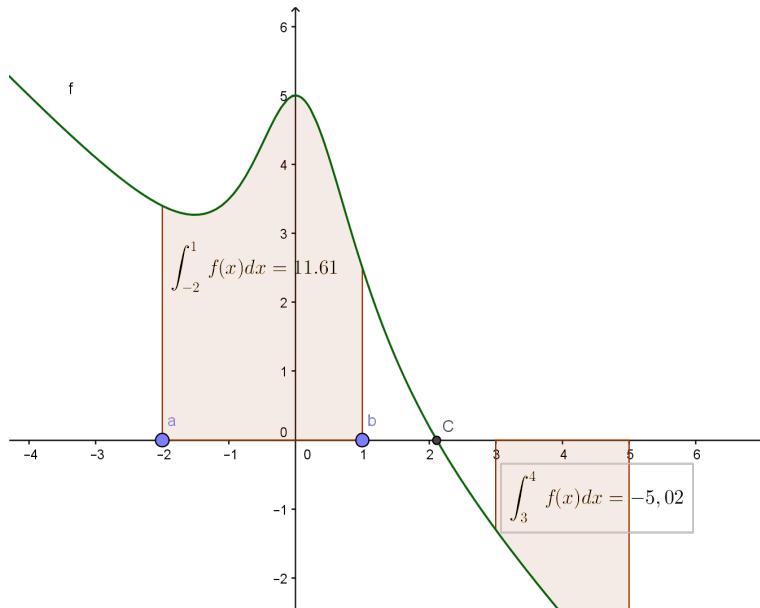
## Intégration

### 8.1 Intégrale d'une fonction sur un intervalle

#### 8.1.1 Définition de l'intégrale

On ne va pas donner une définition rigoureuse de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle, mais un sens précis ce cette quantité quand les fonctions sont "raisonnables" :

- Si la fonction est positive, définie sur l'intervalle  $(a, b)$ , **l'intégrale de  $f$  sur l'intervalle  $(a, b)$** , notée  $\int_a^b f(x)dx$ , est l'aire comprise entre la courbe représentative de  $f$  et le segment  $(A, B)$  ( $A(a, 0)$ ,  $B(b, 0)$ ) dans un repère orthonormée.
- Si la fonction est négative, définie sur l'intervalle  $(a, b)$ , **l'intégrale de  $f$  sur l'intervalle  $(a, b)$** , notée  $\int_a^b f(x)dx$  est **moins** l'aire de la surface comprise entre la courbe représentative de  $f$  et le segment  $(A, B)$ .



On observe que dans chacun des cas, on a **la formule de Chasles**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

où  $a < c < b$ .

On rend cette formule vraie **pour toutes les valeurs de  $a$ ,  $b$ , et  $c$**  et pour toute fonction "raisonnable" en définissant l'intégrale par

**Définition l'intégrale de  $f$  sur l'intervalle  $(a, b)$** , notée  $\int_a^b f(x)dx$ , est l'aire comprise entre la courbe représentative de  $f$  et le segment  $(A, B)$  comptée positivement où  $f$  est positive et négativement où  $f$  est négative.

et avec les conventions suivantes :

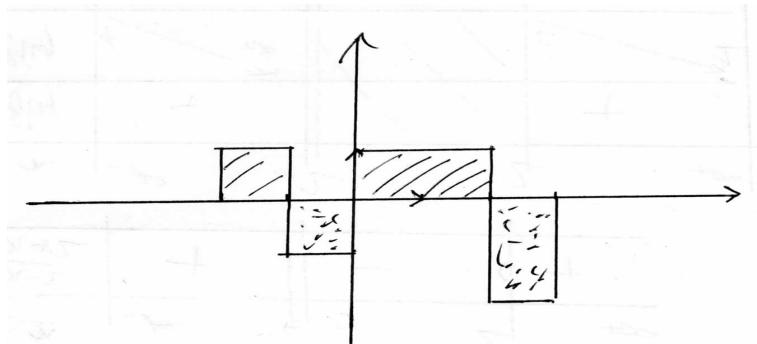
$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx,$$

**Exemple : calcul d'intégrale pour une fonction en escalier.**

Soit  $f$  donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-2, -1[ \\ -1 & \text{si } x \in ]-1, 0[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in ]0, 2[ \\ -2 & \text{si } x \in [2, 3] \end{cases}$$



On veut calculer  $\int_{-2}^3 f(x) dx$ . On utilise la formule de Chasles :

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$$

Chacune des intégrales se calcule alors avec la définition car on connaît l'aire d'un rectangle, on ajoute l'aire si le rectangle est au dessus de l'axe, on la retranche s'il est en dessous :  $\int_{-2}^3 f(x) dx =$

$$1 - 1 + 2 - 2 = 0, \text{ on a donc } \int_{-2}^3 f(x) dx = 0.$$

**Calcul d'intégrale pour une fonction continue sur  $[a, b]$ .**

On verra plus bas comment calculer pratiquement  $\int_a^b f(x) dx$  pour la plupart des fonctions usuelles.

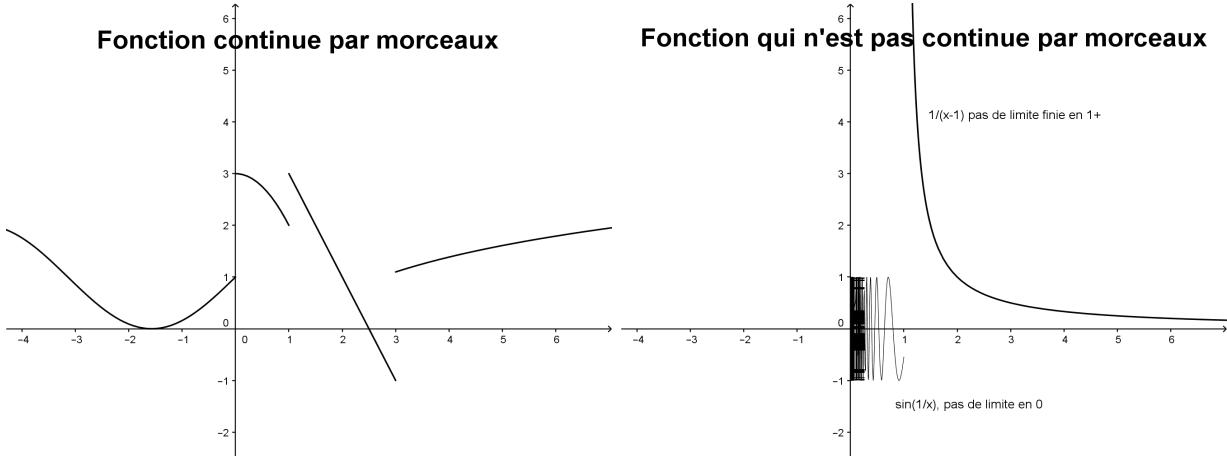
Dans le cas général d'une fonction continue quelconque, **on ne sait pas calculer exactement** la valeur de l'intégrale, ni en donner une formule avec des fonctions usuelles (on sait même souvent démontrer qu'une telle formule n'existe pas!). On utilise alors une "méthode numérique" pour en calculer une valeur approchée. On sait par contre démontrer que ces méthodes numériques "convergent" toutes vers la même valeur. On en conclut qu'on peut calculer  $\int_a^b f(x) dx$  lorsque  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ .

### 8.1.2 Fonctions continues par morceaux

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.  $f$  est continue par morceaux sur l'intervalle  $[a, b]$ ,ssi,  $\exists \{x_0, \dots, x_n\}$ , subdivision de  $[a, b]$  (i.e.  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$ ) telle que :

- $$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ soit continue sur } ]x_{i-1}, x_i[ \\ f \text{ admet une limite finie à droite en } x_{i-1} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \\ f \text{ admet une limite finie à gauche en } x_i \end{array} \right.$$

( On dit que  $f$  admet un nombre fini de discontinuités, toutes de première espèce). Pour un intervalle quelconque  $I$  (pas forcément borné ni fermé), on dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $I$  si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b] \cap I$  pour tout  $a < b$ .



**Notation** On note  $f(x^+)$  et  $f(x^-)$  les limites à droite et à gauche de  $f$ .

**Exemples :**

- Une fonction continue sur  $[a, b]$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ .
- Les fonctions en escalier sont des fonctions continues par morceaux.
- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ \sin x & \text{si } x \in [1, 3] \end{cases}$  est continue par morceaux
- $f(x) = E(x)$  partie entière est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

Pour une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$ , on calculera  $\int_a^b f(x)dx$  en utilisant la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

pour se ramener à des calculs d'intégrales de fonctions continues.

### 8.1.3 Propriétés de l'intégrale

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $I$ . On adopte les conventions suivantes :

$$\boxed{\forall a \in I, \int_a^a f(x)dx = 0,}$$

$$\boxed{\forall (a, b) \in I^2, b \leq a \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx,}$$

on a alors pour toutes valeurs de  $(a, b, c) \in I^3$  la **relation de Chasles** déjà vue :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,}$$

## Linéarité

Soient  $f_1$  et  $f_2$  continues par morceaux sur  $[a, b]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda f_1 + f_2$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b \lambda f_1 + f_2 = \lambda \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$$

## Moyenne d'une fonction sur un intervalle

La moyenne d'une fonction sur l'intervalle  $[a, b]$  est la quantité

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

C'est la valeur d'une fonction constante sur  $[a, b]$  qui a la même intégrale que  $f$  sur  $[a, b]$ .

## Deux inégalités

Soient  $a \leq b$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$ . On déduit facilement du fait que  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  implique  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  que

$$f \leq g \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

et

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

On déduit de la première inégalité que si  $f$  et  $g$  sont continues par morceaux sur  $[a, b]$ ,  $m = \inf_{t \in [a, b]} f(t)$ ,  $M = \sup_{t \in [a, b]} f(t)$  et si  $g$  est positive, alors

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t) g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt.$$

En particulier avec  $g = 1$ , on obtient la **l'inégalité de la moyenne**

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M.$$

et si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , avec le théorème des valeurs intermédiaires, on a la **formule de la moyenne** : il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

## 8.2 Primitives d'une fonction sur un intervalle

### 8.2.1 Définition

Soient  $f$  et  $F$  deux fonctions définies sur le même intervalle  $I$ . On dit que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , ssi  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

#### Proposition

Soit  $f$  une fonction admettant sur  $I$  une primitive  $F$ . Alors  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  si et seulement si il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in I$ ,  $G(x) = F(x) + C$

*Preuve :* : On suppose que  $\forall x \in I$ ,  $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow G'(x) = f(x), \forall x \in I \Rightarrow (F - G)'(x) = 0, \forall x \in I$$

$$\Rightarrow (F - G)(x) = \text{Cste}, \forall x \in I \text{ puisque } I \text{ est un intervalle.}$$

$$\Leftarrow \text{ Si } G(x) = F(x) + \text{Cste}, \forall x \in I \text{ } G \text{ est dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I, G'(x) = F'(x) = f(x).$$

■

#### Remarques :

- On dit que les primitives sont définies à une constante additive près.
- Si on fixe la valeur de  $F$  en un point  $x_0 \in I$ , alors  $F$  est définie de façon unique.

#### Exemples :

- $f(x) = 0$ ,  $F(x) = C$  sur  $\mathbb{R}$
- $f(x) = 1$ ,  $F(x) = x + C$  sur  $\mathbb{R}$
- $f(x) = \cos x$ ,  $F(x) = \sin(x) + c$  sur  $\mathbb{R}$ .
- $f(x) = x^2$ . On sait que  $(x^3)' = 3x^2$ . On en déduit  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 8.2.2 Primitives usuelles

| Fonction   | Primitive                       | Domaine de validité  |
|--|---------------------------------|--|
| $x^n, n \in \mathbb{N}$                            | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$           | $\mathbb{R}$   |
| $x^p, p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$           | $\frac{x^{p+1}}{p+1}$           | $\mathbb{R}^{+*} \text{ et } \mathbb{R}^{-*}$                  |
| $\frac{1}{x}$                                      | $\ln x $                        | $\mathbb{R}^{+*} \text{ et } \mathbb{R}^{-*}$                  |
| $\frac{1}{x+a}$                                    | $\ln x+a $                      | $] -\infty, -a[ \text{ et } ] -a, +\infty[$                    |
| $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $\mathbb{R}^{+*}$  |
| $a^x, a > 0$                                       | $\frac{a^x}{\ln a}$             | $\mathbb{R}$   |
| $\cos x$   | $\sin x$                        | $\mathbb{R}$   |
| $\sin x$   | $-\cos x$                       | $\mathbb{R}$   |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$                               | $-\frac{\cos x}{\sin x}$        | $]k\pi, (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$                           |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$                               | $\tan x$                        | $](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}[, k \in \mathbb{Z}$ |
| $chx$  | $shx$                           | $\mathbb{R}$   |
| $shx$  | $chx$                           | $\mathbb{R}$   |
| $\frac{1}{ch^2 x}$                                 | $thx$                           | $\mathbb{R}$   |
| $e^x$  | $e^x$                           | $\mathbb{R}$   |
| $\frac{1}{x^2 + 1}$                                | $arctan(x)$                     | $\mathbb{R}$   |

### 8.2.3 Le théorème fondamental de l'analyse

On va voir la relation entre primitive et intégrale.

**Théorème** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $a \in I$  et  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  alors  $F$  est une fonction définie et dérivable sur  $I$ , et  $\forall x \in I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

**Preuve :** Puisque  $x \in I$ ,  $f$  est continue sur  $[a, x]$  si  $x \geq a$  ou sur  $[x, a]$  si  $x \leq a$ ,  $F$  est donc bien définie sur  $I$ . On doit calculer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x))$  (ou la limite à droite si  $x$  est la borne gauche de  $I$ , ou la limite à gauche si  $x$  est la borne droite de  $I$ ). La relation de Chasles permet d'écrire

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Soit  $\epsilon > 0$ , la fonction  $f$  étant continue en  $x$ , il existe  $\delta > 0$  tel qu' on a  $|f(t) - f(x)| \leq \epsilon$  pour tout  $t$  tel que  $|t - x| < \delta$ . On en déduit que pour tout  $h$  tel que  $|h| < \delta$ , on a, si  $h > 0$ ,

$$\left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \epsilon \int_x^{x+h} dt = \epsilon h,$$

et donc On en déduit que pour tout  $h$  tel que  $|h| < \delta$ , on a, si  $h > 0$ ,

$$\left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \epsilon \int_x^{x+h} dt = \epsilon h,$$

Mais

$$\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt = F(x+h) - F(x) - hf(x),$$

on obtient

$$\left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \leq \epsilon,$$

On a montré

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = f(x).$$

On procède de même pour  $h < 0$  car on a cette fois

$$\left| \int_{x+h}^x (f(t) - f(x))dt \right| \leq \int_{x+h}^x |f(t) - f(x)|dt \leq \epsilon \int_{x+h}^x dt = \epsilon|h|.$$

**Exemple :** si  $F(x) = \int_2^x t^3 e^{-t} dt$  alors  $F'(x) = x^3 e^{-x}$

Ce théorème donne le moyen de calculer  $\int_a^b f(x)dx$  lorsqu'on connaît une primitive de  $f$ . On a en effet la **formule de base du calcul des intégrales** :

**Corollaire** Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$  contenant  $[a, b]$ , on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Preuve :** On sait que  $\int_a^x f(t)dt$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , on a donc  $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ , la formule s'en déduit.

### Notations

On comprend pourquoi on note  $F(x) = \int f(x)dx$  une primitive de  $f$  (attention par soucis de praticité, on utilise la même lettre comme nom de variable pour la primitive et comme nom de variable pour décrire  $f$ . Par exemple, on écrit  $\int xdx = (1/2)x^2 + C$ .

On note  $F(b) - F(a) = [F]_a^b$ . On a donc

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F]_a^b.}$$

### Exemple :

$$\int_1^2 x^2 + x dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{23}{6}.$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 xE(x) dx &= \int_1^2 xE(x) dx + \int_2^3 xE(x) dx = \int_1^2 x dx + \int_2^3 2x dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 + \left[ x^2 \right]_2^3 \\ &= 2 - \frac{1}{2} + 9 - 4 = \frac{19}{2} \end{aligned}$$

L'hypothèse de continuité de  $f$  est importante. En effet, on a

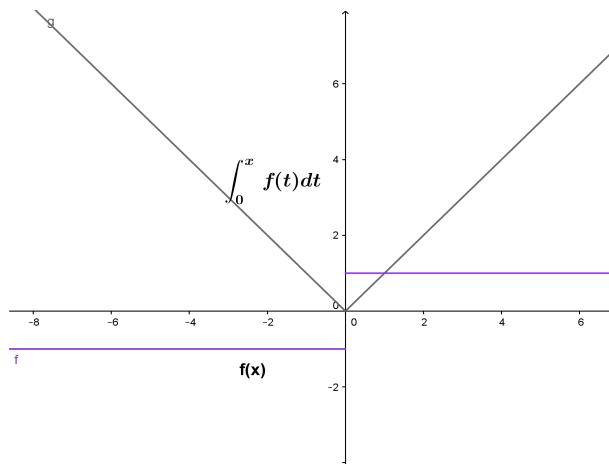
**Proposition** Soient  $f$  continue par morceaux sur  $I = [\alpha, \beta]$  et  $a \in I$ , l'**application intégrale** de  $f$  :

$$\begin{array}{rcl} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & F(x) = \int_a^x f(t) dt \end{array}$$

est continue, dérivable à droite sur  $[\alpha, \beta[$  et dérivable à gauche sur  $] \alpha, \beta]$  et  $F'_+(x) = f(x^+)$ ,  $F'_-(x) = f(x^-)$ .

**Preuve :** reprendre la démonstration du théorème avec soin.

On en déduit qu'au point de discontinuité de  $f$ ,  $F$  est continue mais **n'est pas dérivable**.



### 8.2.4 Calcul des primitives

#### Reconnaître et reconstituer une formule de dérivation

Si  $F$  est une primitive de  $f$ , la formule  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  s'écrit aussi  $F(x) = \int_a^x F'(t)dt$ . La première méthode et la principale, consiste donc à reconnaître une dérivée sous le signe intégrale, pour cela, on

apprend le tableau des primitives usuelles qu'on utilise directement, ou indirectement en remarquant que si  $F$  est une primitive de  $f$ ,  $F(u)$  est une primitive de  $f(u)u'$ . Par exemple :

- Soit  $\alpha \neq -1$ , une fonction du type  $u'u^\alpha$  a pour primitive  $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ .
- une fonction du type  $u'e^u$  a pour primitive  $e^u$ .
- une fonction du type  $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$  a pour primitive  $\sqrt{u}$ .
- une fonction du type  $\frac{u'}{u}$  a pour primitive  $\ln|u|$ .
- **Exemples :**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \left[ \frac{1}{4} \sin^4 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} (u(x) = \sin(x))$

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(2x)(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{3} (2^{\frac{3}{2}} - 1) \quad (u(x) = x^2 + 1)$$

$$\int_0^1 xe^{x^2+1} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - e) \quad (u(x) = x^2 + 1)$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|)$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

### Changement de variable

#### Théorème

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur l'intervalle  $I$ , soit  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow I$  de classe  $C^1$  sur  $I$ , alors

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.}$$

**Remarque** Attention, il ne faut pas oublier de vérifier  $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$ .

**Preuve :** Soit  $F$  une primitive de  $f$ , on a  $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$ . Mais  $F(\varphi(x))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ ,  $F(\varphi(x))$  est donc une primitive de  $f(\varphi(x))\varphi'(x)$  et on a  $F(\varphi(x)) = \int_{\alpha}^x f(\varphi(t))\varphi'(t) dt + C$ . Cette formule est vraie pour tout  $x \in I$ , utilisée en  $x = \alpha$ , elle implique  $C = 0$ , d'où le résultat.

En pratique, pour calculer  $\int_a^b f(x) dx$ , on dit qu'on fait le changement de variable  $x = \varphi(t)$ , on "calcule le  $dx$ " par la formule formelle  $dx = \varphi'(t)dt$  de telle sorte que l'expression sous l'intégrale  $f(x)dx$  devienne  $f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ , on calcule ensuite les bornes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\varphi(\alpha) = a$  et  $\varphi(\beta) = b$ , et si  $\alpha$  et  $\beta$  existent et  $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$ , on applique la formule du théorème.

**Exemples :**

$$\diamond \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

$\sqrt{1-x^2}$  est définie sur  $[-1, 1]$ . On pose  $x = \sin(t)$ , on a  $dx = \cos(t)dt$ ,  $\sqrt{1-x^2} dx = \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t)dt = |\cos(t)| \cos(t)dt$ ,  $\sin(0) = 0$ ,  $\sin(\pi/2) = 1$ ,  $\sin([0, \pi/2]) \subset [-1, 1]$ . Comme  $\cos(t) \geq 0$  sur  $[0, \pi/2]$ , la formule du changement de variable donne

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

## Intégration par parties

### Théorème

Soit  $u$  et  $v$  des fonctions de  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$ .

*Preuve :*  $u'v + uv'$  est continue sur  $[a, b]$ . C'est la dérivée de  $uv$  sur  $[a, b]$ , d'où  
 $\int_a^b u'v + uv' = \int_a^b (uv)' = [u(t)v(t)]_a^b$

**Exemples :**

$$\diamond \quad I = \int_1^2 x \ln x dx = ? \text{ On pose : } \begin{cases} u(x) = \ln(x) & \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x & \rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$I = \left[ \frac{1}{2}x^2 \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 dx = 2 \ln 2 - \left[ \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$\diamond \quad I = \int_0^{\ln 2} xe^x dx = ? \text{ On pose : } \begin{cases} u(x) = x & \rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \rightarrow v(x) = e^x \end{cases}$$

$$I = [xe^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx = \ln 2 e^{\ln 2} - [e^x]_0^{\ln 2} = 2 \ln 2 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - 1$$

### Exemples de calculs de primitives de fractions rationnelles

On verra au deuxième semestre les outils qui permettent de calculer une primitive de n'importe quelle fraction rationnelle. On se limite ici aux fractions rationnelles dont le dénominateur est de degré  $\leq 2$ . Si on prend une fonction  $u$  définie sur un intervalle  $I$  et qui ne s'annule pas sur  $I$ , alors une primitive de  $\frac{u'}{u}$  est  $\ln|u|$ , on a donc

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln(|x+a|) + C \text{ sur tout intervalle où } x+a \text{ ne s'annule pas.}$$

$$\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b} dx = \ln(|x^2+ax+b|) + C \text{ sur tout intervalle où } x^2+ax+b \text{ ne s'annule pas.}$$

Pour calculer  $\int \frac{1}{x^2+ax+b} dx$ , il y a trois possibilités :

1.  $x^2+ax+b$  a deux racines réelles distinctes  $x_0$  et  $x_1$ , on cherche alors  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{\alpha}{x-x_0} + \frac{\beta}{x-x_1},$$

et on est ramené au premier exemple.

2.  $x^2+ax+b$  a une racine double  $x_0$ , on a alors

$$\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{(x-x_0)^2},$$

et on a

$$\int \frac{1}{x^2+ax+b} dx = -\frac{1}{(x-x_0)}.$$

3.  $x^2 + ax + b$  n'a pas de racine réelle, on le met sous forme canonique

$$x^2 + ax + b = (x + \alpha)^2 + \beta,$$

on change de variable pour se ramener à calculer  $\int \frac{1}{X^2 + 1} dX$  dont une primitive est  $\arctan(X)$ .

### Exemple

- ◊  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx$ . On pose  $x+1 = \sqrt{2}X$ , on a  $dx = \sqrt{2}dX$  et  $\frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2X^2 + 2} dX$  d'où  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{X^2 + 1} dX = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)\right) + C$ .
- ◊  $\int \frac{x+2}{x^2 + 2x + 2} dx = ?$  La dérivée du dénominateur est  $2x + 2$ , on écrit le numérateur  $x+2 = \frac{1}{2}(2x+2) + 1$  et on remarque que la forme canonique du dénominateur est  $(x+1)^2 + 1$ . On a donc

$$\int \frac{x+2}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + \arctan(x+1) + C.$$

### Exemples de calculs de primitives de polynômes trigonométriques

Un polynôme trigonométrique est une combinaison linéaire de produit de puissances de cos et de sin.  $f(x) = 3\cos^2(x)\sin(x) + 2\sin^3(x) + \cos^2(x)$  est un polynôme trigonométrique. Certain terme s'intègre directement, ici  $\int 3\cos^2(x)\sin(x)dx = -\cos^3(x) + C$ , d'autre non. La méthode générale consiste à linéariser le polynôme en utilisant les formules trigonométriques, ou de façon plus adaptée pour les cas compliqués, en utilisant les nombres complexes. Ici on sait que  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$ , donc  $\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + C$ , par contre pour  $\sin^3(x)$ , on écrit

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = -\frac{1}{4}(\sin(3x) + 3\sin(x)).$$

On a donc  $\int \sin^3(x)dx = \frac{1}{12}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) + C$ . On trouve

$$\int (3\cos^2(x)\sin(x) + 2\sin^3(x) + \cos^2(x))dx = -\cos^3(x) + \frac{1}{12}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + C.$$

On voit que la formule n'est pas très satisfaisante, reste à linéariser  $\cos^3(x)$  !

On a compris que linéariser  $P(\cos(x), \sin(x))$  consiste à transformer le polyôme  $P(\cos(x), \sin(x))$  en une combinaison linéaire  $\sum_k a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)$ .

### Propriétés de parité et de périodicité

Soient  $a$  un réel et  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  :

- a) Si  $f$  est paire alors  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
- b) Si  $f$  est impaire alors  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

c) Si  $f$  est périodique de période  $T$  alors pour tout réel  $a$  :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

*Preuve* : exercice, utiliser la relation de Chasles.

**Exemple :**

$\int_0^{2\pi} (\cos^2(x) + 1) \cos(x) \sin(x) dx = ?$ . On observe que la fonction à intégrer est périodique de période  $2\pi$  et impaire, donc :

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(x) + 1) \cos(x) \sin(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(x) + 1) \cos(x) \sin(x) dx = 0.$$



# Chapitre 9

## Systèmes linéaires, matrices

### 9.1 Introduction

On va s'intéresser dans ce chapitre à la résolution de systèmes d'équations dits « linéaires » dont voici deux exemples :

$$(S1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad (S2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Ce sont des systèmes d'équations dont les inconnues sont  $x, y$  et  $z$  dans le premier cas,  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  dans le second. Pourquoi parle t-on de systèmes « linéaires » ? Commençons par une définition :

**Définition 9.1.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit qu'une application  $F : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto F(X) \end{cases}$  est linéaire si elle vérifie

- $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad F(X + Y) = F(X) + F(Y),$
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad F(\lambda X) = \lambda F(X).$

Rappelons que si  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  alors :

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Considérons alors le premier système, posons  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et

$$F(X) = x + y + z, \quad G(X) = 2x + z, \quad H(X) = -x - y + 3z$$

On vérifie très facilement que chacune des applications  $F, G, H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire et ceci caractérise précisément les systèmes linéaires. Chacune des lignes prise isolément est une équation linéaire.

L'ensemble des solutions de  $(S_1)$  est l'ensemble des triplets  $X = (x, y, z)$  qui satisfont les trois équations. On dit que  $X$  est l'inconnue vectorielle dans  $\mathbb{R}^3$ .

Un système d'équations linéaires ne comporte pas nécessairement le même nombre d'équations que d'inconnues :  $(S2)$  a quatre inconnues et trois équations.

A contrario, voici un exemple de système non linéaire :  $\begin{cases} x^3 + xy + z = 1 \\ xyz + y + z^2 = 2 \end{cases}$

On rencontre des systèmes linéaires dans différents domaines des mathématiques (Algèbre Linéaire, Calcul Scientifique ...) et dans de nombreuses applications où le nombre d'équations et d'inconnues peut atteindre plusieurs milliers : il faut donc disposer de méthodes de résolution efficaces car, à défaut, le temps de calcul sur ordinateur pourrait devenir prohibitif.

Le plus simple des systèmes d'équations linéaires est l'équation  $ax = b$  : une équation, une inconnue. Cette équation a :

- une et une seule solution si  $a \neq 0$  :  $S = \{b/a\}$ ,
- aucune solution si  $a = 0$  et  $b \neq 0$  :  $S = \emptyset$ ,
- une infinité de solution si  $a = b = 0$  :  $S = \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ).

On se gardera donc de croire naïvement qu'un système d'équations linéaires a toujours une unique solution.

**Remarque 9.1.1.** Dans  $(S_1)$  et  $(S_2)$  on a pris soin d'écrire les inconnues dans le même ordre et les unes au dessus des autres. C'est une précaution indispensable pour éviter les erreurs. Ainsi le système

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z + 3y = 1 \\ y - z + x = 8 \\ z - x - y = 3 \end{array} \right. \text{ sera écrit } \left\{ \begin{array}{l} x + z + 3y = 1 \\ x - z + y = 8 \\ -x + z - y = 3 \end{array} \right. \text{ ou bien } \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ x + y - z = 8 \\ x + y - z = -3 \end{array} \right.$$

Deux systèmes (d'équations linéaires) sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions (éventuellement vide ou infini). Les deux derniers systèmes écrits, par exemple, sont équivalents (et n'ont pas de solution : pourquoi ?).

La suite du chapitre consiste à donner une méthode de résolution explicite des systèmes d'équations linéaires puis à donner les notions de base sur les matrices (déjà introduites en classe terminale) pour pouvoir établir le lien entre les systèmes d'équations linéaires et les matrices. Les propriétés des opérations sur les matrices fournissent des outils puissants pour étudier les systèmes d'équations linéaires.

## 9.2 Résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss

Considérons le système suivant, dans lequel on a numéroté les lignes :

$$(T) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 & L_1 \\ 2y + z & = & -1 & L_2 \\ -z & = & 4 & L_3 \end{array} \right.$$

Ce système est d'un type particulier qu'on appelle triangulaire supérieur. Il est très simple de résoudre un tel système et la méthode de Gauss décrit **un algorithme** pour transformer le système de départ en un système triangulaire équivalent.

### 9.2.1 Résolution d'un système triangulaire supérieur (exemple)

On prend les équations de  $(T)$  à partir de la dernière et « **on remonte** ». C'est-à-dire qu'on calcule  $z$ , puis  $y$ , puis  $x$  par substitution des inconnues déjà calculées :

dans  $L_3$  :  $z = -4$ ,

dans  $L_2$  :  $2y = -1 - z = -1 + 4 = 3 \implies y = \frac{3}{2}$ ,

enfin, dans  $L_1$ ,  $x = 1 - y - z = 1 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{7}{2}$ .

Il y a donc une unique solution :  $S = \left\{ \left( \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, -4 \right) \right\}$ .

### 9.2.2 Méthode de Gauss

Les transformations suivantes sont utilisées systématiquement dans la méthode de Gauss pour transformer un système en un système triangulaire :

- changer l'ordre des équations,
- changer l'ordre des inconnues (dans toutes les équations à la fois),
- multiplier une équation par un nombre non nul,
- conserver toutes les lignes sauf une et ajouter à cette dernière ligne une combinaison des autres.

Il est facile de vérifier que ces transformations sont réversibles et donc qu'elles **transforment un système en un système équivalent**.

Une fois fixé l'ordre des équations et des inconnues, pour obtenir un système triangulaire à partir d'un système de  $n$  lignes notées de haut en bas  $L_1, \dots, L_n$ , le principe général de l'algorithme de Gauss est le suivant :

- utiliser la première ligne ( $L_1$ ) pour éliminer la première inconnue de toutes les autres lignes,
- recommencer avec le sous-système formé des nouvelles lignes  $L_2, \dots, L_n$  et avec la seconde inconnue,

et ainsi de suite. On précise tout cela sur quelques exemples :

- **Exemple 1 :**  $\begin{cases} 3x + 2y = 0 & L_1 \\ x - y = 1 & L_2 \end{cases}$

On choisit comme inconnu  $(x, y)$ . Pour éliminer  $x$  dans  $L_2$ , il faut lui soustraire  $\frac{1}{3}L_1$  :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 & L_1 \\ -\frac{5}{3}y = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \end{cases}$$

Le codage  $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1$  signifie que la nouvelle ligne numéro 2 s'obtient, comme on vient de le préciser, par l'opération  $L_2 - \frac{1}{3}L_1$  sur les lignes du système précédent.

**En pratique**, on peut se contenter de noter cette étape ainsi :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 & L_1 \\ -\frac{5}{3}y = 1 & L_2 - \frac{1}{3}L_1 \end{cases}$$

La re-numérotation des nouvelles lignes par  $L_1, L_2, \dots$  est implicite, pour alléger.

**Attention** : décrire l'opération effectuée, ici  $L_2 - \frac{1}{3}L_1$ , en face la ligne obtenue et non pas par anticipation au niveau du système de départ (erreur fréquemment relevée dans les copies d'examen).

On a obtenu le système triangulaire souhaité, on procède à la **remontée** :

$$L_2 \text{ donne } y = \frac{-3}{5} \text{ puis } L_1 \text{ donne } x = -\frac{2}{3}y = \frac{2}{5}$$

$$S = \left\{ \left( \frac{2}{5}, \frac{-3}{5} \right) \right\},$$

on a une unique solution.

On peut simplifier (un tout petit peu ici) le calcul en commençant par une permutation de lignes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{array}$$

Pour éliminer  $x$ , il suffit de soustraire à la deuxième ligne 3 fois la première :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 1 \\ -5y & = & 3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \end{array}$$

On laisse au lecteur le soin de faire la remontée. On trouve bien sûr le même résultat que précédemment.

- **Exemple 2 :**  $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ 2x + y - z & = & 2 \\ -2x - y + 2z & = & -1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

On choisit  $(x, y, z)$  comme inconnue. On ne permute pas les lignes car le coefficient de  $x$  dans la première ligne est 1 et les calculs seront simples.

**élimination de  $x$  dans les lignes 2 et 3 :**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ -y - 3z & = & -4 \\ y + 4z & = & 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + 2L_1 \end{array}$$

On ne travaille plus qu'avec les deux dernières lignes, pas de permutation nécessaire si on n'est pas gêné par le  $-$  devant le  $y$  dans la deuxième ligne.

**élimination de  $y$  dans la ligne 3 :**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ -y - 3z & = & -4 \\ z & = & 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \end{array}$$

**Remontée :**

$L_3$  donne  $z = 1$

$L_2$  donne  $y = 4 - 3z = 1$

$L_1$  donne  $x = 3 - y - z = 1$

$$S = \{(1, 1, 1)\},$$

- **Exemple 3 :**  $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 8 \\ 2x + y + 3z & = & 11 \\ -x - 3y + 2z & = & -7 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

**élimination de  $x$  dans les lignes 2 et 3 :**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 8 \\ -3y + z & = & -5 \\ -y + 3z & = & 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

On peut poursuivre avec l'inconnue  $y$  de la ligne  $L_2$  ou encore de la ligne  $L_3$  (pour faciliter les calculs en évitant les fractions) en commençant dans ce cas par permute les lignes  $L_2$  et  $L_3$ .

On peut aussi, si on n'aime ni le  $-3$  ni le  $-1$  devant le  $y$  permute les deux dernières variables :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + z + 2y & = & 8 \\ z - 3y & = & -5 \\ 3z - y & = & 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

élimination de  $z$  dans la ligne 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z + 2y = 8 \quad L_1 \\ z - 3y = -5 \quad L_2 \\ 8y = 16 \quad L_3 - 3L_2 \end{array} \right.$$

**Remontée :**

$L_3$  donne  $y = 2$

$L_2$  donne  $z = -5 + 3y = 1$  et  $L_1$  donne  $x = 8 - z - 2y = 3$ .

**Attention :** on remet les valeurs dans l'ordre  $(x, y, z)$  implicite choisi au départ (c'est là le danger des permutations de variables) :

$$S = \{(3, 2, 1)\}$$

- **Exemple 4 :**  $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 8 \quad L_1 \\ 2x + y + 3z = 11 \quad L_2 \\ 3x + 3y + 4z = -7 \quad L_3 \end{array} \right.$

élimination de  $x$  dans les lignes 2 et 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 8 \quad L_1 \\ -3y + z = -5 \quad L_2 - 2L_1 \\ -3y + z = -31 \quad L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

l'élimination de  $y$  ou de  $z$  dans la dernière ligne conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z + 2y = 8 \quad L_1 \\ -3y + z = -5 \quad L_2 \\ 0 = -26 \quad L_3 - L_2 \end{array} \right.$$

En raison de la troisième ligne, on est dans un cas où il n'y a pas de solution :

$$S = \emptyset.$$

- **Exemple 5 :**  $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 8 \quad L_1 \\ 2x + y + 3z = 11 \quad L_2 \\ 3x + 3y + 4z = 19 \quad L_3 \end{array} \right.$

élimination de  $x$  dans les lignes 2 et 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 8 \quad L_1 \\ -3y + z = -5 \quad L_2 - 2L_1 \\ -3y + z = -5 \quad L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

l'élimination de  $y$  ou de  $z$  dans la dernière ligne conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 8 \quad L_1 \\ -3y + z = -5 \quad L_2 \\ 0 = 0 \quad L_3 - L_2 \end{array} \right.$$

La dernière ligne peut être enlevée. Il reste deux équations pour trois inconnues : on dit que le système est sous-déterminé.

On choisit l'une des inconnues que l'on « fait passer » dans le second membre (ce choix est dicté par la facilité des calculs ultérieurs) :

$$\begin{cases} x + z = 8 - 2y & L_1 \\ z = -5 + 3y & L_2 \end{cases}$$

On résout le système obtenu en considérant  $y$  comme un paramètre (une donnée non explicitée). Les inconnues  $x$  et  $z$  sont alors exprimées en fonction de  $y$  et on obtient une infinité de solutions en choisissant arbitrairement la valeur de  $y$  :

$L_1$  donne  $x = 8 - z - 2y = 13 - 5y$  et on a finalement

$$S = \{(13 - 5y, y, -5 + 3y), y \in \mathbb{R}\}.$$

Une autre expression de l'ensemble des solutions est obtenue en choisissant  $z$  comme paramètre plutôt que  $y$  :

$$L_2 \text{ donne } y = \frac{1}{3}(z + 5)$$

$$L_1 \text{ donne } x = 8 - z - 2y = \frac{14}{3} - \frac{5}{3}z$$

$$S = \left\{ \left( \frac{14}{3} - \frac{5}{3}z, \frac{1}{3}(z + 5), z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

Bien entendu **ces deux descriptions correspondent au même ensemble de solutions**. Cette fois-ci le système a une infinité de solutions qui dépendent d'un paramètre arbitraire ( $y$  dans la première description,  $z$  dans la seconde).

### Remarque 9.2.1.

1. On voit qu'il ne sert à rien de réécrire les inconnues  $x, y \dots$  à chaque étape, on peut n'écrire que les coefficients sous forme de tableau et faire évoluer ce tableau à chaque opération d'élimination ou de permutation. Il ne faut pas oublier d'effectuer les opérations sur les seconds membres.
2. La méthode de Gauss s'appelle parfois **méthode du pivot de Gauss**. Dans l'algorithme, et à chaque étape d'élimination, le pivot est le coefficient de l'inconnue dans la ligne qui va servir à éliminer cette même inconnue dans les lignes suivantes : dans l'exemple 2 et dans l'élimination de  $x$  dans les lignes 2 et 3, le pivot est le coefficient de  $x$  de la première ligne, c'est à dire 1, dans l'élimination de  $y$  dans la troisième ligne, le pivot est le coefficient  $-1$  car la deuxième ligne contient  $-x$ .  
Pour l'implantation sur ordinateur, le choix du pivot est crucial : on choisit le plus grand coefficient en valeur absolue afin de minimiser les erreurs d'arrondis et on effectue les permutations de lignes en conséquence.
3. On verra dans les deux chapitres suivants une interprétation géométrique des systèmes linéaires à deux ou trois inconnues.

## 9.3 Matrices

### 9.3.1 Définitions

Une matrice à coefficients réels (complexes) est un tableau rectangulaire de nombres réels (ou complexes). On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à coefficients réels comportant  $n$  lignes et  $p$  colonnes et  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices à coefficients complexes comportant  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

Une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes se note  $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  ou éventuellement  $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  quand  $p = n$  ou simplement  $(a_{i,j})$  s'il n'y a pas ambiguïté. On dit que c'est une matrice de taille  $n \times p$ .

Dans cette écriture,  $a_{i,j}$  désigne le nombre qui figure en ligne  $i$  (numérotation de haut en bas) et en colonne  $j$  (de gauche à droite).

On dit que la matrice  $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  est :

- **carrée** si  $n = p$ . Les termes de la forme  $a_{i,i}$  définissent *la diagonale* de la matrice. L'ensemble des matrices carrées  $n \times n$  à coefficients réels est noté simplement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , plutôt que  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ .
- **triangulaire supérieure** si elle est carrée et si tous les termes strictement sous la diagonale sont nuls :

$$M = \begin{pmatrix} \times & \times & .. & \times \\ 0 & \times & \times & .. \\ 0 & 0 & \times & .. \\ .. & & & \times \\ 0 & 0 & ..0 & \times \end{pmatrix}$$

- **triangulaire inférieure** si elle est carrée et si tous les coefficients au dessus de la diagonale sont nuls.
- **diagonale** si elle est carrée et si tous les coefficients hors de la diagonale sont nuls :

$$M = \begin{pmatrix} \times & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & \times & .. & 0 & 0 \\ .. & & \times & & \\ 0 & 0 & .. & \times & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & \times \end{pmatrix}$$

Parmi les matrices diagonales de taille  $n$  on distingue la matrice identité de taille  $n$ , notée  $I_n$ , dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1. Par exemple  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- **nulle** si tous les coefficients sont nuls. On la note 0.
- **une matrice ligne**, ou *vecteur ligne*, si elle est de taille  $1 \times p$ .
- **une matrice colonne**, ou *vecteur colonne*, si elle est de taille  $n \times 1$ .

**Exemples :**

- $n = p = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

- $n = 2, p = 3$

$$M = \begin{pmatrix} \pi & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -\pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

- $n = p = 3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

- vecteur ligne de taille  $1 \times 4$  (on dit simplement de taille 4) :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

- vecteur colonne de taille 4 :  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### 9.3.2 Transposée d'une matrice

**Définition 9.3.1.** Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice de taille  $n \times p$ . La matrice transposée de  $A$ , notée  ${}^t A$  est la matrice  $(b_{i,j})$  de taille  $p \times n$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_{i,j} = a_{j,i}$$

On observera donc que la ligne  $i$  de  $A$  devient la colonne  $j$  de  ${}^t A$ .

**Exemple :**  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \quad {}^t A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

### 9.3.3 Somme de deux matrices

**Définition 9.3.2.** Soient  $A(a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  deux matrices à coefficients réels ou complexes de même taille  $n \times p$ . La somme, notée  $A + B$  de ces deux matrices est la matrice  $(a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ .

On ajoute les termes de même position. On a immédiatement les propriétés

$$A + B = B + A \text{ (commutativité) et } A + 0 = A.$$

- **Exemple 1 :**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M + N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Exemple 2 :**

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad M + N = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- **Exemple 3 :**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad M + N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

### 9.3.4 Produit d'une matrice par un scalaire

**Définition 9.3.3.** Soient  $A = (a_{i,j})$  une matrice à coefficients réels (ou complexes) de taille  $n \times p$  et  $\lambda$  un réel (ou un complexe). La matrice produit de  $A$  par le scalaire  $\lambda$  est la matrice de taille  $n \times p$   $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$ .

On multiplie chaque terme de la matrice  $A$  par  $\lambda$ . On a les propriétés suivantes, toutes très simple à établir :

**Proposition 9.3.1.** Soient  $A(a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  deux matrices à coefficients réels ou complexes de même taille  $n \times p$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  des scalaires. Alors :

$$\begin{aligned} 1A &= A, \\ 0A &= 0, \\ \lambda(A+B) &= \lambda A + \lambda B, \\ (\lambda+\mu)A &= \lambda A + \mu A \end{aligned}$$

- **Exemple :**  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\lambda M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

### 9.3.5 Produit de deux matrices

La définition que l'on va donner du produit de deux matrices ne semble pas naturelle au premier abord (on ne fait pas les produits des termes de même position). Elle sera éclairée par l'usage que l'on va en faire et que vous en ferez en étudiant l'algèbre linéaire. Ce produit est soumis à une contrainte stricte sur les dimensions des matrices : **pour pouvoir effectuer le produit, noté  $AB$ , de deux matrices  $A$  et  $B$ , il faut que le nombre de colonnes de  $A$  soit égal au nombre de lignes de  $B$ .** On commence par un cas particulier :

- **produit d'une matrice ligne par une matrice colonne :**

**Définition 9.3.4.** Le produit d'une matrice ligne  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$  de taille  $p$  et d'une matrice colonne  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}$  de taille  $p$ , dans cet ordre, est donné par :

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_p b_p.$$

Il s'agit donc d'un scalaire (un réel ou un complexe), que l'on peut voir comme une matrice de taille  $1 \times 1$  (sans les parenthèses).

**Exemples :**

$$(1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 10,$$

$$(1 \ -2 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 0 = -11.$$

Par contre le produit  $(1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  n'est pas défini.

- **cas général :**

**Définition 9.3.5.** Soient  $A = (a_{i,j})$  une matrice de taille  $n \times p$  et  $B = (b_{i,j})$  une matrice de taille  $p \times q$ . Le produit  $AB$  de ces matrices est la matrice  $C = (c_{i,j})$  de taille  $n \times q$  dont le terme général  $c_{i,j}$

est donné par le produit de la  $i$ ème ligne de  $A$  et de la  $j$ ème colonne de  $B$ , c'est à dire :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

Deux matrices  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}$  donnent donc une troisième matrice  $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}$

$$n \times \underbrace{\textcolor{red}{p}}_{\cdot} \times q \longrightarrow n \times q$$

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 2, \quad p = q = 3 \quad C = AB = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Le produit  $BA$  n'est pas défini :  $B \in \mathcal{M}_{3,3}$  et  $A \in \mathcal{M}_{2,3}$ . Le nombre de colonnes de  $B$  est différent du nombre de lignes de  $A$ .

**Proposition 9.3.2.** Soient  $A, B, C$  des matrices à coefficients réels ou complexes et  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). Dans tous les cas où les dimensions des matrices rendent possibles les opérations on a :

$$A(BC) = (AB)C \text{ (associativité),}$$

$$A(B+C) = A.B + A.C \text{ et } (A+B).C = A.C + B.C \text{ (distributivité par rapport à l'addition),}$$

$$\text{si } A \in \mathcal{M}_{n,p} \text{ alors } A.Id_p = Id_n.A = A,$$

$$(\lambda A).B = A.(\lambda B) = \lambda(A.B).$$

Vous pouvez démontrer toutes ces propriétés en exercice.

**Attention :** le produit des matrices n'est pas commutatif : même si les produits  $AB$  et  $BA$  existent on n'a pas toujours  $AB = BA$ . C'est évident si les matrices ne sont pas carrées : si  $A$  est une matrice  $n \times p$  et  $B$  une matrice  $p \times n$ ,  $AB$  est une matrice  $n \times n$  tandis que  $B.A$  est une matrice  $p \times p$ , mais c'est en général faux aussi si les matrices sont carrées. Le premier exemple qui suit illustre cette situation.

**Autres exemples de produits :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ donnent } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ donne } I_3B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ donne } I_3B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = B.$$

**Produit matrice-vecteur :** Il découle de ce qui précéde que le produit d'une matrice  $n \times n$  par un vecteur colonne de dimension  $n$  est un vecteur colonne de dimension  $n$  tandis que le produit d'un vecteur ligne de dimension  $n$  par une matrice  $n \times n$  est un vecteur ligne de dimension  $n$ .

**Exemple :**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ d + 2e + 3f \\ g + 2h + 3i \end{pmatrix}$$
$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (a + 2d + 3g \ b + 2e + 3h \ c + 2f + 3i)$$

### 9.3.6 Matrices inversibles

**Définition 9.3.6.** Une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible, s'il existe une matrice carrée  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $AB = BA = I_n$ .  $B$  s'appelle alors la matrice inverse de  $A$  et est notée  $B = A^{-1}$ .

On a la même définition en remplaçant  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$ .

On admet la proposition suivante :

**Proposition 9.3.3.**  $A \in \mathcal{M}_n$  est inversible si et seulement si  $\exists B \in \mathcal{M}_n$  telle que  $AB = I_n$

Remarquons juste que s'il existe  $B \in \mathcal{M}_n$  et  $C \in \mathcal{M}_n$  telles que  $AB = I_n$  et  $CA = I_n$  alors  $B = C$ . En effet  $AB = I_n \Rightarrow C(AB) = CI_n = C \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow I_nB = C \Rightarrow B = C$ .

- **Exemple :**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . On vérifie que  $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ , donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Remarque 9.3.1.** Toute matrice carrée n'est pas inversible. Il est d'abord nécessaire que la matrice soit une matrice carrée, mais cela ne suffit pas. En effet, s'il existe un vecteur colonne **non nul**  $X$  tel que  $A.X = 0$ ,  $A$  ne peut pas être inversible, sinon on aurait  $A^{-1}.(AX) = 0$  et avec la propriété d'associativité on obtient  $(A^{-1}.A).X = 0$  et donc  $I_nX = X = 0$  : contradiction. Par exemple, la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible : prendre  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

## 9.4 Matrices et systèmes d'équations linéaires

### 9.4.1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Tout système d'équations linéaires comportant  $n$  équations portant sur  $p$  inconnues peut s'écrire  $AX = B$  où  $X$  est un vecteur colonne de dimension  $p$  constitué des inconnues,  $B$  est le vecteur colonne de dimension  $n$  constitué des seconds membres et  $A$  une matrice  $n \times p$  constituée des coefficients du système. **C'est notamment pour avoir cette propriété qu'on a introduit le produit de matrice.**

- **Exemple 1 :**  $(S)$   $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

On pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . On a alors  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , en effet  $AX = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix}$ , donc

$$(S) \iff AX = B$$

- **Exemple 2 :**  $(S)$   $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$

Avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  on a  $(S) \iff AX = B$

- **Exemple 3 :**  $(S)$   $\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + y + z = b \\ -x + y = c \end{cases}$

Avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  on a  $(S) \iff AX = B$ .

On énonce maintenant le résultat fondamental :

**Proposition 9.4.1.** *Un système d'équations linéaires  $AX = B$  à  $n$  équations et  $n$  inconnues admet une et une seule solution pour toute donnée  $B$  si et seulement si  $A$  est une matrice inversible.*

Notez que  $A$  est une matrice carrée  $n \times n$ . La preuve utilise le résultat suivant :

**Lemme 9.4.1.** *Si  $C$  est une matrice inversible alors*

$$AX = B \Leftrightarrow (CA)X = CB,$$

La multiplication à gauche par une matrice inversible transforme donc automatiquement un système d'équations linéaires en un système équivalent. La méthode de Gauss revient à chaque étape à cette opération de multiplication à gauche par une matrice convenable que vous pouvez chercher.

**Preuve du lemme :** l'implication de la gauche vers la droite s'obtient en multipliant par  $C$ , on a donc  $C(AX) = CB$ , l'associativité donne alors  $(CA)X = B$ . L'implication de la droite vers la gauche s'obtient en multipliant par  $C^{-1}$ , on obtient  $C^{-1}((CA)X) = C^{-1}(CB)$  et en utilisant l'associativité, on obtient  $C^{-1}(C(AX)) = (C^{-1} \cdot C) \cdot B = B$  et de nouveau l'associativité  $(C^{-1}C)(AX) = B$  soit  $AX = B$ . ■

**Preuve de la proposition 9.4.1 :** Si  $A$  est inversible, on peut prendre  $C = A^{-1}$  dans la proposition précédente, on obtient

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B,$$

ce qui démontre l'existence et l'unicité de la solution.

Réciproquement, si le système d'équations linéaires  $AX = B$  admet une solution pour toute donnée  $B$ , alors on peut résoudre les systèmes linéaires  $AX_i = E_i$  où  $E_i$  est le vecteur colonne ne comportant que des 0 à l'exception d'un 1 sur la  $i$ ème ligne. La matrice  $C = (X_1 \dots X_n)$  dont les colonnes sont les  $X_i$  vérifie  $AC = I_n$ ,  $A$  est donc inversible. ■

## 9.4.2 Méthode pratique de calcul de l'inverse d'une matrice

On écrit un système de matrice  $A$  avec un second membre  $B$  quelconque. Par exemple si

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  (voir l'exemple 2. ci-dessous) on prend  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et on résout le système par la

méthode de Gauss (mais toute autre méthode est recevable). Si la matrice est inversible, et seulement dans ce cas, la solution dépendra des coefficients de  $B$  et pourra s'écrire sous la forme  $X = MB$  où  $M$  est une matrice de réels. Comme on a aussi  $X = A^{-1}B$  et que  $B$  est quelconque on peut en déduire que  $A^{-1} = M$ .

Ce dernier point se justifie ainsi : en choisissant  $B$  ne contenant que des zéros sauf à la ligne  $i$ , l'égalité  $MB = A^{-1}B$  donne l'égalité des  $i$ èmes colonnes de  $M$  et de  $A^{-1}$ . En faisant varier  $i$  on obtient l'égalité des deux matrices.

On précise la méthode sur trois exemples :

- **Exemple 1 :**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

On prend une matrice inconnue  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et une matrice second membre  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On résout le système  $(S)$   $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$

$$(S) \begin{cases} x + y = a & L_1 \\ x - y = b & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = a + b & (L_1 + L_2) \\ 2y = a - b & (L_1 - L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \end{cases} \iff$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \text{ Finalement on obtient } A^{-1} = M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- **Exemple 2 :**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

On prend  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

$$AX = B \iff (S) \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ x + z = b & L_2 \\ y + z = c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ y = a - b & L_1 - L_2 \\ y + z = c & L_3 \end{cases}$$

on a un système triangulaire en permutant les deux dernières lignes et on effectue la remontée :

$$\begin{cases} y = a - b \\ z = c - y = -a + b + c \\ x = a - y - z = a - a + b + a - b - c = a - c \end{cases}$$

En respectant l'ordre des variable fixé par le vecteur  $X$  :

$$\begin{cases} x = a & -c \\ y = a - b & \\ z = -a + b + c & \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Exemple 3 :**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  on a :

$$\begin{aligned} AX = B &\iff (S) \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ x - y + 2z = b & L_2 \\ 2x + 3z = c & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ -2y + z = b - a & L_2 - L_1 \\ -2y + z = c - 2a & L_3 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ -2y + z = b - a & L_2 \\ 0 = -a - b + c & L_3 - L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve que le système n'a de solution que si  $-a - b + c = 0$ , il n'a donc pas toujours de solution : **la matrice  $A$  n'est pas inversible.**

## 9.5 Matrices et systèmes $2 \times 2$

Dans le cas particulier des systèmes  $2 \times 2$  on se propose de donner un critère d'existence d'une unique solution et, dans ce cas, de donner une formule générale de résolution. On obtient alors un critère d'inversibilité et une formule d'inversion pour les matrices  $2 \times 2$ .

Considérons le système

$$(S) \begin{cases} ax + by = u & L_1 \\ cx + dy = v & L_2 \end{cases}$$

de matrice associée  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On a les implications suivantes :

$$(S) \implies \begin{cases} acx + bcy = cu & cL_1 \\ cax + ady = av & aL_2 \\ adx + bdy = du & dL_1 \\ bcx + bdy = bv & bL_2 \end{cases} \implies \begin{cases} (ad - bc)x = du - bv & L_3 - L_4 \\ (ad - bc)y = -cu + av & L_2 - L_1 \end{cases}$$

On ne peut bien sûr poursuivre le calcul que si  $ad - bc \neq 0$ .

**Définition 9.5.1.** On appelle déterminant d'une matrice carrée  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  d'ordre deux le réel noté  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  ou  $\det(A)$ , donné par « le produit en croix » :  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

**Remarque 9.5.1.** On obtient immédiatement que  $\det A = \det {}^t A$ .

Il convient de savoir interpréter la nullité d'un déterminant (voir aussi le chapitre 10) :

**Proposition 9.5.1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Alors  $\det A = 0$  si et seulement si les lignes  $(a, b)$  et  $(c, d)$  sont proportionnelles, ou encore si et seulement si les colonnes  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  sont proportionnelles.

**Preuve :** supposons les lignes proportionnelles. Si  $(a, b) = (0, 0)$  le déterminant est clairement nul, sinon il existe un réel  $k$  tel que  $c = ka$  et  $d = kb$ , alors  $\det A = ad - bc = akb - bka = 0$ .

Réciproquement supposons que  $ad - bc = 0$ . Si  $(a, b) = (0, 0)$  on a fini, sinon on a par exemple  $a \neq 0$  : on pose alors  $k = \frac{c}{a}$  de sorte que  $c = ka$ . Mais alors  $ad - bc = 0 \implies d = \frac{c}{a}b = kb$  et les lignes sont proportionnelles.

Le raisonnement est analogue avec les colonnes mais on peut aussi utiliser le cas des lignes et la remarque 9.5.1. ■

Revenons à la résolution du système  $(S)$  :

**Proposition 9.5.2.**

- Si  $\det A = 0$  avec  $a, b, c, d$  tous nuls, le système  $(S)$  admet des solutions si et seulement si  $u = v = 0$  et dans ce cas l'ensemble des solutions est  $\mathbb{R}^2$ .
- Si  $\det A = 0$  mais  $a, b, c, d$  non tous nuls, le système admet des solutions si et seulement si  $(a, b, u)$  et  $(c, d, v)$  sont proportionnels. Dans ce cas, si par exemple  $a \neq 0$  on a  $(S) \iff L_1$  : l'ensemble des solutions est  $\left\{ \left( \frac{u - bt}{a}, t \right); t \in \mathbb{R} \right\}$ .
- Si  $\det A \neq 0$  le système admet une unique solution donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad (9.1)$$

Pour se souvenir de ces formules on notera que pour le numérateur de  $x$ , première inconnue, on remplace la première colonne du déterminant de  $A$  par la colonne du second membre tandis que pour le numérateur de  $y$ , deuxième inconnue, on remplace la deuxième colonne du déterminant de  $A$  par la colonne du second membre.

**Preuve :** le premier cas est immédiat. Dans le second cas on a par exemple  $a \neq 0$  et alors, comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 9.5.2, il existe un réel  $k$  tel que  $c = ka$  et  $d = kb$ . Si  $v \neq ku$  le système est clairement incompatible et  $S = \emptyset$ , sinon  $(S) \iff L_1$  et la suite est classique : on donne à  $y$  une valeur arbitraire  $t$  et on en déduit  $x$ . Enfin si  $\det A \neq 0$  on termine les calculs amorcés plus haut : on obtient la seule solution possible et on vérifie qu'elle convient. Il reste à interpréter les numérateurs comme des déterminants. ■

Réécrivons les formules de Cramer sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\det A} (du - bv) \\ y &= \frac{1}{\det A} (-cu + av) \end{cases}$$

On a prouvé que  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , et donc  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

En résumé :

**Proposition 9.5.3.** Une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible si et seulement si  $\det A \neq 0$  et dans ce cas son inverse s'obtient par la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

**Remarque 9.5.2.** On notera que la matrice en facteur de  $\frac{1}{\det A}$  s'obtient à partir de  $A$  en échangeant les termes de la diagonale ( $a$  et  $d$ ) et en changeant les autres de signe.

# Chapitre 10

## Géométrie élémentaire du plan

**Objectifs** : dans le contexte de la géométrie plane étudiée au lycée, sans construction théorique préliminaire, donner la maîtrise de quelques outils indispensables et de leurs applications : produit scalaire, déterminant, calculs d'angles, de distances et d'aires.

### 10.1 Contexte général et rappels

On s'assurera que toutes les notions abordées dans cette section sont effectivement connues.

#### 10.1.1 Contexte

La notion de plan (on dit aussi *plan affine*), conformément à ce qui se pratique dans l'enseignement secondaire, est considérée ici comme une donnée, largement basée sur l'intuition et l'expérience sensible. Les objets de base sont les points et les droites pour lesquelles on a les notions de parallélisme et d'orthogonalité.

Le plan, noté ici  $\mathcal{P}$ , est muni d'une distance. La notion générale de distance est celle-ci :

**Définition 10.1.1.** Une distance sur un ensemble  $E$  est une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie :

1.  $\forall (A, B) \in E^2, d(A, B) = 0 \iff A = B,$
2.  $\forall (A, B) \in E^2, d(A, B) = d(B, A)$  (symétrie),
3.  $\forall (A, B, C) \in E^3, d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$  (inégalité triangulaire).

La distance que vous connaissez, avec la notation usuelle  $d(A, B) = AB$ , vérifie bien sûr ces propriétés mais aussi le célèbre théorème de Pythagore (et sa réciproque), qui n'en est absolument pas une conséquence :

*Les droites  $(AB)$  et  $(BC)$  sont orthogonales si et seulement si  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ .*

Le plan  $\mathcal{P}$  muni de cette distance, appelée distance euclidienne, porte le nom de plan (affine) euclidien.

#### 10.1.2 Vecteurs et droites du plan

Un couple  $(A, B)$  de points s'appelle un bipoint. Deux bipoints  $(A, B)$  et  $(C, D)$  sont équipollents si  $ABDC$  est un parallélogramme (i.e. les cotés opposés sont parallèles ou  $AD$  et  $BC$  se croisent en leur milieu). On écrit  $(A, B) \sim (C, D)$ .

L'ensemble de tous les bipoints équipollents à un bipoint  $(A, B)$  définit un objet mathématique  $\overrightarrow{AB}$  tel que  $(A, B) \sim (C, D) \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ . On appelle *vecteur nul*, et on note  $\vec{0}$  le vecteur  $\overrightarrow{AA}$  où  $A$  est un point quelconque.

Par une simple construction de parallélogramme on établit que :

**Proposition 10.1.1.** *Un vecteur  $\vec{u}$  et un point  $O$  étant donnés, il existe un unique point  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ .*

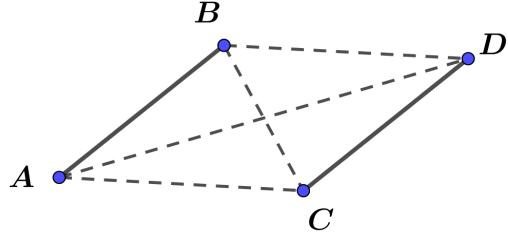


FIGURE 10.1 – Bipoints et vecteurs

Cette propriété est à la base de la notion de translation et permet de définir l'addition vectorielle.

L'ensemble des vecteurs du plan  $\mathcal{P}$ , appelé *plan vectoriel*, sera noté  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ .

Si  $(A, B) \sim (C, D)$ , alors  $AB = CD$  ce qui justifie la définition suivante :

**Définition 10.1.2.** On appelle norme d'un vecteur  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  le réel positif  $\| \vec{u} \| = AB$ .

Un vecteur de norme 1 est dit *unitaire* ou *normé*.

Un vecteur non nul  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  est caractérisé par :

- sa direction : la droite  $(AB)$ ,
- son sens : de  $A$  vers  $B$ , ce qu'exprime la donnée du couple  $(A, B)$ , qui est distinct de  $(B, A)$ ,
- sa norme.

**Définition 10.1.3.** Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls sont dits colinéaires s'ils ont même direction. Le vecteur nul est colinéaire à tous les autres. On écrit  $\vec{u} // \vec{v}$ .

On peut alors établir facilement le résultat suivant :

**Proposition 10.1.2** (et définitions). *Soient  $A \in \mathcal{P}$  et  $\vec{u}$  un vecteur non nul.*

- *L'ensemble des points  $M \in \mathcal{P}$  tels que  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  soient colinéaires est une droite (affine). Cette droite est notée  $D(A, \vec{u})$ , on dit que c'est la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$ .*

$\overrightarrow{D}$  désigne l'ensemble des vecteurs colinéaires à  $\vec{u}$ , on l'appelle droite vectorielle engendrée par  $\vec{u}$  ou ensemble des vecteurs de la droite  $D$ . On écrit  $\overrightarrow{D} = \text{Vect}(\vec{u})$ .

- *L'ensemble des points  $M \in \mathcal{P}$  tels que  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  soient colinéaires et de même sens s'appelle la demi-droite (affine) d'origine  $A$  dirigée par  $\vec{u}$ .*

La somme de deux vecteurs est définie de façon à satisfaire la relation de Chasles  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Le produit d'un vecteur par un scalaire (i.e. un nombre réel) est défini en utilisant la caractérisation ci-dessous :

**Définition 10.1.4.** Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\vec{u}$  un vecteur, alors  $\lambda \vec{u}$  est le vecteur de même direction que  $\vec{u}$ , de même sens que  $\vec{u}$  si  $\lambda \geq 0$ , de sens contraire si  $\lambda < 0$  et de norme  $\| \lambda \vec{u} \| = |\lambda| \| \vec{u} \|$ .  $(-1) \vec{u}$  est noté  $-\vec{u}$ .

On a alors :

**Proposition 10.1.3.** Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si l'une au moins des propriétés suivantes est réalisée :

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = \lambda \vec{u}$
- $\exists \mu \in \mathbb{R}, \vec{u} = \mu \vec{v}$

Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  alors  $\text{Vect}(\vec{u}) = \{\vec{v} \in \mathcal{P}; \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = \lambda \vec{u}\}$ .

**Preuve :** la condition suffisante (si  $\lambda$  ou  $\mu$  existe, alors ...) est immédiate. Montrons qu'elle est nécessaire : supposons  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires. Si  $\vec{u} = \vec{0}$  alors on peut écrire  $\vec{u} = 0 \vec{v}$  ( $\mu = 0$  convient), sinon on vérifie que  $\vec{v} = \varepsilon \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$  avec  $\varepsilon = 1$  si les vecteurs sont de même sens et  $\varepsilon = -1$  sinon. On peut donc prendre  $\lambda = \varepsilon \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$ .

Notons que si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et non nuls, les deux propriétés sont satisfaites et ceci permet de justifier le dernier point (droite vectorielle engendrée par  $\vec{u}$ ). ■

Un résultat simple mais utile :

**Proposition 10.1.4.** Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul. Il existe exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à  $\vec{u}$ , à savoir  $\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ , de même sens que  $\vec{u}$ , et  $\vec{u}_2 = -\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ , de sens contraire.

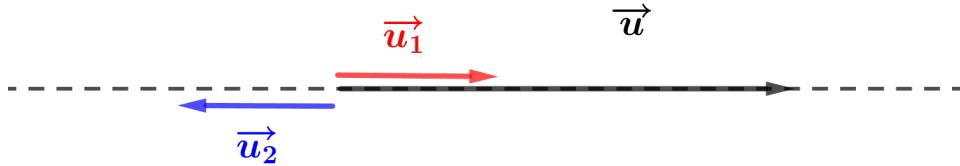


FIGURE 10.2 – Vecteurs unitaires colinéaires à un vecteur donné

Compte tenu des propriétés d'une distance et des définitions des opérations vectorielles on a :

**Proposition 10.1.5.** La norme vectorielle vérifie :

- $\forall \vec{u} \in \mathcal{P}, \|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ,
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2, \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ,
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{P}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$ .

On établira également à titre d'exercice (très simple) que :

**Proposition 10.1.6.**

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \mathcal{P}, \quad \lambda \vec{u} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}.$$

Listons les propriétés usuelles des deux opérations précédemment définies :

**Proposition 10.1.7.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan,  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels, alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u},$$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w},$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u},$$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0},$$

$$(\lambda.\mu).\vec{u} = \lambda.(\mu.\vec{u}),$$

$$(\lambda + \mu).\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu.\vec{u},$$

$$\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v},$$

$$1.\vec{u} = \vec{u}.$$

L'ensemble de ces propriétés font de  $\vec{\mathcal{P}}$  muni des opérations « somme » et « produit par un réel » un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels. La notion générale d'espace vectoriel sera étudiée ultérieurement dans les cours d'algèbre linéaire.

Notons que la propriété d'associativité  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$  permet de donner un sens à l'expression  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$  qui est égale, par définition, indifféremment à  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  ou  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ .

### 10.1.3 Repères cartésiens, bases

**Définition 10.1.5.** Un repère cartésien du plan affine  $\mathcal{P}$  est un triplet  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où  $O$  est un point, appelé origine du repère et  $(\vec{i}, \vec{j})$  un couple de deux vecteurs non colinéaires, appelé base du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$ .

L'intérêt de cette notion réside dans le résultat suivant et les propriétés qui suivent. Ces propriétés permettent de ramener des questions de géométrie à des calculs sur des couples de réels ou sur des nombres complexes (voir la section facultative 10.6).

**Proposition 10.1.8.** Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère cartésien du plan affine. Alors :

- (a) Pour tout point  $M \in \mathcal{P}$  il existe un unique couple de réels  $(x, y)$  tel que  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .
- (b) Pour tout vecteur  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$  il existe un unique couple de réels  $(x, y)$  tel que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

**Preuve :** soit  $M \in \mathcal{P}$ , il existe un unique couple de points  $(P, Q)$  avec  $P \in D(0, \vec{i})$  et  $Q \in D(0, \vec{j})$  tel que  $(O, P, M, Q)$  soit un parallélogramme. On a l'existence de réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{OP} = x\vec{i}$  et  $\vec{OQ} = y\vec{j}$  (cf. propositions 10.1.2 et 10.1.3) et, par définition de l'addition vectorielle :  $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Ceci établit l'existence pour (a) et donc aussi pour (b) en raison de la proposition 10.1.1.

Pour établir l'unicité, on suppose qu'il existe deux couples  $(x, y)$  et  $(x', y')$  pour un même point  $M$ . On en déduit  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  et donc, en appliquant les règles du calcul vectoriel  $(x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}$ . Si  $x \neq x'$ , on multiplie par  $\frac{1}{x - x'}$ , on obtient  $\vec{i} = \frac{y' - y}{x - x'}\vec{j}$ . Comme les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  ne sont pas colinéaires on a nécessairement aussi  $y = y'$ . La même preuve vaut pour (b). ■

**Définition 10.1.6.** Le couple  $(x, y)$  s'appelle les coordonnées du point  $M$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , ou les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  (selon le cas).

**Notations :** le repère étant choisi, on écrira  $M(x, y)$  pour exprimer que  $(x, y)$  est le couple de coordonnées de  $M$  dans ce repère. On écrira  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  pour exprimer que  $(x, y)$  est le couple de coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base correspondante.

On peut aussi noter  $\vec{u}(x, y)$  mais on préférera la notation en colonne pour rappeler les vecteurs colonnes du chapitre 9.

On rappelle le lien entre les opérations vectorielles précédemment définies et les coordonnées, de preuve immédiate.

**Proposition 10.1.9.** *Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  fixée, soient  $\vec{u}(x, y)$ ,  $\vec{v}(x', y')$  deux vecteurs du plan et  $\lambda$  un réel. On a alors  $(\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$  et  $(\lambda \vec{u}) \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$ .*

#### Remarque 10.1.1.

- Les coordonnées dépendent évidemment du repère. On n'abordera pas dans cette partie du cours les questions liées aux changements de repères.
- La bijection de  $\mathcal{P}$  (ou  $\overline{\mathcal{P}}$ ) qui à un point (ou un vecteur) associe le couple  $(x, y)$  de ses coordonnées, ainsi que la manière dont se correspondent les opérations d'addition et de produit par un réel (proposition précédente) permettent « d'identifier » cet ensemble à  $\mathbb{R}^2$ . Ceci sera précisé dans un cours d'algèbre ultérieur avec la notion d'isomorphisme d'espaces vectoriels.

#### 10.1.4 Quelques rappels sur les angles

Il faut distinguer angle géométrique (ou écart angulaire) et angle orienté.

**Angle géométrique :** étant donnés deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls, on leur associe les demi-droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  d'origine arbitraire 0 qu'ils dirigent. Ces demi-droites interceptent un arc  $\widehat{AA'}$  sur le cercle de centre 0 et de rayon 1 noté  $\mathcal{C}(O, 1)$  (cf. Figure 10.3).

**Définition 10.1.7.** La mesure de l'angle géométrique  $\widehat{AOA'}$ , ou écart angulaire des demi droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ , ou encore écart angulaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est la longueur de l'arc  $\widehat{AA'}$  correspondant au plus court chemin de  $A$  vers  $A'$  sur le cercle. C'est un réel de  $[0, \pi]$  noté  $(\vec{u}, \vec{v})$  ou  $(\Delta, \Delta')$ .

**Remarque 10.1.2.** Il s'agit de la longueur du plus court chemin de  $A$  vers  $A'$  sur le cercle  $\mathcal{C}(O, 1)$ . Cette mesure d'un angle par une longueur explique le caractère « naturel » du radian comme unité d'angle. Si l'unité choisie est le degré, on obtient des réels de l'intervalle  $[0, 180]$ . C'est la mesure d'angle que fournit le rapporteur.

**Angle orienté :** un angle orienté de vecteurs est défini par la donnée d'un couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  de vecteurs non nuls. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (ou les demi droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ ) définissent donc deux angles orientés correspondant aux couples  $(\vec{u}, \vec{v})$  et  $(\vec{v}, \vec{u})$ .

La mesure d'un angle orienté nécessite d'avoir défini (arbitrairement) une orientation du plan, ce que nous identifierons ici au choix d'un sens de parcours sur les cercles, dit *sens direct*. Il y a un choix usuel (voir la figure 10.3).

**Définition 10.1.8.** La mesure principale de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$  est le réel  $\alpha$  obtenu en affectant l'écart angulaire de ces vecteurs du signe + si le plus court chemin de  $A$  vers  $A'$  correspond au sens direct, du signe - sinon.

On appelle plus généralement mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$  tout réel de la forme  $\alpha + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . On écrit  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \alpha [2\pi]$  et on lit « l'angle  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}})$  a pour mesure  $\alpha$  modulo  $2\pi$  ».

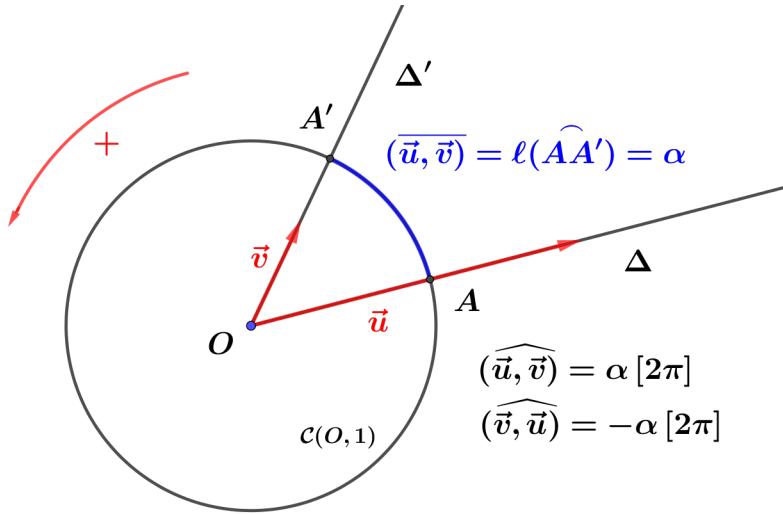


FIGURE 10.3 – Angles géométriques et angles orientés de vecteurs

**Remarque 10.1.3.**

- Deux mesures d'un même angle orienté de vecteurs diffèrent donc d'un réel de la forme  $2k\pi$  : le trajet de  $A$  vers  $A'$  sur le cercle  $C(A, 1)$  peut être effectué avec un nombre de tours supplémentaires et un sens arbitraires. Seuls comptent les points de départ et d'arrivée, dans cet ordre. Dans la notation, le  $[2\pi]$  est omis s'il n'y a pas d'ambiguité.
- Si un angle orienté de vecteurs a pour mesure  $\alpha [2\pi]$ , alors un changement d'orientation change cette mesure en  $-\alpha [2\pi]$ .
- Si  $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$  alors  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \alpha [2\pi]$  ou  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = -\alpha [2\pi]$  et dans les deux cas on a

$$\cos \alpha = \cos(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}), \quad \sin \alpha = |\sin(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}})|.$$

L'addition des angles orientés est définie de façon à satisfaire la relation de Chasles, on l'écrit ici avec les mesures. Pour trois vecteurs non nuls  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  du plan :

$$(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{w}}) + (\widehat{\vec{w}}, \widehat{\vec{v}}) [2\pi]$$

On retiendra également les propriétés suivantes, que nous énonçons sans démonstration :

**Proposition 10.1.10.**

$$(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{u}}) = 0 [2\pi], \quad (\widehat{\vec{u}}, -\widehat{\vec{u}}) = \pi [2\pi],$$

$$(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v}}, \widehat{\vec{u}}) [2\pi],$$

$$\forall \lambda > 0, \quad ((\widehat{\lambda \vec{u}}), \widehat{\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) [2\pi],$$

$$\forall \lambda < 0, \quad ((\widehat{\lambda \vec{u}}), \widehat{\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) + \pi [2\pi].$$

**Proposition 10.1.11** (Vecteurs orthogonaux, vecteurs colinéaires).

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan. Alors :

1.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$ .

(On exprime ainsi que les mesures de cet angle orienté sont de la forme  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ ).

2.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = 0 [\pi]$ .

(On exprime ainsi que les mesures de cet angle orienté sont de la forme  $k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Définition 10.1.9.** Une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  est **orthonormale** si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux et de même norme 1. Elle est orthonormale **directe** si de plus  $(\widehat{\vec{i}}, \widehat{\vec{j}}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

Un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan  $\mathcal{P}$  est orthonormal (resp. orthonormal direct) si la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est orthonormale (resp. orthonormale directe).

On déduit du théorème de Pythagore le calcul de la norme dans une base orthonormale :

**Proposition 10.1.12.** Dans une base orthonormale, soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , on a

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nous terminons cette section par quelques propriétés usuelles en lien avec les angles orientés et les coordonnées :

**Proposition 10.1.13.** Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base **directe** du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$ . Un vecteur  $\vec{u}$  non nul a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  données par :

$$x = \| \vec{u} \| \cos \alpha, \quad y = \| \vec{u} \| \sin \alpha \quad \text{avec } \alpha = (\widehat{\vec{i}}, \widehat{\vec{u}}) [2\pi].$$

**Preuve :** il suffit de remarquer que le point  $M$  du cercle  $C(0, 1)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{u}}{\| \vec{u} \|}$  a des coordonnées  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  par définition des fonctions cos et sin. ■

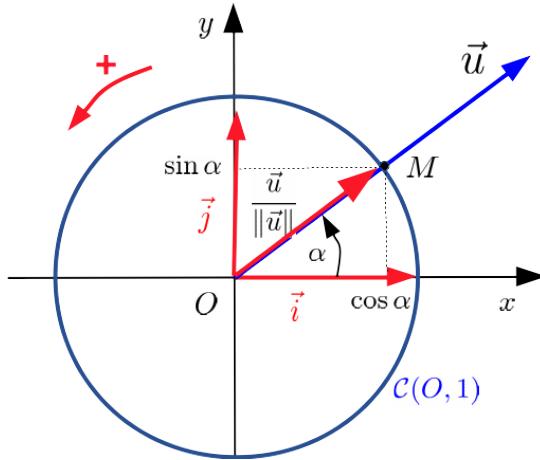


FIGURE 10.4 – Vecteurs définis par une norme et un angle orienté

**Proposition 10.1.14.** Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base directe du plan vectoriel  $\mathcal{P}$  et soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  un vecteur non nul. Il existe exactement deux vecteurs orthogonaux à  $\vec{u}$  et de même norme que  $\vec{u}$  :

1. le vecteur  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  qui est directement orthogonal à  $\vec{u}$ , i.e.  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{u}_1}) = +\frac{\pi}{2} [2\pi]$ ,
2. le vecteur  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$  tel que  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{u}_2}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

**Preuve :** les vecteurs cherchés sont les vecteurs  $\vec{v}$  qui sont tels que  $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$  et  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \pm\frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Posons  $\alpha = (\widehat{\vec{i}}, \widehat{\vec{u}}) [2\pi]$ , de sorte que  $a = \|\vec{u}\| \cos \alpha$  et  $b = \|\vec{u}\| \sin \alpha$  (proposition 10.1.13). Grâce à la relation de Chasles  $(\widehat{\vec{i}}, \widehat{\vec{v}}) = (\widehat{\vec{i}}, \widehat{\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}})$  on obtient donc les deux vecteurs  $\vec{v} = \vec{u}_1$  et  $\vec{v} = \vec{u}_2$  tels que :

$$\vec{u}_1 \left( \begin{array}{c} \|\vec{u}\| \cos(\alpha + \pi/2) = -b \\ \|\vec{u}\| \sin(\alpha + \pi/2) = a \end{array} \right) \text{ et } \vec{u}_2 \left( \begin{array}{c} \|\vec{u}\| \cos(\alpha - \pi/2) = b \\ \|\vec{u}\| \sin(\alpha - \pi/2) = -a \end{array} \right)$$

■

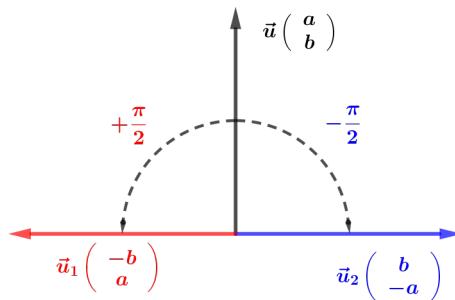


FIGURE 10.5 – Vecteurs orthogonaux à un vecteur donné et de même norme

## 10.2 Produit scalaire et déterminant

Ce sont des opérations qui associent à tout couple de vecteurs du plan un scalaire. Ce sont des outils essentiels en géométrie comme on le verra dans toute la suite du chapitre : parallélisme, orthogonalité, distances et aires ...

### 10.2.1 Définitions du produit scalaire et du déterminant

**Définition 10.2.1.** Le produit scalaire euclidien est une application  $\vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe à un couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  de vecteurs du plan un réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}, \\ \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a immédiatement :

**Proposition 10.2.1** (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}}, |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

et l'égalité a lieu si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**Définition 10.2.2.** Le déterminant dans le plan orienté est une application  $\vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe à un couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  de vecteurs du plan un réel noté  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  tel que :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}, \\ \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 10.2.1.**

- Ces définitions mettent à part les cas où l'un des vecteurs au moins est nul car alors l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  n'est pas défini.
- La définition du produit scalaire ne suppose pas d'orientation du plan car la fonction cosinus est paire. Par contre **un changement d'orientation change le signe du déterminant** car la fonction sinus est impaire (cf. la remarque 10.1.3).
- Le cas particulier  $\vec{u} = \vec{v}$  est intéressant car  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0 [2\pi]$  et ainsi :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \quad \text{et} \quad \det(\vec{u}, \vec{u}) = 0.}$$

Le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est aussi appelé carré scalaire de  $\vec{u}$  et noté  $\vec{u}^2$  :

$$\boxed{\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2}$$

- Comme  $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) [2\pi]$ , on a :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \text{et} \quad \det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v}).}$$

On parlera donc de produit scalaire de deux vecteurs (sans préciser l'ordre) mais toujours du déterminant **d'un couple** de vecteurs.

## 10.2.2 Premières applications en géométrie

Une conséquence simple des définitions :

**Proposition 10.2.2.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Alors :

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ,
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

*Preuve* : il suffit d'utiliser la proposition 10.1.11 et les lignes trigonométriques usuelles. ■

**Proposition 10.2.3.** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points du plan. L'aire du triangle  $ABC$  est donnée par :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$$

*Preuve* : si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires, c'est à dire si le triangle  $ABC$  est aplati, le résultat est immédiat car les deux membres sont nuls. Sinon, soient  $H$  le pied de la hauteur issue de  $C$  et  $\alpha$  la mesure de l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$  : on a  $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} AB \times CH$ , or  $CH = AC \sin \alpha$  et  $\sin \alpha = |\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})|$  (cf. la remarque 10.1.3) d'où le résultat. ■

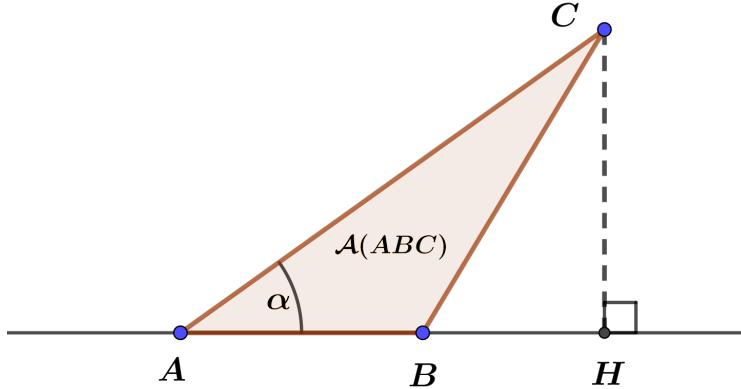


FIGURE 10.6 – Déterminant et aire d'un triangle

## 10.2.3 Expressions dans un repère orthonormal direct

Les bases orthonormales sont adaptées au calcul du produit scalaire, du déterminant et aux applications correspondantes en raison des deux propositions suivantes :

**Proposition 10.2.4.** Dans toute base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j})$  du plan vectoriel, le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  est donné par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

*Preuve* : posons  $(\widehat{\vec{i}}, \widehat{\vec{u}}) = \alpha [2\pi]$  et  $(\widehat{\vec{i}}, \widehat{\vec{v}}) = \beta [2\pi]$ . D'après la proposition 10.1.13 on a :

$$\begin{aligned} xx' + yy' &= (\|\vec{u}\| \cos \alpha)(\|\vec{v}\| \cos \beta) + (\|\vec{u}\| \sin \alpha)(\|\vec{v}\| \sin \beta) \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\beta - \alpha) \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}), \end{aligned}$$

en effet, d'après la relation de Chasles :  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = (\widehat{\vec{i}}, \widehat{\vec{v}}) - (\widehat{\vec{i}}, \widehat{\vec{u}}) [2\pi]$ .

Enfin on rappelle que  $\cos(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}})$  ne dépend pas de l'orientation car la fonction cosinus est paire. ■

**Remarque 10.2.2.** Si on pose  $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , on a également  $\vec{u} \cdot \vec{v} = {}^t A A' = (x \ y) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  et  $\|\vec{u}\|^2 = {}^t A A$ .

**Proposition 10.2.5.** Dans toute base orthonormale directe  $(\vec{i}, \vec{j})$  du plan vectoriel, le déterminant de deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  est donné par

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$$

*Preuve* : la méthode est la même. On obtient ici :

$$xy' - yx' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(b - a) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}})$$

et le signe du résultat dépend de l'orientation. ■

Les deux expressions ont une certaine similitude qui est précisée dans le résultat suivant, de preuve immédiate :

**Proposition 10.2.6.** Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  dans une base orthonormale directe du plan vectoriel et soit  $\vec{v}' \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$  le vecteur de même norme que  $\vec{v}$  tel que  $(\widehat{\vec{v}}, \widehat{\vec{v}'}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ , alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}'$$

On retiendra également les relations très simples qui permettent de trouver les coordonnées dans une base orthonormale à l'aide du produit scalaire :

**Proposition 10.2.7.** Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base orthonormale du plan vectoriel. Les coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  d'un vecteur  $\vec{u}$  sont données par :

$$x = \vec{u} \cdot \vec{i}, \quad y = \vec{u} \cdot \vec{j}$$

Les colonnes des coordonnées de deux vecteurs définissent une matrice de  $M_2(\mathbb{R})$ . On pose alors la définition suivante :

**Définition 10.2.3.** On appelle déterminant d'une matrice carrée  $M = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$  d'ordre deux le réel noté  $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$  ou  $\det(M)$ , donné par :  $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$ .

**Remarque 10.2.3.** La notion de déterminant n'est pas réservée aux base orthonormales directes. Si  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base quelconque de  $\vec{\mathcal{P}}$  et si dans cette base on considère  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  alors on définit le déterminant du couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  dans cette base par  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$ . Cette quantité dépend de la base (nous n'irons pas plus loin dans ce sens) par contre, on vient de le voir, elle est la même dans toute base orthonormale directe. On a tout de même le résultat suivant :

**Proposition 10.2.8.** Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  une base quelconque de  $\vec{\mathcal{P}}$ . Deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  (dans cette base) sont colinéaires si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .

**Preuve :** si les vecteurs sont colinéaires, on a par exemple  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$  pour un certain réel  $\lambda$  et donc  $x' = \lambda x$ ,  $y' = \lambda y$  d'où immédiatement la relation  $xy' - yx' = 0$ .

Réciproquement supposons que  $xy' - yx' = 0$ . Si  $\vec{u} = \vec{0}$  les vecteurs sont colinéaires, sinon on a par exemple  $x \neq 0$  : on pose alors  $\lambda = \frac{x'}{x}$  de sorte que  $x' = \lambda x$ . Mais alors  $xy' - yx' = 0 \implies y' = \frac{x'}{x} y = \lambda y$  d'où  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$  : les vecteurs sont colinéaires. ■

#### 10.2.4 Propriétés du produit scalaire et du déterminant

En utilisant les expressions du produit scalaire et du déterminant en base orthonormale on vérifie facilement les propriétés suivantes :

**Proposition 10.2.9.** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs du plan et  $(\alpha, \beta)$  des réels. Alors :

- symétrie du produit scalaire :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

- antisymétrie du déterminant :

$$\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$$

- propriétés de bilinéarité :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w},$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w},$$

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}),$$

$$\vec{u} \cdot (\beta \vec{v}) = \beta (\vec{u} \cdot \vec{v}),$$

**Remarque 10.2.4.** Les propriétés de bilinéarité sont aussi valable pour le déterminant :

$$\det(\vec{u}, (\vec{v} + \vec{w})) = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}, \vec{w}),$$

$$\det((\vec{u} + \vec{v}), \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{w}) + \det(\vec{v}, \vec{w}),$$

$$\det(\alpha \vec{u}, \vec{v}) = \alpha \det(\vec{u}, \vec{v}),$$

$$\det(\vec{u}, \beta \vec{v}) = \beta \det(\vec{u}, \vec{v}).$$

On déduit de la proposition précédente les identités remarquables à mémoriser :

**Proposition 10.2.10.**

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2, \quad (10.1)$$

(10.2)

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2, \quad (10.3)$$

(10.4)

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2. \quad (10.5)$$

**Une application géométrique :** l'identité du parallélogramme

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

*Preuve :* il suffit d'ajouter les égalités (10.3) et (10.5).

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

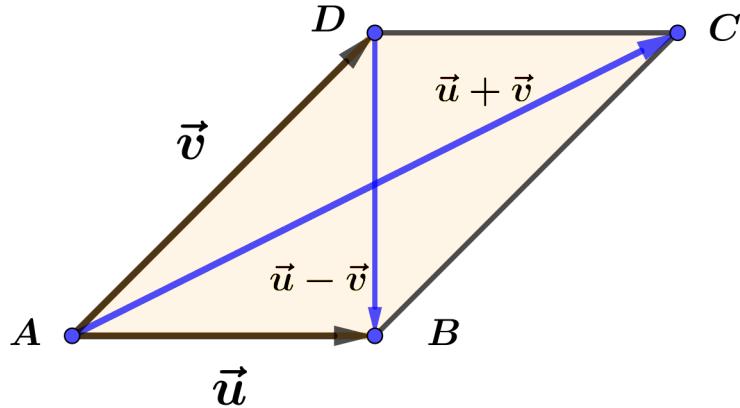


FIGURE 10.7 – Identité du parallélogramme

Le produit scalaire peut s'exprimer de deux façons en fonction de la norme seule :

**Proposition 10.2.11.**

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2),$
2.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$

*Preuve :* la première expression est une simple ré-écriture de l'égalité (10.3). La seconde s'obtient en soustrayant (10.3) et (10.5) membre à membre. ■

### 10.2.5 Projeté orthogonal d'un vecteur sur un axe

Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base orthonormale du plan vectoriel. D'après la proposition 10.2.7 on a , pour tout vecteur  $\vec{u} \in \mathcal{P}$  :

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{j}$$

Le vecteur  $p(\vec{u}) = x \vec{i} = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i}$  est le projeté orthogonal de  $\vec{u}$  sur la droite vectorielle  $\text{Vect}(\vec{i})$  engendrée par  $\vec{i}$ .  
Le vecteur  $q(\vec{u}) = y \vec{j} = (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{j}$  est le projeté orthogonal de  $\vec{u}$  sur la droite vectorielle  $\text{Vect}(\vec{j})$  engendrée par  $\vec{j}$ .

Considérons maintenant un vecteur non nul  $\vec{v}$ . Le vecteur  $\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  est unitaire et si on note  $\vec{v}_2$  l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à  $\vec{v}_1$  alors  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est une base orthonormale de  $\vec{P}$  et le vecteur  $p(\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_1$  est le projeté orthogonal de  $\vec{u}$  sur la droite vectorielle  $\text{Vect}(\vec{v}) = \text{Vect}(\vec{v}_1)$  engendrée par  $\vec{v}$ . En remplaçant  $\vec{v}_1$  par son expression on obtient donc :

**Proposition 10.2.12.** Soit  $\vec{v}$  un vecteur non nul du plan. Le projeté orthogonal d'un vecteur  $\vec{u} \in \vec{P}$  sur la droite vectorielle engendrée par  $\vec{v}$  est donné par :

$$p(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

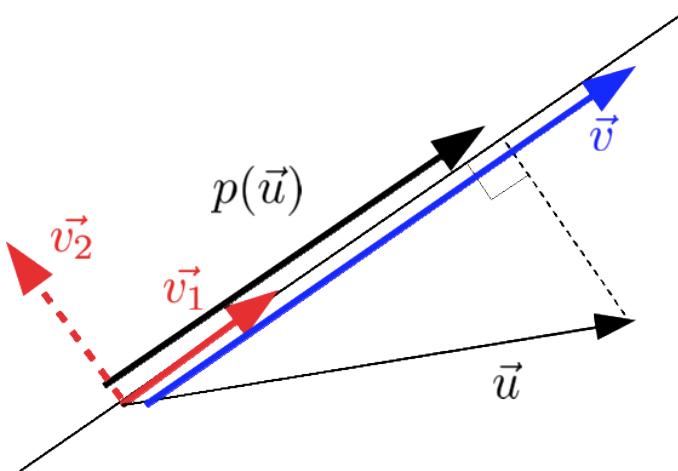


FIGURE 10.8 – Projection vectorielle orthogonale

On a la propriété suivante, très importante en pratique :

**Proposition 10.2.13.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan, avec  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Soit  $p(\vec{u})$  le projeté orthogonal de  $\vec{u}$  sur la droite vectorielle engendrée par  $\vec{v}$ , alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = p(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

On peut également projeter  $\vec{u}$  lorsqu'il est écrit sous la forme  $\vec{u} = \vec{AB}$  et obtenir le résultat sous forme d'un vecteur  $\vec{A'B'}$  sur une droite particulière  $d = D(O, \vec{v})$  : c'est ce qu'on fait obligatoirement à partir du moment où on représente cette projection sur une figure (on dessine des droites affines et non pas des droites vectorielles). Il faut alors projeter orthogonalement sur  $d$  les points  $A$  et  $B$  et on obtient (voir figure 10.9) :

$$p(\vec{u}) = \vec{A'B'} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

On dit que  $p(\vec{u}) = \overrightarrow{A'B'}$  est le projeté orthogonal de  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  sur l'axe  $d$ . On a en outre :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \vec{v}}$$

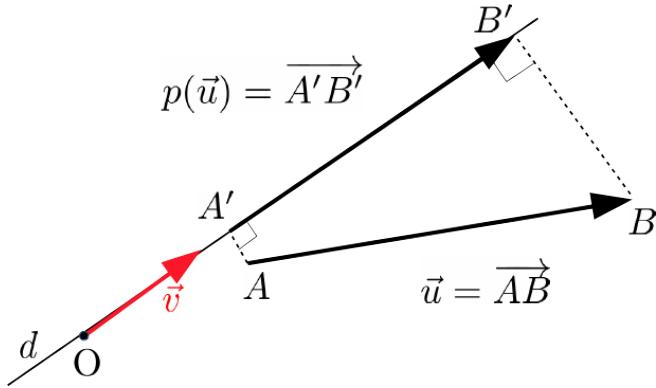


FIGURE 10.9 – Projété orthogonal sur un axe d'un vecteur défini par un bipoint

#### 10.2.6 Calcul d'une mesure de l'angle orienté de deux vecteurs

On suppose connues les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans un repère orthonormal. On calcule successivement les quatres quantités  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\det(\vec{u}, \vec{v})$ , et on applique la formule

$$\cos(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|},$$

la calculatrice (ou la connaissance des lignes trigonométriques usuelles) donne alors une valeur  $\alpha \in [0, \pi]$  telle que  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ . On sait qu'alors  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \alpha [2\pi]$  ou  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = -\alpha [2\pi]$ .

On conclut en utilisant le fait que le signe de  $\sin(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}})$  est celui de  $\det(\vec{u}, \vec{v})$ .

On peut aussi calculer l'unique réel  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  tel que

$$\sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

On sait qu'alors  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \alpha [2\pi]$  ou  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \pi - \alpha [2\pi]$ .

On conclut cette fois-ci en utilisant le fait que le signe de  $\cos(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}})$  est celui de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**Exemple :**  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ . On a  $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ ,  $\|\vec{v}\| = \sqrt{34}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 13$ ,  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -1$  et donc  $\cos(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \frac{13}{\sqrt{5}\sqrt{34}} \simeq 0.997$ . La calculette donne un angle  $\alpha$  de 0,077 radians ou 4,4 degrés. Comme  $\det(\vec{u}, \vec{v}) < 0$ , on sait que le sinus de l'angle cherché est négatif, la valeur de  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}})$  est donc de  $-0,077$  radians à  $10^{-3}$  près (ou  $-4,4$  degrés).

## 10.3 Droites

On étudie ici les droites du plan à l'aide de représentations utilisant les coordonnées dans un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  qu'on supposera implicitement orthonormal ou orthonormal direct chaque fois que nécessaire.

### 10.3.1 Représentations paramétriques et équations cartésiennes d'une droite

La droite  $D(A, \vec{u})$  passant par un point  $A$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  est par définition l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{AM} // \vec{u}$  :

$$D(A, \vec{u}) = \{M \in P ; \exists \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}\}.$$

Si on se donne  $A(x_A, y_A)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ , on a donc

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = \alpha x_u + x_A \\ y = \alpha y_u + y_A \end{cases}$$

**Définition 10.3.1.**

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha x_u \\ y = y_A + \alpha y_u \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

s'appelle **une représentation paramétrique** de la droite  $D(A, \vec{u})$ .  $\alpha$  s'appelle le paramètre.

**Attention :** il est indispensable de préciser dans quel ensemble varie le paramètre.

Si on omet «  $\alpha \in \mathbb{R}$  », la représentation est incomplète.

Si on remplace «  $\alpha \in \mathbb{R}$  » par «  $\alpha \in [a, b]$  », par exemple, on obtient un segment etc...

**Exemple :** soit  $D$  la droite passant par le point  $A(1, 2)$  de vecteur directeur  $\vec{u} = (1, -1)$ . On obtient

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Une autre façon d'écrire que  $\overrightarrow{AM} // \vec{u}$  est d'utiliser le déterminant :

$$M \in D \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_u \\ y - y_A & y_u \end{vmatrix} = 0$$

On trouve

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow y_u(x - x_A) - x_u(y - y_A) = 0.$$

Cette dernière expression s'appelle **une équation cartésienne** de la droite  $D$ . Après développement, elle est de la forme  $ax + by + c = 0$ .

**Exemple 1 :** une équation cartésienne de la  $D$  droite passant par le point  $A(1, 2)$  de vecteur directeur  $\vec{u} = (1, -1)$  s'obtient en écrivant :  $\begin{vmatrix} x - 1 & 1 \\ y - 2 & -1 \end{vmatrix} = -(x - 1) - (y - 2) = 0$ . Elle est donc après simplification

$$x + y - 3 = 0.$$

**Proposition 10.3.1.** Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et soit  $E = \{M(x, y) \in \mathcal{P} ; ax + by + c = 0\}$ . Alors :

- si  $a = b = c = 0$ , on a  $E = \mathcal{P}$ ,
- si  $a = b = 0$  et  $c \neq 0$ , on a  $E = \emptyset$ ,
- si  $(a, b) \neq (0, 0)$  alors  $E$  est une droite de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

**Preuve :** les deux premiers cas sont immédiats. Supposons donc  $(a, b) \neq (0, 0)$  : on a par exemple  $a \neq 0$  (l'autre cas se traite de manière identique). On trouve alors facilement un élément de  $E$ , à savoir par exemple  $A(x_A = -c/a, y_A = 0)$ . Comme  $ax_A + by_A + c = 0$  on a :

$$M(x, y) \in E \iff ax + by + c = ax_A + by_A + c \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0$$

En introduisant le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  on a donc :  $M(x, y) \in E \iff \overrightarrow{AM} // \vec{u}$ , d'où le résultat. ■

**Remarque 10.3.1.**  $x - x_A$  et  $y - y_A$  sont les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AM}$ , or ce vecteur parcourt  $\text{Vect} \vec{u}$  quand  $M$  parcourt  $E$ . On en déduit que la droite vectorielle engendrée par  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  a pour équation  $ax + by = 0$ .

**Définition 10.3.2.** On appelle vecteur *normal* à une droite tout vecteur orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

**Attention :** il ne s'agit pas nécessairement d'un vecteur unitaire (ou vecteur normé). Prendre garde à la confusion.

Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  vérifie  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ , on a donc :

**Corollaire 10.3.1.** Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

La droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  en repère orthonormal a pour vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

On a vu que l'équation  $ax + by + c = 0$  d'une droite peut s'écrire  $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$  où  $A$  est un point fixé de la droite. Ceci s'écrit aussi  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ . Inversement, cette relation permet d'obtenir une équation cartésienne de la droite passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

**Exemple 2 :** quel est l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que  $-2y = 1 + 3x$  ?

**Réponse :** l'équation  $-2y = 1 + 3x$  s'écrit  $3x + 2y + 1 = 0$  avec  $a = 3, b = 2, c = 1$ . Il s'agit donc d'une droite dont un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Un vecteur normal est  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et elle passe par le point  $A(0, -1/2)$ .

**Exemple 3 :** Donner l'équation cartésienne de la droite passant par  $A(1, 3)$  et de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Réponse :** on écrit  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ , soit  $-(x - 1) + 2(y - 3) = 0$ , on trouve  $-x + 2y - 7 = 0$ .

Autre méthode : la droite admet une équation cartésienne de la forme  $-x + 2y + c = 0$ . Elle passe par  $A$ , donc  $-1 + 2.3 + c = 0$  ce qui donne  $c = -7$ , l'équation cherchée est  $-x + 2y - 7 = 0$ .

L'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique : il est immédiat, par exemple, que  $x + y + 1 = 0$  et  $2x + 2y + 2 = 0$  sont les équations d'une même droite. Précisons ce point :

**Proposition 10.3.2.** Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ , avec  $(a, b) \neq (0, 0)$  et  $(a', b') \neq (0, 0)$ . Les équations cartésiennes  $ax + by + c = 0$  et  $a'x + b'y + c' = 0$  sont les équations d'une même droite si et seulement si  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  sont proportionnels.

**Preuve :** il est clair que si les coefficients sont proportionnels, les équations sont équivalentes, il s'agit donc de la même droite. Réciproquement, si les deux équations décrivent la même droite  $D$  les vecteurs  $\vec{u}(-b, a)$  et  $\vec{u}'(-b', a')$  sont tous deux directeurs de  $D$ , ils sont donc colinéaires et il existe  $\lambda \neq 0$  tel que  $\vec{u} = \lambda \vec{u}'$  on en déduit  $a = \lambda a'$ ,  $b = \lambda b'$ . Soit  $M(x, y)$  un point quelconque de  $D$ , il vérifie les deux équations, on a donc  $c = -(ax + by)$  et  $c' = -(a'x + b'y)$ , on obtient  $c = \lambda c'$ .

### 10.3.2 Intersection de droites

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites du plan, on sait qu'en général  $D_1 \cap D_2$  est un ensemble réduit à un point mais qu'il est possible que  $D_1 \cap D_2$  soit vide, c'est la définition de droites strictement parallèles (au moins dans le plan), ou que  $D_1 \cap D_2 = D_1 = D_2$ , les droites sont alors confondues. Vérifions tout cela par le calcul. On suppose donné un repère et on introduit les équations cartésiennes :

$$D_1 = \{M(x, y) \in P ; ax + by + e = 0\},$$

$$D_2 = \{M(x, y) \in P ; cx + dy + f = 0\},$$

On a alors

$$D_1 \cap D_2 = \{M(x, y) \in P ; ax + by + e = 0 \text{ et } cx + dy + f = 0\},$$

C'est donc l'ensemble des points dont les coordonnées  $(x, y)$  sont solution du système :

$$(S) \begin{cases} ax + by = -e \\ cx + dy = -f \end{cases}$$

Si la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de ce système est inversible, c'est à dire si  $\det A \neq 0$ , il y a unicité de la solution, sinon soit il n'y a pas de solution, soit il y a une infinité de solutions (cf chapitre 9). Plus précisément :

- Si  $\det A = 0$  : ou bien  $(a, b, e)$  et  $(b, d, f)$  sont proportionnels et les droites sont confondues, ou bien ils ne le sont pas et l'intersection est vide (les droites sont strictement parallèles).

Observons d'ailleurs que  $\det A = \begin{vmatrix} -b & -d \\ a & c \end{vmatrix}$  est le déterminant des vecteurs directeurs de  $D_1$  et  $D_2$ . L'égalité  $\det A = 0$  signifie donc que les vecteurs directeurs sont colinéaires.

- Si  $\det A \neq 0$ , la solution est unique et donnée par les formules de Cramer (9.1) :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -e & b \\ -f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & -e \\ c & -f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

**Exemple :** trouver l'intersection des droites d'équations  $2x + y + 3 = 0$  et  $3x - y + 1 = 0$ .

**Réponse :** le déterminant  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$  est non nul, il existe donc un unique point d'intersection dont les coordonnées sont

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{4}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}$$

**Exercice type :** on donne trois points du plan par leurs coordonnées. Vous devez savoir répondre aux questions suivantes : sont-ils alignés ? Déterminent-ils un triangle rectangle ? Quelle est l'aire du triangle qu'ils constituent ? Quelles sont les équations cartésiennes des droites passant par ces points ? Quelles sont les équations cartésiennes des hauteurs du triangle qu'ils constituent ? Et, avec éventuellement l'aide d'une calculette, quelles sont les mesures des angles de ce triangle ?

### 10.3.3 Angles de droites

Une idée naturelle pour définir l'angle orienté d'un couple  $(D, D')$  de droites est d'utiliser un vecteur directeur de chacune d'elles,  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$  pour  $D$ ,  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$  pour  $D'$  et de considérer l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ .

La difficulté est que cet angle ne devrait pas dépendre du choix de ces vecteurs directeurs. Or, à une modification des normes près, on a quatre choix possibles :  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ,  $(-\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ,  $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}})$  et  $(-\widehat{\vec{u}, -\vec{v}})$ . La relation de Chasles implique par exemple

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}) + (\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = \pi + (\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}),$$

et on vérifierait ainsi que les mesures de ces quatre angles diffèrent de  $k\pi$ , avec  $k$  entier. Ceci amène aux définitions suivantes :

**Définition 10.3.3.** Soient  $\vec{D}$  et  $\vec{D}'$  deux droites vectorielles engendrées respectivement par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Une mesure de l'angle orienté  $(\widehat{\vec{D}, \vec{D}'})$  est donnée par  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})[\pi]$  et ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs.

Soient  $D$  et  $D'$  deux droites affines dirigées respectivement par  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ . Une mesure de l'angle orienté  $(\widehat{D, D'})$  est donnée par  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})[\pi]$ .

Il existe un unique réel  $\alpha \in [0, \pi]$  tel que  $(\widehat{D, D'}) = \alpha [\pi]$  : on l'appelle la mesure principale de l'angle du couple de droites (vectorielles ou affines).

On a alors immédiatement :

**Proposition 10.3.3.** Soient  $D$  et  $D'$  deux droites du plan, alors :

$$D//D' \iff (\widehat{D, D'}) = 0 [\pi] \quad \text{et} \quad D \perp D' \iff (\widehat{D, D'}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

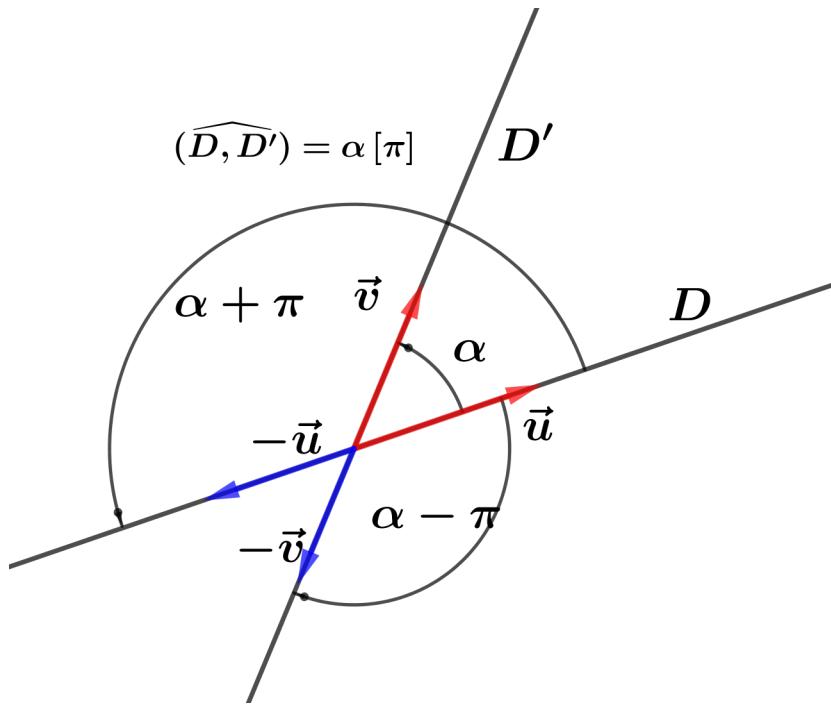


FIGURE 10.10 – Angle orienté d'un couple de droites

En appliquant les résultat du chapitre 4 sur les angles (proposition 4.3.4) on obtient :

**Proposition 10.3.4.** Soient quatre points  $A(z_A)$ ,  $B(z_B)$ ,  $C(z_C)$ ,  $D(z_D)$  deux à deux distincts et les droites  $D = (AB)$ ,  $D' = (CD)$ . Alors :

$$\widehat{(D, D')} = \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} [\pi]$$

#### 10.3.4 Distance d'un point à une droite

La distance d'un point  $A$  à une droite  $D$ , notée  $d(A, D)$ , est définie comme la plus courte distance entre  $A$  et un point  $M$  de  $D$ . Le théorème de Pythagore établit qu'on l'obtient de façon unique en prenant  $M = H$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $D$ .

On distinguera les cas où la droite est donnée par une équation cartésienne et celui où elle est définie par un point et un vecteur directeur.

**Proposition 10.3.5.** Soit  $D$  une droite du plan et  $A(x_A, y_A)$  un point.

- si la droite est définie par une équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ , alors la distance de  $A$  à la droite  $D$  vérifie :

$$d(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- si la droite est définie par un point  $B$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$ , alors la distance de  $A$  à la droite  $D$  vérifie :

$$d(A, D) = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|}$$

**Preuve :** on doit donc calculer  $\|\vec{AH}\|$  où  $H$  est le point tel que  $H \in D$  et  $\vec{AH} \perp D$ . Si une équation cartésienne de  $D$  est  $ax + by = c$ , on a vu qu'un vecteur orthogonal à  $D$  est  $\vec{n}(a, b)$ , on a donc  $\vec{AH} // \vec{n}$  et :

$$|\vec{AH} \cdot \vec{n}| = \|\vec{AH}\| \|\vec{n}\| = d(A, D) \sqrt{a^2 + b^2}$$

donc :

$$d(A, D) = \frac{|\vec{AH} \cdot \vec{n}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

D'autre part, si  $B(x_B, y_B)$  est un point quelconque de  $D$ , le projeté orthogonal de  $\vec{AB}$  sur la droite  $(AH)$ , qui est dirigée par  $\vec{n}$ , est  $\vec{AH}$ , donc :

$$\vec{AH} \cdot \vec{n} = \vec{AB} \cdot \vec{n} = a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = -ax_A - by_A - c,$$

en effet  $B \in D \implies ax_B + by_B = -c$ . On a donc finalement  $d(A, D) = \|\vec{AH}\| = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Si la droite est définie par un point  $B$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$ , on considère le vecteur  $\vec{n}$  de même norme que  $\vec{u}$  et tel que  $(\vec{u}, \vec{n}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ . C'est un vecteur normal à  $D$  et on a  $\vec{AB} \cdot \vec{n} = \det(\vec{AB}, \vec{u})$  (cf. proposition 10.2.6), ce qui donne la seconde formule. ■

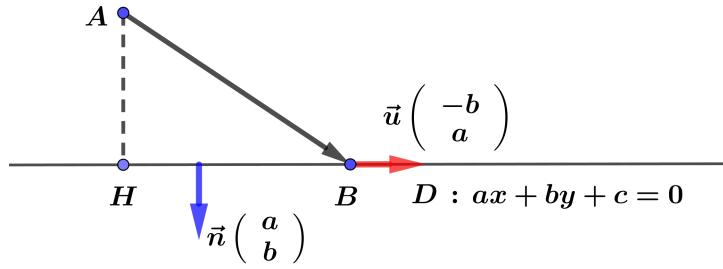


FIGURE 10.11 – Distance d'un point à une droite

**Exemple :** soit  $D$  la droite d'équation  $3x - 4y - 7 = 0$  et  $A(-2, -1)$ , on a

$$d(A, D) = \frac{|-2.3 + 4 - 7|}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}.$$

En prenant le point  $B(1, -1)$ , qui est sur  $D$ , et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ , qui dirige  $D$ , on vérifiera en exercice que l'on a bien aussi  $d(A, D) = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|}$ .

## 10.4 Cercles

Par définition, le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A$  et de rayon  $R$  est

$$\mathcal{C} = \{M \in P ; AM = r\}.$$

Une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$  dans un repère orthonormal est donc, si  $A(x_A, y_A)$  et  $M(x, y)$ ,

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2,$$

ce qui équivaut à  $AM^2 = R^2$ , soit, en développant :

$$x^2 + y^2 - 2x_A x - 2y_A y + x_A^2 + y_A^2 - R^2 = 0$$

qui est une expression de la forme  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ .

Il faut savoir établir l'équation d'un cercle et, sur des exemples, reconnaître à partir d'une expression de la forme précédente s'il s'agit de l'équation d'un cercle et trouver, le cas échéant, ses éléments caractéristiques (centre, rayon).

**Exemple 10.4.1.**

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0.$$

On écrit  $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$  et  $y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$ . L'équation devient alors :

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

c'est à dire  $AM^2 = 16$ , avec  $A(3, -1)$  et  $M(x, y)$ . Il s'agit donc de l'équation du cercle  $\mathcal{C}(A, 4)$ .

**Exemple 10.4.2.**

$$x^2 + y^2 - 2x + 4 = 0.$$

On écrit  $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ . L'équation devient alors :

$$(x - 1)^2 + y^2 = -3.$$

L'ensemble des points  $M(x, y)$  satisfaisant l'équation est donc vide.

## 10.5 Translations, Homothéties, Rotations, Projections, Symétries

### 10.5.1 Introduction

On va présenter quelques exemples importants d'applications du plan affine dans lui même qui possèdent des propriétés remarquables, par exemple :

- la conservation de l'alignement : des points alignés sont transformés en points alignés,
- la conservation du milieu : le milieu  $I$  d'un bipoint  $(A, B)$  a pour image le milieu du bipoint image,
- un parallélogramme est transformé en un autre parallélogramme, ce qui équivaut à la conservation du milieu,
- et plus généralement la conservation des barycentres (pour ceux qui connaissent ...)

De telles applications sont dites affines.

Il existe une caractérisation des applications affines que nous allons utiliser, basée sur la notion d'application linéaire déjà évoquée en introduction du chapitre 9 dans un cadre différent. Aucune théorie générale ne sera faite ici.

**Définition 10.5.1** (Applications linéaires du plan vectoriel dans lui-même).

Une application  $\varphi : \overrightarrow{\mathcal{P}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}$  est dite linéaire si elle vérifie :

- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}}, \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}),$
- $\forall \vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda \vec{u}) = \lambda \varphi(\vec{u}).$

Une application linéaire se reconnaît immédiatement sur les coordonnées grâce au résultat suivant :

**Proposition 10.5.1.** Le plan vectoriel  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$  étant muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  (pas nécessairement orthonormale), une application  $\varphi : \begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{P}} & \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{cases}$  est linéaire si et seulement si il existe une matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . La matrice  $M$  s'appelle la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

**Preuve :** supposons que  $\varphi$  soit linéaire et soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère cartésien. On pose  $\varphi(\vec{i}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $\varphi(\vec{j}) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ . Si  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  alors, par linéarité :

$$\vec{u}' = \varphi(x \vec{i} + y \vec{j}) = x \varphi(\vec{i}) + y \varphi(\vec{j}) \begin{pmatrix} xa + yc \\ xb + yd \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit aussi :  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

La réciproque est une simple vérification sur les coordonnées. ■

On donne trois exemples d'applications linéaires de  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$  dans  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$  :

**Exemples :**

- L'application identique de  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ , c'est à dire l'application  $Id_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} : \begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{P}} & \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ \vec{u} & \mapsto \vec{u} \end{cases}$ .

La justification est triviale.

La matrice, dans n'importe quelle base, est la matrice identité  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- L'homothétie vectorielle de rapport  $k$ , définie par  $h_k : \begin{cases} \vec{P} & \mapsto \vec{P} \\ \vec{u} & \mapsto k \vec{u} \end{cases}$ , où  $k$  est un réel non nul. Là encore, la justification est triviale.

La matrice, dans n'importe quelle base, est la matrice  $k I_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ .

- La projection vectorielle orthogonale sur la droite vectorielle  $\text{Vect}(\vec{v})$ , qu'on notera ici  $\pi$  pour éviter la confusion avec la projection étudiée plus bas.

C'est l'application  $\pi : \vec{P} \rightarrow \vec{P}$  telle que  $\pi(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$ . Vérifions la linéarité :

- $\pi(\vec{u} + \vec{u}') = \frac{(\vec{u} + \vec{u}') \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} + \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \pi(\vec{u}) + \pi(\vec{u}')$ .
- $\pi(\lambda \vec{u}) = \frac{\lambda \vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \lambda \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \lambda \pi(\vec{u})$ .

La matrice n'est pas simple en général, sauf dans une base adaptée. Ainsi on vérifiera en exercice que dans la base  $(\vec{v}, \vec{v}')$ , où  $\vec{v}'$  est un vecteur non nul et orthogonal à  $\vec{v}$ , la matrice de  $\pi$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

#### Définition 10.5.2 (Applications affines du plan dans lui-même).

Une application  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  est dite affine s'il existe une application linéaire  $\varphi : \vec{P} \rightarrow \vec{P}$  telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB}).$$

#### Définition 10.5.3 (Transformations affines du plan).

Une application affine bijective du plan dans lui-même s'appelle une *transformation affine* du plan.

On admettra ici que  $\varphi$  est unique : on dit que c'est l'application linéaire associée à  $f$  et on la note couramment  $\vec{f}$ .

On retiendra bien que  $f$  **agit sur les points et  $\vec{f}$  sur les vecteurs** : voir les exemples qui suivent.

Lorsqu'un point est sa propre image, on dit qu'il est invariant et l'ensemble de ces points joue toujours un rôle essentiel dans la description et les propriétés d'une application affine.

**Définition 10.5.4.** Soit  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ . On dit qu'un point  $M$  est invariant par  $f$  si  $f(M) = M$ .

### 10.5.2 Les translations

**Définition 10.5.5.** Soit  $\vec{u} \in \vec{P}$ . On appelle translation de vecteur  $\vec{u}$  l'application  $t_{\vec{u}}$  de  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

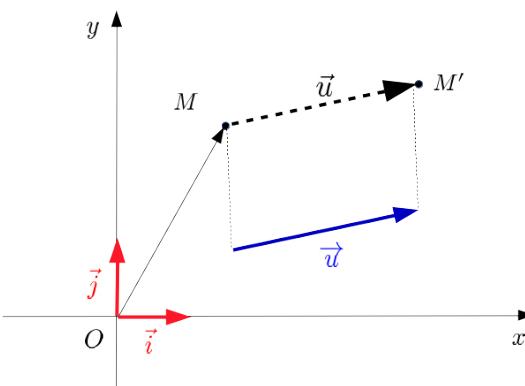


FIGURE 10.12 – *Translations*

**Proposition 10.5.2.** Une translation est une transformation affine du plan. L'application linéaire associée est l'application identique du plan vectoriel  $Id_{\vec{P}} : \vec{v} \mapsto \vec{v}$ .

**Preuve :** soient  $A, B$  deux points,  $A' = t_{\vec{u}}(A)$  et  $B' = t_{\vec{u}}(B)$  leurs images. On a

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \overrightarrow{AB} + \vec{a} = \overrightarrow{AB} = Id_{\vec{P}}(\overrightarrow{AB})$$

ce qui prouve que  $t_{\vec{u}}$  est affine, avec  $\vec{t}_{\vec{u}} = Id_{\vec{P}}$ .

L'application vectorielle associée est l'identité. Enfin une translation est une bijection, de bijection réciproque  $t_{-\vec{u}}$  (vérification immédiate). ■

**Proposition 10.5.3** (Expression analytique).

Si  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$  et  $M$  pour coordonnées  $(x, y)$  dans un repère cartésien, alors les coordonnées de  $M'$  sont données par

$$\begin{cases} x' &= x + x_u \\ y' &= y + y_u \end{cases}$$

**Preuve :** c'est juste la traduction de  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$  en termes de coordonnées. ■

**Propriétés des translations (exercice) :**

1. Une translation de vecteur non nul n'a pas de point invariant. La translation de vecteur nul est l'identité. Tout les points du plan sont alors invariants.
2. Une translation conserve la distance entre deux points, les angles entre les vecteurs, l'alignement de points.
3. L'image d'une droite par une translation est la droite elle-même si son vecteur directeur est colinéaire au vecteur de la translation.
4. L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle si son vecteur directeur n'est pas colinéaire au vecteur de la translation.
5. L'image d'un cercle par une translation est le cercle de même rayon et dont le centre est le translaté du centre initial :  $t_{\vec{u}}(\mathcal{C}(A, R)) = \mathcal{C}(A', R)$  avec  $A' = t_{\vec{u}}(A)$ .

### 10.5.3 Les homothéties

**Définition 10.5.6.** Soit  $\Omega$  un point du plan et  $k$  un réel non nul. On appelle homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$  l'application  $h(\Omega, k)$  de  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ .

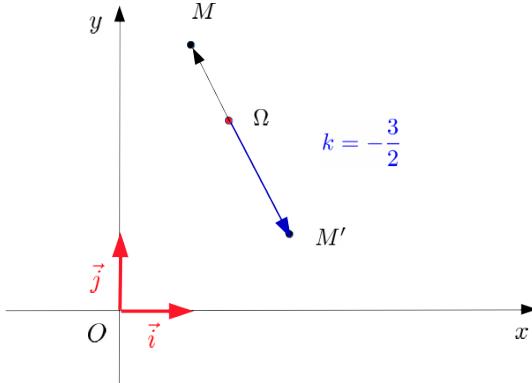


FIGURE 10.13 – Homothéties

**Proposition 10.5.4.** Une homothétie  $h(\Omega, k)$  est une transformation affine du plan. L'application linéaire associée est l'homothétie vectorielle  $h_k : \vec{u} \rightarrow k \vec{u}$ .

*Preuve :* soient  $A, B$  deux points,  $A' = h(\Omega, k)(A)$  et  $B' = h(\Omega, k)(B)$ . On a

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'\Omega} + \overrightarrow{\Omega B'} = -\overrightarrow{\Omega A'} + \overrightarrow{\Omega B'} = -k\overrightarrow{\Omega A} + k\overrightarrow{\Omega B} = k\overrightarrow{AB} = h_k(\overrightarrow{AB})$$

ce qui prouve le caractère affine de  $h(\Omega, k)$  et donne l'application linéaire associée. Enfin,  $h(\Omega, k)$  est bijective, de bijection réciproque  $h(\Omega, \frac{1}{k})$  (exercice). ■

**Proposition 10.5.5** (Expression analytique).

Si  $\Omega$  a pour coordonnées  $(x_\omega, y_\omega)$  et  $M$  a pour coordonnées  $(x, y)$ , alors les coordonnées  $(x', y')$  de  $M'$  vérifient :

$$\begin{cases} x' &= x_\omega + k(x - x_\omega) \\ y' &= y_\omega + k(y - y_\omega) \end{cases}$$

*Preuve :* c'est juste la traduction de  $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$  en termes de coordonnées. ■

**Propriétés des homothéties (exercice) :**

1. Si  $k \neq 1$ , le seul point invariant est le centre de l'homothétie  $\Omega$ .
2. Si  $k = 1$  on a de nouveau affaire à l'identité.
3. Une homothétie multiplie par  $|k|$  la distance entre deux points. Elle conserve les angles orientés et l'alignement.
4. L'image d'une droite passant par le centre de l'homothétie est la droite elle-même.
5. L'image d'une droite ne passant pas par le centre de l'homothétie est une droite parallèle.
6. L'image d'un cercle de centre  $A$  et de rayon  $R$  par l'homothétie est le cercle de centre  $A' = h(\Omega, k)(A)$  et de rayon  $|k|R$ .

#### 10.5.4 Les rotations

**Définition 10.5.7.** Soient  $\Omega$  un point du plan et  $\theta$  un réel. On appelle **rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$**  l'application  $r(\Omega, \theta)$  de  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que :

- si  $M = \Omega$  alors  $M' = \Omega$
- si  $M \neq \Omega$  alors  $\Omega M' = \Omega M$  et  $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}}, \widehat{\overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta [2\pi]$ .

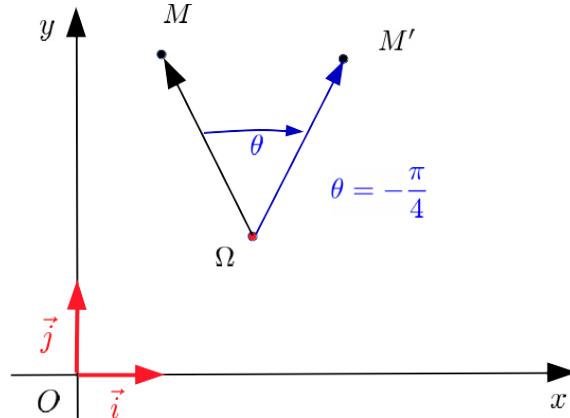


FIGURE 10.14 – Rotations planes

**Proposition 10.5.6.** Une rotation  $r(\Omega, \theta)$  est une transformation affine du plan. L'application linéaire associée est la rotation vectorielle d'angle  $\theta$  qui est l'application linéaire  $r_\theta : \overrightarrow{\mathcal{P}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}$  définie dans toute base orthonormale directe par sa matrice  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

**Preuve :** soit  $M$  un point, d'image  $M'$ . On pose  $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega M}$ ,  $\vec{u}' = \overrightarrow{\Omega M'}$ , on a donc  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{u}'}) = \theta [2\pi]$  et  $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\|$ . On en déduit

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = \|\vec{u}\|^2 \cos(\theta), \quad \det(\vec{u}, \vec{u}') = \|\vec{u}\|^2 \sin(\theta).$$

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$  dans un repère orthonormal direct, on en déduit

$$\begin{aligned} XX' + YY' &= \|\vec{u}\|^2 \cos(\theta), \\ XY' - X'Y &= \|\vec{u}\|^2 \sin(\theta). \end{aligned}$$

On cherche à exprimer  $(X', Y')$  en fonction de  $(X, Y)$  et  $\theta$ , on écrit donc le système d'équations

$$\begin{cases} XX' + YY' = (X^2 + Y^2) \cos(\theta), \\ -XY' + X'Y = (X^2 + Y^2) \sin(\theta). \end{cases}$$

On résout ce système d'inconnue  $(X', Y')$  à l'aide des formules 9.1, par exemple, et on trouve

$$\begin{cases} X' = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ Y' = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases} \tag{10.6}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Soit alors  $r_\theta$  l'application linéaire de  $\vec{\mathcal{P}}$  dans lui-même définie par la matrice  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  : on a  $\vec{u}' = r_\theta(\vec{u})$ . Si  $A$  et  $B$  sont deux points d'images  $A'$  et  $B'$  on a donc :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{\Omega B'} - \overrightarrow{\Omega A'} = r_\theta(\overrightarrow{\Omega B}) - r_\theta(\overrightarrow{\Omega A}) = r_\theta(\overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega A}) = r_\theta(\overrightarrow{AB})$$

ce qui prouve le caractère affine de  $r(\Omega, \theta)$  et donne son application linéaire associée  $r_\theta$ . Enfin on vérifie facilement que  $r(\Omega, \theta)$  est bijective, avec  $r(\Omega, \theta)^{-1} = r(\Omega, -\theta)$  (« pour revenir au point de départ, on tourne de l'angle opposé autour du même centre »). ■

**Proposition 10.5.7** (Expression analytique dans un repère orthonormal direct).

*Si  $\Omega$  a pour coordonnées  $(x_\omega, y_\omega)$  et si  $M$  a pour coordonnées  $(x, y)$  alors les coordonnées  $(x', y')$  de  $M'$  sont données par :*

$$\begin{cases} x' &= x_\omega + (x - x_\omega) \cos \theta - (y - y_\omega) \sin \theta \\ y' &= y_\omega + (x - x_\omega) \sin \theta + (y - y_\omega) \cos \theta \end{cases}$$

*Preuve* : c'est la conséquence immédiate de la formule (10.6). ■

**Propriétés des rotations :**

1. Si  $\theta \neq 0 [2\pi]$ , le seul point invariant est le centre de la rotation  $\Omega$ .
2. Si  $\theta = 0 [2\pi]$ ,  $f$  est égal à l'identité.
3. Une rotation conserve la distance entre deux points, les angles orientés de vecteurs, l'alignement de points.
4. L'image d'une droite par une rotation est une droite.
5. L'image d'un cercle par une rotation est un cercle de même rayon.
6. Une rotation d'angle  $\pi$  est une symétrie par rapport à  $\Omega$ .

### 10.5.5 Les projections et symétries axiales

Soient une droite  $D(A, \vec{u})$  et  $D'$  une droite  $\vec{v}$  non colinéaire à  $\vec{u}$ .

**Définition 10.5.8.** On appelle **projection sur  $D$  parallèlement à  $D'$**  l'application  $p$  du plan dans lui-même qui associe à tout point  $M$  le point  $p(M) = M'$  tel que

- $M' \in D$ ,
- $\overrightarrow{MM'} \in \vec{D}'$  (i. e.  $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{v}$ ).

**Définition 10.5.9.** On appelle **symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $D'$**  l'application  $s$  du plan dans lui-même qui associe à tout point  $M$  le point  $s(M) = M'$  tel que

- le milieu du bipoint  $(M, M')$  appartient à  $D$ ,
- $\overrightarrow{MM'} \in \vec{D}'$ .

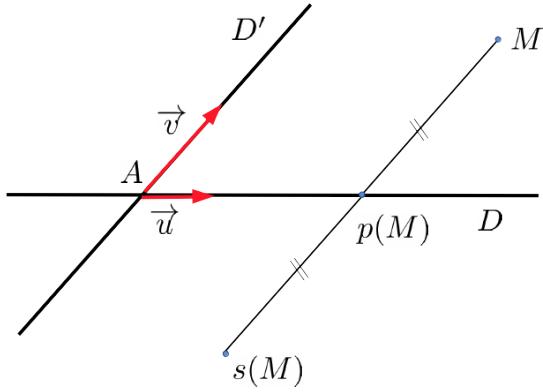


FIGURE 10.15 – Projections et symétries

Le point essentiel est que  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère du plan. Avant de poursuivre, précisons les notions de projection et symétrie vectorielles.

**Définition 10.5.10.** Soit  $(\vec{u}, \vec{v})$  une base de  $\vec{\mathcal{P}}$ . On appelle projection vectorielle sur  $\vec{D} = \text{Vect}(\vec{u})$  parallèlement à  $\vec{D}' = \text{Vect}(\vec{v})$  l’application  $\pi : \begin{cases} \vec{p} & \rightarrow \vec{p} \\ \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} & \mapsto \alpha \vec{u} \end{cases}$ .

**Définition 10.5.11.** Soit  $(\vec{u}, \vec{v})$  une base de  $\vec{\mathcal{P}}$ . On appelle symétrie vectorielle par rapport à  $\vec{D} = \text{Vect}(\vec{u})$  parallèlement à  $\vec{D}' = \text{Vect}(\vec{v})$  l’application  $\sigma : \begin{cases} \vec{p} & \rightarrow \vec{p} \\ \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} & \mapsto \alpha \vec{u} - \beta \vec{v} \end{cases}$ .

Avec ces définitions, si  $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ , on a :

$$\boxed{\overrightarrow{Ap(M)} = \alpha \vec{u} = \pi(\overrightarrow{AM}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{As(M)} = \alpha \vec{u} - \beta \vec{v} = \sigma(\overrightarrow{AM})}$$

On verra sur des exemples que ces définitions permettent facilement de trouver les coordonnées de  $M'$  en fonction de celles de  $M$ . La méthode est la suivante :

si  $A$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $M$  ont pour coordonnées  $(x_A, y_A)$ ,  $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$  et  $(x, y)$ , on écrit a priori :

$$\begin{cases} x - x_A &= \alpha x_u + \beta x_v \\ y - y_A &= \alpha y_u + \beta y_v \end{cases}$$

On calcule alors  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $x$  et  $y$  en résolvant le système, puis on obtient les coordonnées du projeté et du symétrique de  $M$ .

**Proposition 10.5.8.** La projection sur  $D$  parallèlement à  $D'$  est une application affine. L’application linéaire associée est la projection vectorielle sur  $\vec{D}$  parallèlement à  $\vec{D}'$ .

Ce n’est pas une transformation du plan.

**Proposition 10.5.9.** La symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $D'$  est une transformation affine du plan. L’application linéaire associée est la symétrie vectorielle par rapport à  $\vec{D}$  parallèlement à  $\vec{D}'$ .

Quand les directions de  $D$  et  $D'$  sont orthogonales, on parle de **projection** et de **symétrie orthogonales** :

**Définition 10.5.12.** On appelle projection orthogonale sur  $D(A, \vec{u})$  la projection sur  $D$  parallèlement à la direction orthogonale à  $D$ . Cette application associe à tout point  $M$  le point  $p(M) = M'$  tel que

- $M' \in D$ ,
- $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{D}$  (i. e.  $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ ).

On appelle symétrie orthogonale par rapport à  $D$  la symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à la direction orthogonale à  $D$ . Cette application associe à tout point  $M$  le point  $s(M) = M'$  tel que  $D$  soit la médiatrice du segment  $[M, M']$ .

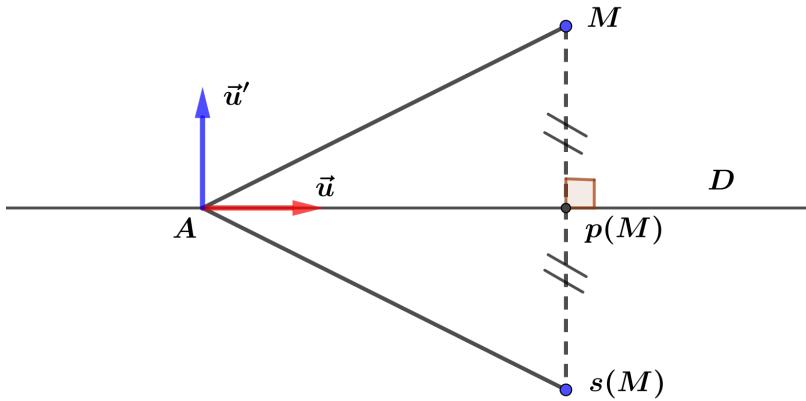


FIGURE 10.16 – Projections et symétries orthogonales

On peut aller plus loin dans les formules dans ce cas : soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  dans une base orthonormale et soit  $\vec{u}' \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  de sorte que le repère  $(A, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{u}'}{\|\vec{u}'\|})$  est orthonormal. On a alors  $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}'$  avec  $\alpha = \overrightarrow{AM} \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$  et  $\beta = \overrightarrow{AM} \cdot \frac{\vec{u}'}{\|\vec{u}'\|^2}$  et ainsi :

**Proposition 10.5.10.** Soit  $D(A, \vec{u})$  une droite du plan. Le projeté orthogonal  $p(M)$  et le symétrique orthogonal  $s(M)$  d'un point  $M$  sont donnée par les formules :

$$\overrightarrow{Ap(M)} = \left( \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u}, \quad \overrightarrow{As(M)} = \left( \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u} - \left( \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}'}{\|\vec{u}'\|^2} \right) \vec{u}'$$

**Remarque 10.5.1.** En pratique, il suffit de connaître la première des deux formules. Quand on a trouvé le projeté  $p(M)$  on obtient le symétrique  $s(M)$  en écrivant que  $\overrightarrow{Ms(M)} = 2\overrightarrow{Mp(M)}$ .

## Propriétés des projections et des symétries :

1. Une projection est caractérisée par le fait que  $p \circ p = p$ . La droite sur laquelle on projette est l'ensemble des points invariants.
2. Une symétrie axiale est caractérisée par le fait que  $s \circ s = Id$ . La droite  $D$  est l'ensemble des points invariants.
3. Une symétrie **orthogonale** conserve la distance entre deux points, change les angles en leur opposés et transforme une droite en une autre droite, un cercle en un autre cercle, de même rayon.

**Exemple 1** Soient  $A(1, 2)$  et  $B(-1, 3)$ . Déterminer les coordonnées de  $M'(x', y')$  image de  $M(x, y)$  par la symétrie orthogonale par rapport à  $D = (AB)$ .

On va d'abord appliquer la formule précédente, puis donner une méthode plus rapide.

Un vecteur directeur de  $D$  est  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ce vecteur n'est pas de norme 1, on obtient un vecteur directeur de  $D$  de norme 1 en prenant  $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{AB}\|} \vec{AB}$ . On a donc  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ .

Alors :

$$\begin{aligned} \vec{AM} \cdot \vec{u} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2(x-1) + (y-2)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) \\ \vec{AM} \cdot \vec{u}' &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-x - 2y + 5) \end{aligned}$$

et la relation  $\vec{AM}' = (\vec{AM} \cdot \vec{u}) \vec{u} - (\vec{AM} \cdot \vec{u}') \vec{u}'$  s'écrit alors

$$\begin{cases} x' - 1 &= \frac{1}{5}(-2x + y)(-2) - \frac{1}{5}(-x - 2y + 5)(-1) \\ y' - 2 &= \frac{1}{5}(-2x + y) - \frac{1}{5}(-x - 2y + 5)(-2) \end{cases}$$

et on obtient le résultat cherché :

$$\begin{cases} x' &= \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y' &= -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 4 \end{cases}$$

**Variante** : conformément à la remarque précédente, on peut commencer par déterminer le projeté  $p(M)$  :

$$\vec{Ap(M)} = (\vec{AM} \cdot \vec{u}) \vec{u}$$

ce qui donne  $p(M) \left(1 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y, 2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\right)$  et on trouve  $(x', y')$  en écrivant que  $p(M)$  est le milieu de  $(M, s(M))$  :

$$\frac{x+x'}{2} = 1 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y, \quad \frac{y+y'}{2} = 2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y$$

On retrouve bien sûr le résultat précédent.

**La seconde méthode** consiste à exprimer la définition du symétrique de  $M$ . Le milieu de  $(M, M')$  appartient à  $D$  et  $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{AB}$ . On calcule l'équation cartésienne de  $D$  : un point  $X(x, y)$  appartient à  $D$  si et seulement si  $\det(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}) = 0$ , soit

$$(x - 1) + 2(y - 2) = x + 2y - 5 = 0,$$

Le milieu  $I$  de  $(M, M')$  a pour coordonnées  $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$ , on en déduit une première équation :

$$(x + x') + 2(y + y') - 10 = 0.$$

On a aussi  $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  qui fournit une seconde équation :

$$-2(x' - x) + (y' - y) = 0,$$

On cherche  $(x', y')$  en fonction de  $(x, y)$ , on écrit donc le système de deux équations à deux inconnues obtenu de la façon suivante :

$$\begin{cases} x' + 2y' = 10 - x - 2y \\ -2x' + y' = -2x + y \end{cases}$$

On résout alors ce système et on retrouve le résultat précédent.

**Exemple 2** Soient  $A(1, 2)$  et  $B(-1, 3)$ . Déterminer les coordonnées de  $M'(x', y')$  projection de  $M(x, y)$  sur  $D = (AB)$  selon la direction de  $\vec{v}(1, 2)$ . On sait que  $M' \in D$  et  $\overrightarrow{MM'} // \vec{v}$ , ces deux informations se traduiront par deux équations :  $(x', y')$  satisfait l'équation cartésienne de  $D$  qu'on a déjà calculée :

$$x' + 2y' - 3 = 0,$$

et

$$\det(\overrightarrow{MM'}, \vec{v}) = 0,$$

soit

$$(x' - x)2 - (y' - y) = 0.$$

On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} x' + 2y' = 3 \\ 2x' - y' = 2x - y \end{cases}$$

qu'on résout pour trouver finalement

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{1}{5} \\ y' = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$$

## 10.6 Compléments (\*)

(\*) Cette section traite de notions qui sont hors programme de ce cours mais qui peuvent être étudiées avec profit par les futurs étudiants de mathématiques et les élèves ingénieurs.

### 10.6.1 Cercles

On a vu en section 10.4 que le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A$  et de rayon  $R$  admet pour équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2x_A x - 2y_A y + x_A^2 + y_A^2 - R^2 = 0,$$

qui est une expression de la forme  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ . On s'intéresse ici à la réciproque.

On pourra reconnaître qu'un ensemble décrit par son équation cartésienne dans un repère orthonormal est un cercle à l'aide de la proposition suivante :

**Proposition 10.6.1.** *Soient  $a, b, c$  des réels. L'ensemble*

$$E = \{M(x, y) \in P ; x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0\}$$

*est soit l'ensemble vide, soit un point, soit un cercle.*

*C'est un cercle si et seulement si  $a^2 + b^2 \geq c$ , c'est alors le cercle de centre  $A(a, b)$  et de rayon  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .*

**Preuve :** on écrit le membre de gauche sous la forme  $(x - a)^2 + (y - b)^2 - a^2 - b^2 + c$ , donc  $M \in E \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$ . Alors

Si  $a^2 + b^2 - c < 0$ ,  $E = \emptyset$ ,

Si  $a^2 + b^2 - c = 0$ ,  $E = \{A(a, b)\} = \mathcal{C}(A, 0)$ .

Si  $a^2 + b^2 - c > 0$ ,  $M(x, y) \in E \iff AM^2 = a^2 + b^2 - c$  et ainsi  $E = \mathcal{C}(A, \sqrt{a^2 + b^2 - c})$ . ■

**Exemples :**

$2x^2 + y^2 - 1 = 0$  n'est pas l'équation d'un cercle.

$3x^2 + 3y^2 - 2x - 1 = 0$  est l'équation d'un cercle car elle équivaut à  $x^2 + y^2 - 2(1/3)x - 1/3 = 0$  :  $a = 1/3$ ,  $b = 0$ ,  $c = -1/3$  et  $(1/3)^2 + 1/3 = 4/9 > 0$ . Son centre est  $A(1/3, 0)$  et son rayon est  $2/3$ .

Une représentation paramétriques dans un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est

$$\begin{cases} x = x_A + R \cos \theta \\ y = y_A + R \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in ]-\pi, \pi]$$

ce qui donne la position de  $M$  sur le cercle en fonction de  $\theta$  sachant que

$$\|\overrightarrow{AM}\| = R \quad \text{et} \quad (\widehat{\vec{i}}, \overrightarrow{AM}) = \theta [2\pi]$$

### 10.6.2 Propriétés du cercle

On rappelle sans démonstration quelques résultats :

**Théorème 10.6.1.** *Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et  $\theta$  un réel, alors l'ensemble des points du plan tels que  $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \theta [\pi]$  est :*

- la droite  $(AB)$  privée de  $A$  et  $B$  si  $\theta = 0 [\pi]$ ,
- un cercle passant par  $A$  et  $B$ , privé de ces deux points, sinon.

**Remarque 10.6.1.** C'est un résultat qui s'écrit en fait en termes d'angles de droites ( $\widehat{MA, MB}$ ) : voir figure 10.17 ci-dessous. On obtient le même résultat avec un angle géométrique  $\widehat{AMB}$ .

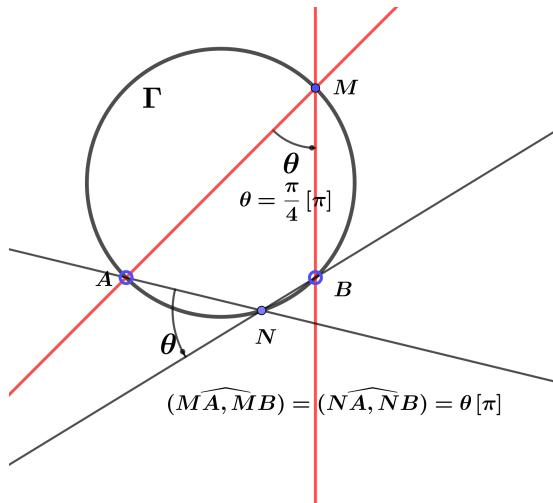


FIGURE 10.17 – Arc capable (*angle de droites*)

**Théorème 10.6.2.** Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et  $\theta$  un réel, alors l'ensemble des points du plan tels que  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta [2\pi]$  est :

- l'ensemble]A, B[ si  $\theta = 0$  [2 $\pi$ ],
  - la droite (AB) privée du segment [A, B] si  $\theta = \pi$  [2 $\pi$ ],
  - un arc de cercle d'extrémités A et B, privé de ces deux points, sinon.

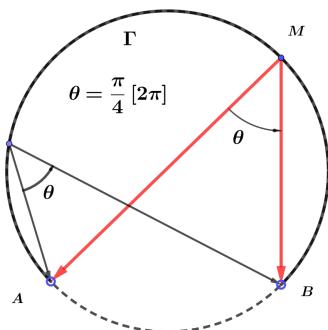


FIGURE 10.18 – Arc capable (angle de vecteurs)

On observera bien quelle est la différence entre les caractérisations des ensembles cherchés dans ces deux énoncés.

On dit que des points sont *cocycliques* s'ils sont sur un même cercle. Alors :

**Corollaire 10.6.1.** Quatre points  $A, B, C, D$  distincts sont alignés ou cocycliques si et seulement si  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) [\pi]$ .

**Théorème 10.6.3** (Théorème de l'angle inscrit). Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$ , passant par deux points distincts  $A$  et  $B$ , alors pour tout point  $M$  du plan :

$$M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \iff (\widehat{\overrightarrow{MA}}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2} (\widehat{\overrightarrow{OA}}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) [\pi]$$

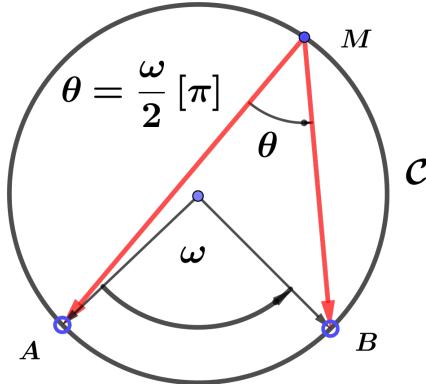


FIGURE 10.19 – Angle au centre et angle inscrit

**Corollaire 10.6.2.** Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts,  $I$  le milieu de  $[A, B]$  et  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $I$  passant par  $A$  et  $B$ , alors

$$M \in \mathcal{C} \iff (\widehat{\overrightarrow{MA}}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

### 10.6.3 Nombres complexes et géométrie plane

Les nombres complexes permettent de représenter analytiquement toutes les transformations usuelles du plan telles que les translations, les homothéties, les rotations et bien d'autres encore. À titre d'exemple nous passons en revue les trois cas qui viennent d'être cités.

On suppose dans tout ce qui suit que le plan est orienté (même si c'est seulement utile pour les rotations) et rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Translations et homothéties

Soit  $t_{\vec{u}}$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ . Notons  $u$  l'affixe de  $\vec{u}$ ,  $z$  (resp.  $z'$ ) celui de  $M$  (resp. de  $M'$ ). On a immédiatement :

$$M' = t_{\vec{u}}(M) \iff z' = z + u$$

$z' = z + u$  est la forme complexe de la translation  $t_{\vec{u}}$ .

Soit  $h(\Omega, k)$  l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k \in \mathbb{R}^*$ . Notons  $\omega$  l'affixe de  $\Omega$ ,  $z$  (resp.  $z'$ ) celui de  $M$  (resp. de  $M'$ ). La relation de définition s'écrit

$$z' - \omega = k(z - \omega).$$

On peut retenir (ou mieux, retrouver immédiatement) le résultat sous cette forme. Il s'écrit aussi :

$$M' = h(\Omega, k)(M) \iff z' = k z + (1 - k) \omega$$

$z' = k z + (1 - k) \omega$  est la forme complexe de l'homothétie  $h(\Omega, k)$ .

#### Pour reconnaître une translation ou une homothétie :

**Proposition 10.6.2.** Soient  $k \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{C}$ . Soit  $f$  l'application du plan dans lui même qui associe au point  $M(z)$  le point  $M'(z')$  tels que  $z' = k z + b$ .

- Si  $k = 1$ ,  $f$  est la translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $b$ .
- Si  $k \neq 1$ ,  $f$  est l'homothétie de rapport  $k$  dont le centre est l'unique point  $\Omega$  invariant (i.e. solution de  $f(M) = M$ , c'est à dire aussi  $z' = z$ ) d'affixe  $\omega = \frac{b}{1 - k}$ .

#### Rotations

Soient  $\Omega$  un point,  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $r(\Omega, \theta)$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$ . On rappelle que pour  $M \neq \Omega$  :

$$r(\Omega, \theta)(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M, \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi] \end{cases}$$

Les deux relations de définition s'écrivent en termes d'affixes sous la forme :

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega|, \\ \arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \theta [2\pi] \end{cases},$$

ce qui se traduit en une seule relation équivalente :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

ou encore :

$$M' = r(\Omega, \theta)(M) \iff z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta}) \omega$$

$z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta}) \omega$  est la forme complexe de la rotation  $r(\Omega, \theta)$ .

**Exemple :**  $z' = iz$  est la forme complexe de la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Ceci donne une interprétation utile de la multiplication par  $i$ . Ainsi, deux rotations successives de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  appliquées à un point transforment ce point en son symétrique par rapport à  $O$  : c'est une interprétation de la relation  $i^2 = -1$ .

**Pour reconnaître une rotation :**

**Proposition 10.6.3.** Soient  $a \in U$  (i.e.  $|a| = 1$ ) et  $b \in \mathbb{C}$ . Soit  $f$  l'application du plan dans lui-même qui associe au point  $M(z)$  le point  $M'(z')$  tels que  $z' = az + b$ .

- Si  $a = 1$ ,  $f$  est la translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $b$ .
- Si  $a \neq 1$ ,  $f$  est la rotation d'angle  $\theta = \arg(a)$  et de centre est l'unique point  $\Omega$  invariant d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$ .



# Chapitre 11

## Géométrie élémentaire de l'espace

**Objectifs :** dans le contexte de la géométrie dans l'espace étudiée au lycée, sans construction théorique préliminaire, donner la maîtrise de quelques outils indispensables et de leurs applications : produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte, calculs d'angles, de distances, d'aires et de volumes...

### 11.1 Contexte général et rappels

On étudie dans ce chapitre la géométrie dans un ensemble  $\mathcal{E}$  qui est un modèle de notre espace physique à trois dimensions et qu'on appellera « espace affine », ou plus simplement « espace ». On l'aborde dans le même esprit que dans l'enseignement secondaire, comme une donnée basée sur l'intuition. Il est en lien étroit avec l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  via les coordonnées, de même que le plan étudié au chapitre précédent est en lien avec  $\mathbb{R}^2$ , comme on l'a vu.

Les objets de base sont ici les points, les droites et les plans, avec les notions de parallélisme et d'orthogonalité. L'espace est muni d'une distance telle que dans chaque plan on peut appliquer tous les résultats du chapitre 10.

On étend à  $\mathcal{E}$  les notions de bipoint, de vecteur, de vecteurs colinéaires et de norme d'un vecteur. Les vecteurs de l'espace forment un ensemble noté  $\vec{\mathcal{E}}$  et on définit pour ces vecteurs l'addition et le produit par un réel, avec les **même règles de calcul que dans le plan** : pour ces opérations,  $\vec{\mathcal{E}}$  est *un espace vectoriel réel*.

#### 11.1.1 Droites et plans dans l'espace

Les droites, affines ou vectorielles, sont définies comme au chapitre précédent :  $\vec{u}$  étant un vecteur non nul, l'ensemble  $\text{Vect } \vec{u} = \{\lambda \vec{u} ; \lambda \in \mathbb{R}\}$  est la droite vectorielle engendrée par  $\vec{u}$ . Lorsqu'on se donne un point  $A$  et un vecteur non nul  $\vec{u}$  l'ensemble

$$D(A, \vec{u}) = \{M \in \mathcal{E}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}\},$$

est la **droite affine** dirigée par  $\vec{u}$  et passant par  $A$ . Sa direction, par définition, est  $\vec{D} = \text{Vect } \vec{u}$ .

On précise maintenant quelques notions utiles à l'étude des plans :

**Définition 11.1.1.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ . On appelle combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tout vecteur de la forme  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

**Définition 11.1.2.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs **non colinéaires** de  $\vec{\mathcal{E}}$ . On appelle plan vectoriel engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  l'ensemble  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  des combinaisons linéaires de ces vecteurs :

$$\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{a\vec{u} + b\vec{v} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

**Proposition 11.1.1.** Soient  $\vec{u}', \vec{v}'$  deux vecteurs d'un même plan vectoriel  $\vec{P} = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ . Si ces vecteurs ne sont pas colinéaires, alors  $\vec{P} = \text{Vect}(\vec{u}', \vec{v}')$ .

**Preuve :** il existe des réels  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  tels que  $\begin{cases} \vec{u}' = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \\ \vec{v}' = \gamma \vec{u} + \delta \vec{v}. \end{cases}$  Comme les vecteurs ne sont pas colinéaires, on a , en vertu de la proposition 10.2.8,  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$  et on déduit du système précédent (même méthode que pour les systèmes linéaires de réels) les égalités  $\vec{u} = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \vec{u}' - \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \vec{v}'$  et  $\vec{v} = \frac{\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} \vec{u}' - \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} \vec{v}'$ . On en déduit alors qu'un vecteur  $\vec{w} \in \vec{P}$  est combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  si et seulement si il est combinaison linéaire de  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}'$ , doù  $\text{Vect}(\vec{u}', \vec{v}') = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ . ■

**Définition 11.1.3.** On dit que trois vecteurs sont coplanaires s'il existe un même plan vectoriel qui les contient.

**Remarque 11.1.1.** Il résulte de la proposition 11.1.1 que si trois vecteurs sont coplanaires, deux quelconques d'entre eux qui ne sont pas colinéaires engendrent un plan qui les contient tous les trois.

**Définition 11.1.4.** Soient  $A \in \mathcal{E}$  et  $\vec{u}, \vec{v}$  des vecteurs non colinéaires. On appelle plan affine passant par  $A$  et dirigé par  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  (ou plus simplement « par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ») l'ensemble

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in \mathcal{E}; \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}\}.$$

On dit que des points sont coplanaires s'ils sont contenus dans un même plan affine.

**Remarque 11.1.2.** Un plan affine est aussi décrit par la donnée de trois points **non alignés**. Le plan  $(ABC)$  est alors le plan passant par  $A$  dirigé par  $(\vec{AB}, \vec{AC})$ . A noter que l'ordre des points n'a pas d'importance (exercice).

On a le résultat suivant, bien connu :

**Proposition 11.1.2.** Etant donnés une droite  $D$  et un point  $A$  non situé sur  $D$ . Il existe un unique plan affine qui contient  $A$  et  $D$ .

**Preuve :** exercice.

Le lien entre vecteurs coplanaires et points coplanaires est celui-ci :

**Proposition 11.1.3.** Soit  $O$  un point quelconque de  $\mathcal{E}$  et  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trois vecteurs. Soient alors  $A, B$  et  $C$  les points définis par  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ . Alors :

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ coplanaires} \iff O, A, B, C \text{ coplanaires}$$

**Preuve :** supposons que les vecteurs soient coplanaires. Si  $\vec{u} // \vec{v}$  alors les points  $O, A$  et  $B$  sont alignés, c'est à dire sur une même droite  $D$ . Comme il existe un plan qui contient  $D$  et  $C$  (unique si  $C \notin D$ ) on conclut que les quatre points sont coplanaires. Si au contraire  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, alors ils engendrent un plan vectoriel  $\vec{P}$  auquel appartient  $\vec{w}$  par hypothèse. Il existe donc des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ , c'est à dire  $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ , ce qui prouve que  $C \in P(O, A, B)$  et donc que les quatre points sont coplanaires.

La réciproque est laissée en exercice. ■

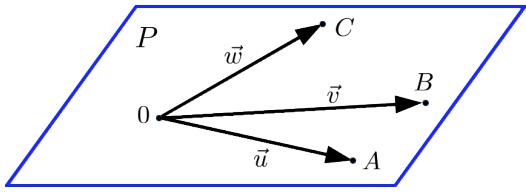


FIGURE 11.1 – Points et vecteurs coplanaires

### 11.1.2 Bases, repères cartésiens de l'espace

Les notions rappelées au chapitre 10 s'étendent comme suit :

**Définition 11.1.5.** Un repère cartésien de l'espace  $\mathcal{E}$  est un triplet  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $O$  est un point, appelé origine du repère et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un triplet vecteurs non coplanaires, appelé base de  $\mathcal{E}$ .

**Proposition 11.1.4.** Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de l'espace. Alors :

- (a) pour tout point  $M \in \mathcal{E}$  il existe un unique triplet de réels  $(x, y, z)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ ,
- (b) pour tout vecteur  $\vec{u} \in \mathcal{E}$  il existe un unique triplet de réels  $(x, y, z)$  tel que  $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ .

On notera (de préférence)  $M(x, y, z)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

On ne démontrera pas ces résultats.

### 11.1.3 Produit scalaire

Comme dans le plan, le produit scalaire euclidien de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}, \\ \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\theta$  est l'écart angulaire (ou angle géométrique) de ces vecteurs dans tout plan les contenant (ce plan vectoriel est unique si les vecteurs sont non colinéaires). Rappelons que cet écart angulaire est noté  $(\vec{u}, \vec{v})$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 10.2.1) reste bien sûr valable.

On rappelle que les résultats de géométrie plane sont supposés valables dans tout plan (vectoriel ou affine) de l'espace. On a toujours :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

**Projection d'un vecteur sur un axe :** les définitions et formules de la section 10.2.5 du chapitre 10 sont valables, sans changement, dans l'espace.

### 11.1.4 Mesures d'angles dans l'espace

Il existe une obstruction théorique à la définition et la mesure d'un angle orienté  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}})$  : observons simplement que si on dessine un angle droit direct sur une vitre (avec l'orientation qui nous semble usuelle), il nous apparaîtra comme indirect si on l'observe depuis l'autre côté ...

Il nous faudra donc une méthode pour décider de l'orientation d'un plan de l'espace et ainsi lever l'ambiguité.

Par contre, on a vu que l'on sait définir un écart angulaire, ou angle géométrique (celui du rapporteur!). En utilisant le produit scalaire on a immédiatement le résultat suivant, applicable pour des calculs effectifs :

**Proposition 11.1.5.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls de l'espace. L'écart angulaire, ou angle géométrique, de ces vecteurs est l'unique réel  $\theta$  de l'intervalle  $[0, \pi]$  tel que  $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ .

On peut également définir un écart angulaire (ou angle géométrique) de deux droites  $D(A, \vec{u})$  et  $D'(B, \vec{v})$  comme l'unique réel  $\theta$  de l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$  tel que  $\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ , en effet ce nombre ne dépend pas du choix du couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  de vecteurs directeurs (exercice). On le note  $(\overline{D}, \overline{D'})$ .

On notera qu'il s'agit toujours d'un « angle aigu ».

Deux droites  $D$  et  $D'$  sont orthogonales si et seulement si  $(\overline{D}, \overline{D'}) = \frac{\pi}{2}$ .

Deux droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles si et seulement si  $(\overline{D}, \overline{D'}) = 0$ .

### 11.1.5 Bases et repère orthonormaux

Une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthogonale si les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont deux à deux orthogonaux.

Un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est **orthogonal** si la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthogonale.

Une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormale si elle est orthogonale et si les vecteurs de base  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sont de norme 1. Un repère est **orthonormal** si la base correspondante est orthonormale.

En appliquant le théorème de Pythagore deux fois, on démontre, que dans une base **orthonormale**, on a pour  $\vec{u}(x, y, z)$ ,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Si dans une base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on a  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$ , on a immédiatement

$$x = \vec{u} \cdot \vec{i}, \quad y = \vec{u} \cdot \vec{j}, \quad z = \vec{u} \cdot \vec{k}.$$

et (admis)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

**Remarque 11.1.3.** Si on pose  $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ , on a également  $\vec{u} \cdot \vec{v} = {}^t A A' = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  ainsi que  $\|\vec{u}\|^2 = {}^t A A$ .

### 11.1.6 Orientation de l'espace, repère orthonormaux directs

On observe expérimentalement (la théorie sera faite plus tard) que si on veut superposer deux repères orthogonaux  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  sans les déformer, alors une fois qu'on a amené  $O'$  sur  $O$ , puis  $\vec{i}'$  sur  $\vec{i}$ , puis  $\vec{j}'$  sur  $\vec{j}$ , on a soit  $\vec{k}' = \vec{k}$ , soit  $\vec{k}' = -\vec{k}$ .

Une fois fixé un repère orthogonal, on peut donc classer tous les autres en deux catégories : ceux pour lesquels  $\vec{k}' = \vec{k}$ , et on dit que les deux repères définissent **la même orientation**, et ceux pour lesquels  $\vec{k}' = -\vec{k}$ .

On **orient**e l'espace en fixant arbitrairement un repère orthogonal, et on dit qu'un repère est **orthonormal direct** s'il a la même orientation que le repère de référence.

L'orientation usuelle est définie par la règle du bonhomme d'Ampère ou, de manière équivalente, par la règle des trois doigts ou celle du tire-bouchon : [http://uel.unisciel.fr/physique/outils\\_nancy/outils\\_nancy\\_ch03/co/apprendre\\_03\\_03.html](http://uel.unisciel.fr/physique/outils_nancy/outils_nancy_ch03/co/apprendre_03_03.html)

Par exemple, le bonhomme d'ampère qui est imaginé debout sur le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et pour lequel le vecteur  $\vec{k}$  pointe vers le haut, a le vecteur  $\vec{j}$  à sa gauche s'il regarde dans la direction de  $\vec{i}$ .

Sur la figure 11.2 ci dessous les repères  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  et  $(E, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA})$ , par exemple, sont directs pour l'orientation usuelle. Le repère  $(C, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$  est indirect.

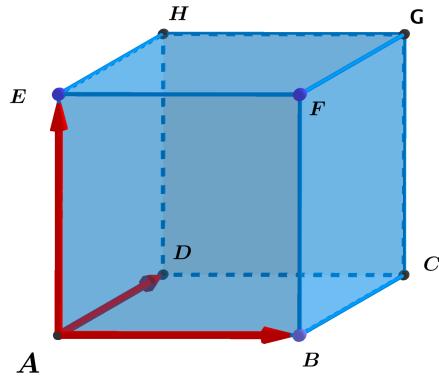


FIGURE 11.2 – Repères orthonormaux directs

**Abréviations :** on écrira parfois « b.o.n.d. » pour base orthonormale directe et « r.o.n.d. » pour repère orthonormal direct.

### 11.1.7 Orientation d'un plan de l'espace

**Définition 11.1.6.** Soit  $P$  un plan de  $\mathcal{E}$ . Un vecteur non nul  $\vec{n}$  est dit normal à  $P$  s'il est orthogonal à tous les vecteurs de  $\vec{P}$ .

**Pour orienter un plan**, on commence par se donner une orientation de l'espace, puis on choisit un vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal au plan (deux choix possibles). On oriente alors le plan à l'aide du repère orthonormal  $(\vec{i}, \vec{j})$  tel que  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{n})$  soit une base orthonormale directe de l'espace.

On dit que **le plan est orienté par le vecteur normal  $\vec{n}$** . En fait, on peut se donner un vecteur qui n'est pas de norme 1 pour définir l'orientation : on se ramène facilement au cas précédent.

La phrase « La mesure de l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  dans le plan orienté par  $\vec{n}$  est  $-\pi/3$  » a alors un sens précis.

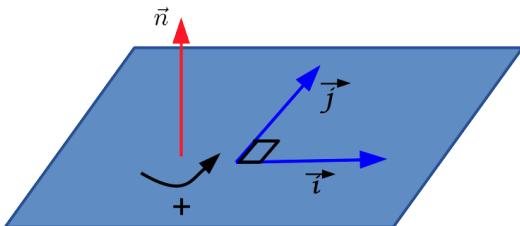
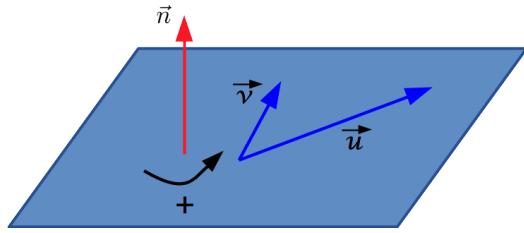


FIGURE 11.3 – Orientation d'un plan par un vecteur normal de l'espace orienté

On dit plus généralement que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$  est une base **directe** si l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  dans le plan orienté par  $\vec{n}$  est dans l'intervalle  $[0, \pi]$ .



Le bonhomme d'Ampère, debout sur le plan dans la direction verticale donnée par  $\vec{k}$  et regardant dans la direction de  $\vec{u}$  à la vecteur  $\vec{v}$  qui pointe dans le demi-plan qui est à sa gauche.

Nous utiliserons cette généralisation dans la définition du produit vectoriel.

## 11.2 Produit vectoriel

**Définition 11.2.1.** Le produit vectoriel dans  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  est l'application  $\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{E}}$  qui associe à un couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  un vecteur noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  défini comme suit :

- si l'un des vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  est nul alors  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ ,
- sinon,  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  est tel que :
  - $\vec{w} \perp \vec{u}, \vec{w} \perp \vec{v}$ ,
  - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base directe,
  - $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ , où  $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ .

**Remarque 11.2.1.** On peut aussi écrire  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$ , où  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  est une mesure de l'angle orienté du couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  dans un plan les contenant et orienté de façon arbitraire (bien noter la présence de la valeur absolue).

Si les vecteurs ne sont pas colinéaires, ils engendrent un plan que l'on peut orienter à l'aide de  $\vec{w}$  : comme  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base directe, la mesure principale  $\theta$  de l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  est dans  $[0, \pi]$  et donc  $\sin \theta > 0$ , ce qui permet dans ce cas d'omettre la valeur absolue.

**Interprétation géométrique :** aire d'un parallélogramme ou d'un triangle

**Proposition 11.2.1.** Soit  $ABDC$  un parallélogramme d'un plan  $P$  de l'espace. Son aire est donnée par :

$$\mathcal{A}(ABDC) = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

L'aire du triangle  $ABC$  est donnée par :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

**Preuve :** la preuve peut être calquée sur celle de la proposition 10.2.3 où on calcule l'aire du triangle. On remarque simplement que l'aire du parallélogramme est le double de celle du triangle. ■

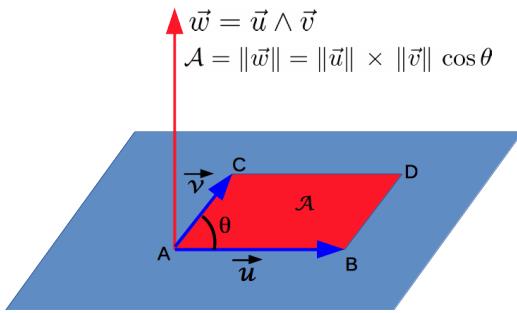


FIGURE 11.4 – Produit vectoriel

**Exemple :** soient  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(2, -1, 3)$ ,  $C(0, 4, 1)$  : le triangle  $ABC$  est-il rectangle en  $B$ ? Quelle est son aire ? **Réponse :** On a  $\overrightarrow{BA}(1, -1, 2)$ ,  $\overrightarrow{BC}(-2, 5, -2)$  et

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -11 \neq 0, \quad \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le triangle  $ABC$  n'est donc pas rectangle en  $B$  et son aire est  $\frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{77}}{2}$ .

**Une autre application géométrique :** construction d'un vecteur normal à un plan

**Proposition 11.2.2.**

Soit  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$  un plan. Le vecteur  $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  est un vecteur normal à ce plan.

**Preuve :** tout vecteur de ce plan est de la forme  $\vec{w} = a \vec{u} + b \vec{v}$ . Or  $\vec{n} \cdot \vec{w} = a \vec{n} \cdot \vec{u} + b \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$  car  $\vec{n} \perp \vec{u}$  et  $\vec{n} \perp \vec{v}$ . ■

On étudie maintenant les propriétés du produit vectoriel.

**Proposition 11.2.3.**

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux et unitaires, alors  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une b.o.n.d. de  $\mathcal{E}$ .

Le produit vectoriel est donc un outil pour construire facilement des bases orthonormales directes. On vérifiera par exemple que si  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une b.o.n.d. alors :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}.$$

Comme conséquence directe de la définition on a :

**Proposition 11.2.4.** Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul :

$$\vec{u} // \vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Voici les règles permettant de manipuler le produit vectoriel :

**Proposition 11.2.5.** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs de l'espace et  $(\alpha, \beta)$  des réels. Alors :

— antisymétrie du produit vectoriel :

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

(le produit vectoriel n'est donc pas commutatif)

— propriétés de bilinéarité :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w},$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w},$$

(distributivité par rapport à l'addition)

$$(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}),$$

$$\vec{u} \wedge (\beta \vec{v}) = \beta (\vec{u} \wedge \vec{v}),$$

**Preuve :** la première propriété et les deux dernières sont aisément justifiables à partir de la définition. Nous admettrons les autres. ■

**Exercice :** on vérifiera à partir des définitions que l'on a :

$$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

**Proposition 11.2.6.** Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  dans une b.o.n.d., alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z) \vec{i} + (zx' - xz') \vec{j} + (xy' - x'y) \vec{k}$$

c'est à dire encore :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

**Preuve :** on applique les propriétés de bilinéarité en tenant compte de  $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$  :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) \wedge (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}) \\ &= xy' \vec{i} \wedge \vec{j} + xz' \vec{i} \wedge \vec{k} + yx' \vec{j} \wedge \vec{i} + yz' \vec{j} \wedge \vec{k} + zx' \vec{k} \wedge \vec{i} + zy' \vec{k} \wedge \vec{j} \end{aligned}$$

et on termine en calculant chaque produit vectoriel avec l'aide du bonhomme d'Ampère, toujours serviable. ■

**Exemple :** on présentera souvent les calculs, par commodité, en ne faisant figurer que les matrices colonnes des coordonnées. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur, cela a un sens de se poser la question de l'associativité, or on a le résultat suivant :

**Proposition 11.2.7** (Double produit vectoriel). *Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs de l'espace, alors :*

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

**Preuve :** on peut établir ce résultat en la vérifiant à partir d'un calcul de coordonnées utilisant la proposition 11.2.6. Les calculs sont fastidieux sauf si on utilise une b.o.n.d adaptée, construite à partir des vecteurs donnés. ■

On peut en déduire la **non associativité du produit vectoriel** car on a par exemple :

$$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{k}) = \vec{i} \wedge (-\vec{j}) = -\vec{k},$$

tandis que

$$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{k} = \vec{0} \wedge \vec{k} = \vec{0}.$$

### 11.3 Produit mixte, déterminant

**Définition 11.3.1.** On appelle produit mixte l'application  $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$  qui à un triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  de vecteurs de l'espace associe le **réel**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

**Remarque 11.3.1.** Le produit mixte, comme le produit vectoriel, dépend de l'orientation : un changement d'orientation change le produit mixte en son opposé.

**Une interprétation géométrique :** volume d'un parallélépipède

**Proposition 11.3.1.** *Soit  $(ABCDEFHG)$  un parallélépipède, avec  $\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$  ;  $\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{EH} = \vec{FG}$  ;  $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{EF} = \vec{HG}$ . Son volume est donné par :*

$$V(ABCDEFHG) = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]|$$

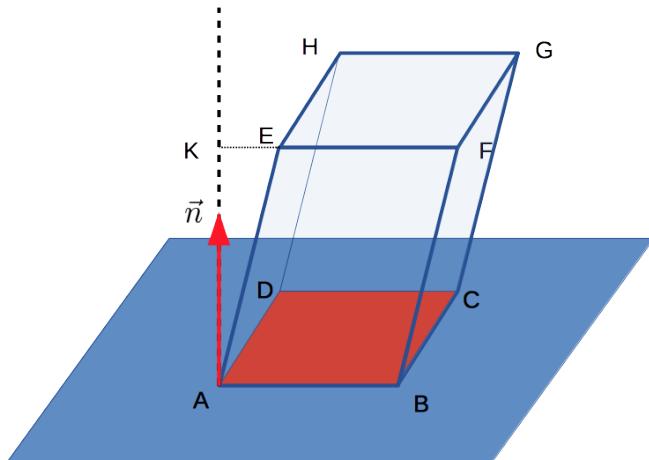


FIGURE 11.5 – Volume d'un parallélépipède

**Preuve :** le volume du parallélépipède est donné par le produit de l'aire de la base ( $ABCD$ ) par la hauteur relative à cette base :

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}(ABCD) \times AK$$

Or on a :  $\mathcal{A}(ABCD) \times AK = \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \| \times AK = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AK}| = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{[AB, AD, AE]}|$ . ■

Le produit mixte donne un critère simple pour savoir si des vecteurs sont coplanaires :

**Proposition 11.3.2.** *Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement si  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ .*

**Preuve :** si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ , l'équivalence est immédiate. Sinon la nullité du produit mixte équivaut à  $\vec{w} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$ , donc à l'orthogonalité des trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  à un même vecteur non nul  $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  donc au fait d'être dans le même plan vectoriel de vecteur normal  $\vec{n}$ . ■

En utilisant les propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel on obtient immédiatement :

**Proposition 11.3.3.**

*Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}'$ ,  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$  des vecteurs de l'espace et  $(\alpha, \beta)$  des réels. Alors :*

- l'échange de deux vecteurs change le signe du produit mixte.  
Par exemple  $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ ,
- le produit mixte est invariant par permutation circulaire :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

- propriétés de trilinéarité :

$$[\alpha \vec{u} + \beta \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \beta [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}],$$

$$[\vec{u}, \alpha \vec{v} + \beta \vec{v}', \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \beta [\vec{u}, \vec{v}', \vec{w}],$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \alpha \vec{w} + \beta \vec{w}'] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \beta [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}'].$$

**Remarque 11.3.2.** L'invariance du produit mixte par les permutations circulaires et la commutativité du produit scalaire permettent de l'écrire indifféremment sous les formes suivantes :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

De la proposition 11.2.6 et de la définition du produit mixte on déduit le calcul du produit mixte dans une b.o.n.d. :

**Proposition 11.3.4.** *Soient, dans une b.o.n.d., les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ . Alors :*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} + z'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & z' \end{vmatrix} \quad (11.1)$$

En développant, on trouve

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''. \quad (11.2)$$

**Définition 11.3.2.** On appelle déterminant de la matrice  $M = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  le réel noté

$\det M$  ou  $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$  défini par :

$$\det M = x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} + z'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & z' \end{vmatrix} \quad (11.3)$$

$$= xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'' \quad (11.4)$$

**Remarque 11.3.3.** Dans la formule (11.3), les deuxième et troisième termes s'obtiennent à partir du premier par permutations circulaires de la forme  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ .

Ce déterminant peut donc s'interpréter comme le produit mixte des vecteurs dont les coordonnées dans une b.o.n.d. sont données par les trois colonnes de  $M$ .

On constate facilement à partir de la formule développée (11.4) que  $\det M = \det {}^t M$  :

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \quad (11.5)$$

L'écriture du déterminant sous la forme (11.3) s'appelle « développement suivant la troisième colonne ». On peut en fait avoir des formules analogues en développant suivant n'importe quelle ligne ou colonne suivant le principe suivant :

- On affecte à chacun des 9 emplacements dans le tableau du déterminant un signe obtenu en affectant le signe + en ligne 1-colonne 1 ( $L_1C_1$ ) et en parcourant le tableau d'une ligne ou colonne à la fois en changeant le signe : le signe affecté à  $L_iC_j$  est  $(-1)^{i+j}$ . On obtient :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- si on décide par exemple de développer suivant la deuxième ligne, on écrit le déterminant, en tenant compte de ces signes, sous la forme  $\det M = -y a + y' b - y'' c$  avec :

$$a = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} x & x'' \\ z & z'' \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$$

Le coefficient de  $y$ , terme de  $(L_2C_1)$ , est le déterminant obtenu quand on a rayé la ligne  $L_2$  et la colonne  $C_1$  etc...

**Remarque :** la formulation (11.3) ne comporte que des signes + car on a préféré modifier le déterminant en échangeant les deux lignes, de façon à procéder par permutations circulaires. Chacun utilisera la méthode qui lui convient.

N'importe laquelle des formules obtenues donne (11.4) à l'ordre près des termes, ce qui suffit à les justifier.

Conformément à ce qui a été vu pour le produit mixte :

- quand on permute deux lignes ou deux colonnes, on change seulement le signe du déterminant,
- si on fait des permutations circulaires des lignes ou des colonnes, on garde la même valeur.

De la propriété suivante du produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\vec{v} + \alpha \vec{u})$$

on déduit qu'**on peut ajouter à une colonne un multiple d'une autre sans changer la valeur du déterminant**.

Grâce à (11.5), **on a la même propriété avec les lignes**.

## 11.4 Droites et plans en géométrie analytique

### 11.4.1 Représentations paramétriques

Il découle immédiatement des définitions vues en section 11.1.1 qu'une représentation paramétrique

de la droite passant par  $A(x_A, y_A, z_A)$  de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$  est donnée par

$$M(x, y, z) \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \alpha x_u \\ y = y_A + \alpha y_u \\ z = z_A + \alpha z_u \end{cases}$$

De même, on a

$$M(x, y, z) \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x_A + \alpha x_u + \beta x_v \\ y = y_A + \alpha y_u + \beta y_v \\ z = z_A + \alpha z_u + \beta z_v \end{cases}$$

ce qui est par définition une représentation paramétrique du plan  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour les plans, on a donc besoin de deux paramètres indépendants.

### 11.4.2 Équations cartésiennes

Par « équation(s) cartésienne(s) » on entend une condition nécessaire et suffisante portant sur les coordonnées d'un point pour que ce point appartiennent à l'ensemble étudié (ici, droite ou plan).

On a deux façons d'obtenir de telles équations. L'une consiste à écrire les équations paramétriques et éliminer les paramètres, l'autre à écrire des relations de colinéarité ou d'orthogonalité en utilisant les outils que sont le produit scalaire, le produit vectoriel et le produit mixte.

On a choisi de les présenter sur des exemples :

**Exemple 1 :** soit  $D(A, \vec{u})$  avec  $A(1, 2, 3)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Une représentation paramétrique est alors

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Il s'agit de trouver nécessaire et suffisante sur les coordonnées pour que le point  $M(x, y, z)$  appartiennent à  $D$ , donc pour que  $\alpha$  existe. On considère donc le système ci dessus comme un système de trois équations linéaires à une inconnue  $\alpha$ . Il équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = x - 1 \\ y = 2 - (x - 1) \\ z = 3 + 2(x - 1) \end{cases}$$

Il admet donc la solution unique  $\alpha = x - 1$  si et seulement si les conditions de compatibilité données par les deux dernières équations sont satisfaites. Autrement dit :

$$M(x, y, z) \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Ce système de deux équations constitue un système d'équations cartésiennes de  $D$ .

Cette méthode d'*élimination du paramètre* est la plus efficace pour les équations de droites dans l'espace.

**Exemple 2 :** soit  $P(B, \vec{u}, \vec{v})$  avec  $B(1, 2, -3)$ ,  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Une représentation paramétrique de ce plan est :

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = -3 + \alpha + \beta \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Un point  $M(x, y, z)$  donné est dans le plan si et seulement si il existe un couple  $(\alpha, \beta)$  solution de ce système de trois équations linéaires à deux inconnues. Il équivaut à

$$\begin{cases} 2\alpha = x - 1 + z + 3 & (L_1 + L_3) \\ 2\beta = z + 3 - x + 1 & (L_3 - L_1) \\ y = 2 - \frac{1}{2}(x + z + 2) + \frac{1}{2}(-x + z + 4) \end{cases}$$

La condition de compatibilité est donnée par la dernière équation qui se simplifie en  $x + y - 3 = 0$ . On a montré

$$M(x, y, z) \in P(B, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$$

Cette dernière équation, obtenue par élimination des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , est une équation cartésienne de  $P$ . Observons que si on n'avait su qu'on obtiendrait a priori une seule équation, ce qui sera établi plus loin, l'opération  $L_1 + L_2$  aurait directement fourni l'équation cherchée.

Exposons maintenant une autre méthode ne passant pas par une représentation paramétrique. On sait que  $M \in P(B, \vec{u}, \vec{v})$  si et seulement si  $\overrightarrow{BM}, \vec{u}, \vec{v}$  sont coplanaires et donc si et seulement si

$$[\overrightarrow{BM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$$

C'est à dire

$$\begin{vmatrix} x - x_B & x_u & x_v \\ y - y_B & y_u & y_v \\ z - z_B & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

qui fournit, en le développant suivant la première ligne :

$$(x - x_B) \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + (y - y_B) \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} + (z - z_B) \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = 0$$

Ceci est une équation cartésienne du plan. On pourra poursuivre les calculs et constater qu'on obtient une équation équivalente à la précédente.

**Exemple 3 :** trouver une équation cartésienne du plan  $P$  passant par  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(2, 1, 3)$ ,  $C(1, 1, 1)$ . La question sous-entend que les trois points définissent bien un plan, donc ne sont pas alignés, ce qu'il

faudra vérifier. On calcule deux vecteurs directeurs, par exemple  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . On calcule

les coordonnées de  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Le produit vectoriel n'est pas nul, les trois points ne sont donc pas alignés et définissent bien un plan.** On a alors

$$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = (x - 1)(-4) + (y + 1)1 + (z - 2)2$$

On obtient donc une équation cartésienne du plan en écrivant la condition pour que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont coplanaires :

$$M(x, y, z) \in P \iff -4x + y + 2z + 1 = 0.$$

**Remarque 11.4.1.** Posons  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  : on a obtenu une équation cartésienne du plan passant pas  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  car la relation  $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$  équivaut à  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ . On peut partir de cette relation pour obtenir une équation cartésienne.

On a obtenu à chaque fois une expression du type  $ax + by + cz + d = 0$ , ce qui est général :

**Proposition 11.4.1.** Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  et  $E = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} ; ax + by + cz + d = 0\}$ . Alors :

- si  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$  et  $d \neq 0$  on a  $E = \emptyset$ ,
- si  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$  et  $d = 0$  on a  $E = \mathcal{E}$ ,
- si  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  alors  $E$  est un plan de vecteur normal  $\vec{n}(a, b, c)$ .

**Preuve :** les deux premiers points sont immédiats. Pour le troisième, si par exemple  $a \neq 0$  on trouve un point de  $E$  sous la forme  $A(-\frac{d}{a}, 0, 0)$  et en retranchant membre à membre l'équation de  $E$  et l'égalité  $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$  on obtient

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

que l'on peut interpréter sous la forme  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ , ce qui permet de conclure. ■

Un plan donné n'a pas une seule équation cartésienne, en effet :

**Proposition 11.4.2.** Deux équations cartésiennes  $ax + by + cz + d = 0$  et  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$  définissent le même plan si et seulement si  $(a, b, c, d)$  et  $(a', b', c', d')$  sont proportionnels

**Preuve :** même démonstration que dans le plan, avec une coordonnée en plus (exercice). ■

On peut maintenant interpréter les équations cartésiennes d'une droite. On a vu que ces équations consistent en un système :

$$(S) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Elles consistent donc à écrire que la droite est l'**intersection de deux plans** : le plan  $P$  d'équation cartésienne  $ax + by + cz = 0$  et le plan  $P'$  d'équation  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ . Comme tout vecteur de  $P$  est orthogonal à  $\vec{n}(a, b, c)$  et tout vecteur de  $P'$  est orthogonal à  $\vec{n}'(a', b', c')$ , on obtient que tout vecteur directeur de  $D$  est orthogonal à  $\vec{n}(a, b, c)$  et à  $\vec{n}'(a', b', c')$ , donc colinéaire à  $\vec{N} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$ . On a donc obtenu :

Le vecteur  $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite représentée par  $(S)$ .

Ceci fournit un moyen, pour une droite, de passer facilement des équations cartésiennes à une représentation paramétrique.

**Exemple :** on considère la droite  $D$  représentée par le système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

En donner une représentation paramétrique.

Pour trouver un point de  $D$ , on choisit une coordonnée  $z = 0$  par exemple, et on résout le système obtenu :

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

soit  $x = -1$ ,  $y = 1$ . Le point  $A(-1, 1, 0)$  appartient donc à  $D$ . Puis on calcule un vecteur directeur

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

et, éventuellement, on choisit un vecteur directeur plus simple, ici  $\vec{u}(0, 1, 1)$ . On obtient alors une représentation paramétrique de  $D$  (cf le paragraphe 11.4.1) :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

La méthode aboutit si le vecteur directeur trouvé n'est pas nul. Dans le cas contraire on a  $\vec{n} // \vec{n}'$  et les plans sont parallèles ou confondus. On en déduit

**Proposition 11.4.3.** *Le système*

$$(S) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

*représente une droite si et seulement si  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  ne sont pas proportionnels. C'est à dire*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

*Preuve :* elle sera faite dans la section suivante.

**Attention :** dans un plan, une droite est définie par deux équations paramétriques avec **un** paramètre ou par **une** équation cartésienne.

Dans l'espace, une droite est définie par **trois** équations paramétriques avec **un** paramètre ou par **deux** équations cartésiennes.

Dans l'espace, un plan est défini par trois équations paramétriques avec **deux** paramètres ou par **une** équation cartésienne.

### 11.4.3 Intersections : plans et droites

#### Intersection de deux plans

**Proposition 11.4.4.** Soient  $P$  un plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  et  $P'$  un plan d'équation  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ , alors :

- si  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  ne sont pas proportionnels, i.e. si  $\vec{N} = \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ , alors

$P \cap P'$  est une droite  $D$  dirigée par  $\vec{N}$  et admettant comme système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

- si  $(a, b, c, d)$  et  $(a', b', c', d')$  sont proportionnels, les deux plans sont confondus :  $P \cap P' = P = P'$ ,
- si  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  sont proportionnels et si  $(a, b, c, d)$  et  $(a', b', c', d')$  ne sont pas proportionnels, on a  $P \cap P' = \emptyset$  : les plans sont strictement parallèles.

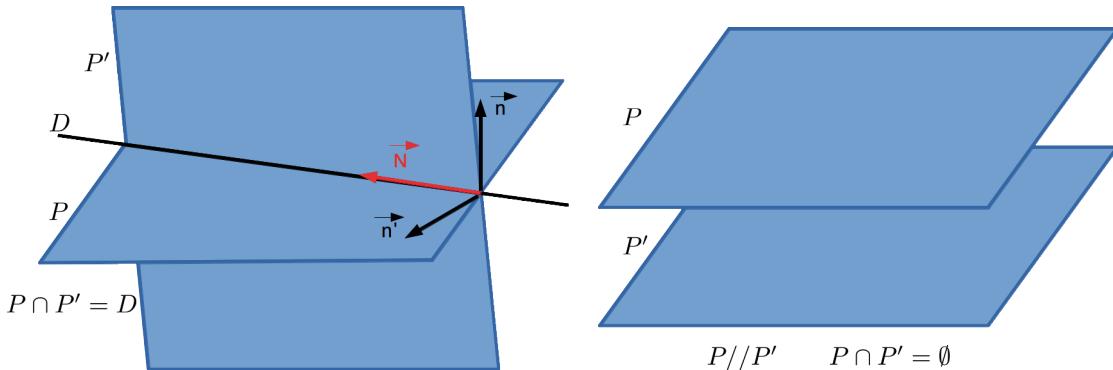


FIGURE 11.6 – Intersection de deux plans

**Preuve :** si  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  ne sont pas proportionnels, un des déterminants  $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$ , ou  $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$  est différent de 0. Si par exemple  $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$ , on écrit que le système est équivalent à

$$\begin{cases} ax + cz = -by - d \\ a'x + c'z = -b'y - d' \end{cases}$$

On a vu (chapitre 9) qu'alors on peut exprimer  $(x, y)$  en fonction de  $z$  qui joue le rôle de paramètre. On vérifie ainsi qu'il y a une infinité de solutions dépendant d'un paramètre : c'est une droite. Si  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  sont proportionnels, il existe  $k \neq 0$  tel que  $a' = ka$ ,  $b' = kb$ ,  $c' = kc$ , le système d'équation est équivalent à

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ d' - kd = 0 \end{cases} \quad L_2 - kL_1$$

Si  $d' - kd = 0$ , alors  $(a, b, c, d)$  et  $(a', b', c', d')$  sont proportionnels, les deux équations sont équivalentes, les deux plans sont confondus.

Si  $d' - kd \neq 0$ , le système n'a pas de solution, l'intersection des deux plans est vide, les plans sont strictement parallèles. ■

### Intersection d'un plan et d'une droite

Soient  $P$  un plan d'équation  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$  et  $D$  une droite ayant pour système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Un point  $M(x, y, z)$  est commun à  $P$  et à  $D$  s'il vérifie le système de trois équations linéaires à trois inconnues

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{cases}$$

les deux dernières n'étant pas équivalentes.

**On résoudra ce système par la méthode de Gauss.**

On sait (cf chapitre 9) qu'un tel système a soit une unique solution, soit aucune soit une infinité dépendant d'un paramètre, on retrouve ainsi que :

**Dans l'espace, l'intersection d'un plan et d'une droite est soit**

- un point : la droite et le plan sont sécants,
- la droite elle-même : la droite est incluse dans le plan,
- l'ensemble vide : la droite et le plan sont strictement parallèles.

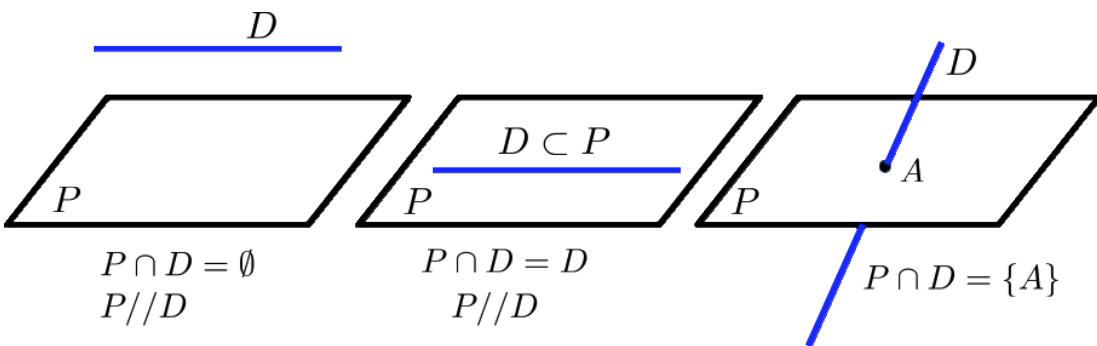


FIGURE 11.7 – Intersection d'une droite et d'un plan

On dispose d'un critère simple pour savoir si une droite et un plan sont sécants, sans nécessairement trouver le point d'intersection :

**Proposition 11.4.5.** *Avec les notations précédentes, le plan et de la droite sont sécants si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$$

**Preuve :** on sait qu'un vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite est donné par  $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$  avec  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et

$\vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ . Soient  $\vec{N} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  un vecteur normal au plan,  $A$  un point de la droite,  $B$  un point du plan.

$$M \in P \cap D \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{BM} \cdot \vec{N} = 0.$$

En écrivant  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$  on en déduit :

$$M \in P \cap D \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{BA} \cdot \vec{N} + \alpha \vec{u} \cdot \vec{N} = 0.$$

L'existence et l'unicité de  $M$  équivaut à l'existence et l'unicité de  $\alpha$ , ce qui est réalisé si et seulement si le coefficient de  $\alpha$ , c'est à dire  $\vec{u} \cdot \vec{N}$ , est non nul. Ce coefficient est le produit mixte  $[\vec{N}, \vec{n}, \vec{n}']$ , il

est donc égal au déterminant  $\begin{vmatrix} \alpha & a & a' \\ \beta & b & b' \\ \gamma & c & c' \end{vmatrix}$ . ■

On en déduit un résultat important :

**Proposition 11.4.6.** *Une matrice  $A$  de taille  $3 \times 3$  est inversible si et seulement si  $\det A \neq 0$ .*

**Preuve :** on sait qu'une matrice  $A$  est inversible si et seulement si le système linéaire  $AX = B$  admet une et une seule solution pour tout second membre  $B$ . Il suffit d'interpréter ce système comme l'intersection d'un plan donné par la première équation et d'une droite donnée par les deux autres.

**Corollaire 11.4.1.** *Un système linéaire  $AX = B$  de taille  $3 \times 3$  admet une solution unique si et seulement si  $\det A \neq 0$ .*

### Intersection de deux droites dans l'espace

Deux droites de l'espace  $D$  et  $D'$  ne se coupent pas en général. En effet :

**Proposition 11.4.7.** *Si deux droites de l'espace sont sécantes, elles sont coplanaires.*

**Preuve :** soient  $A = D \cap D'$ ,  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $D$ ,  $\vec{v}$  un vecteur directeur de  $D'$ , il est immédiat que  $D$  et  $D'$  sont dans le plan  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ . ■

Il existe un critère simple pour savoir si deux droites sont coplanaires.

**Proposition 11.4.8.** *Soient  $D(A, \vec{u})$  et  $D'(A', \vec{v})$  deux droites de l'espace. Alors  $D$  et  $D'$  sont coplanaires si et seulement si  $[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$*

**Preuve :** si les droites sont coplanaires alors les vecteurs  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le sont et donc leur produit mixte est nul. Réciproquement supposons que  $[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$ . Si  $\vec{u} // \vec{v}$  les droites sont parallèles donc coplanaires, sinon on considère le plan  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ . Ce plan contient évidemment la droite  $D(A, \vec{u})$  et on veut montrer qu'il contient aussi  $D'(A', \vec{v})$ .

Soit donc  $M \in D'$  :  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{A'M} = \lambda \vec{v}$  et on a :

$$[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{v}] = [\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A'M}, \vec{u}, \vec{v}] = [\overrightarrow{AM} - \lambda \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$$

ce qui prouve que  $M \in D'$  et ainsi on a  $D' \subset P$ . Les deux droites sont dans  $P$  donc coplanaires. ■

Si les droites sont coplanaires, il y a deux cas de figures : si  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  les droites sont dites **parallèles**, sinon, elles sont séantes et ont un et un seul point d'intersection.

**Exemple 1** soient  $D$  donnée par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

et  $D'$  donnée par

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$D$  et  $D'$  sont-elles sécantes ?

On est conduit à considérer le système de 4 équations linéaires à 3 inconnues

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

qu'on résout par la méthode de Gauss

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + 1 = 0 \\ -3y + z - 1 = 0 \quad L_2 - 2L_1 \\ -3y + 2z = 0 \quad L_3 - L_1 \\ -2y + z - 2 = 0 \quad L_4 - L_1 \end{array} \right.$$

permutation de  $y$  et  $z$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z + z + 1 = 0 \\ z + -3y - 1 = 0 \\ 2z + -3y = 0 \\ z + -2y - 2 = 0 \end{array} \right.$$

élimination de  $z$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z + z + 1 = 0 \\ z + -3y - 1 = 0 \\ -3y + 2 = 0 \quad L_3 - 2L_2 \\ y - 3 = 0 \quad L_4 - L_2 \end{array} \right.$$

Les deux dernières équations sont incompatibles :  $D$  et  $D'$  ne se coupent pas.

L'utilisation du produit mixte nécessite de

1. Calculer les coordonnées d'un point  $A$  de  $D$  et d'un point  $A'$  de  $D'$
2. Calculer les vecteurs directeurs de  $D$  et  $D'$
3. Calculer le produit mixte.

et peut s'avérer plus longue que l'approche directe qu'on vient de voir :

1. on trouve facilement  $A(0, -1, 0) \in D$ ,  $A'(5, 3, 0) \in D'$  et donc  $\overrightarrow{AA'} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. coordonnées d'un vecteur directeur de  $D$  :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. coordonnées d'un vecteur directeur de  $D'$  :  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Calcul du produit mixte :  $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -33.$

**Conclusion :** le produit mixte est différent de 0, les droites ne se coupent pas.

## Exemple 2

Soient  $D(A, \vec{u})$  avec  $A(1, 2, 1)$ ,  $\vec{u}(1, 2, -3)$  et  $D'(B, \vec{v})$  avec  $B(1, -1, 2)$ ,  $\vec{v}(2, -2, 1)$ ,  $D$  et  $D'$  sont-elles sécantes ?

On a

$$M(x, y, z) \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 1 - 3\alpha \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \in D(B, \vec{v}) \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 2\beta \\ y = -1 - 2\beta \\ z = 2 + \beta \end{cases}$$

On en déduit que  $sM \in D \cap D'$  si et seulement si il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$\begin{cases} 1 + \alpha = 1 + 2\beta \\ 2 + 2\alpha = -1 - 2\beta \\ 1 - 3\alpha = 2 + \beta \end{cases}$$

qui est un système de 3 équations linéaires à 2 inconnues :

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 2\alpha + 2\beta = -3 \\ 3\alpha - \beta = 2 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 6\beta = -5 \quad L_2 - 2L_1 \\ 5\beta = -1 \quad L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont incompatibles :  $D$  et  $D'$  ne se coupent pas.

L'utilisation du produit mixte est ici plus rapide.

On calcule  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  : les droites ne sont pas parallèles. On calcule

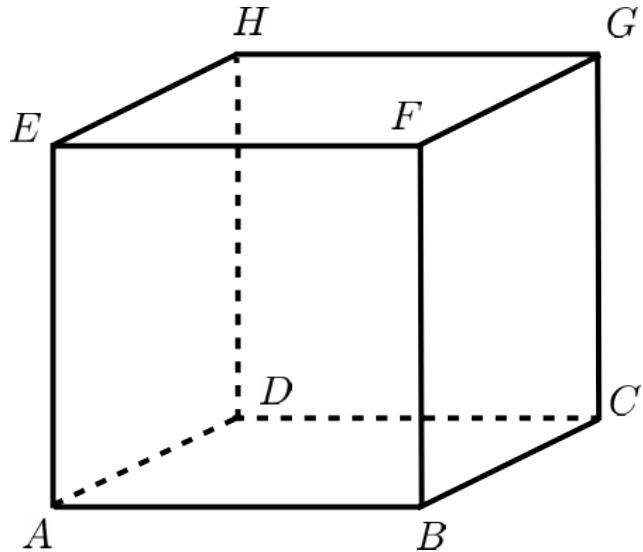
alors  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et le produit mixte  $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-7) + 1 \cdot (-6) = 15 \neq 0$  : les droites ne sont pas coplanaires, donc pas concourantes.

### 11.4.4 Droites et plans : orthogonalité et perpendicularité

Il y a souvent une certaine confusion entre les notions d'orthogonalité et de perpendicularité. On se propose de les préciser et de donner des critères. On pourra aussi consulter :

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Perpendicularit%C3%A9>

Nous commençons par des exemples puis nous énonçons les définitions et les critères pratiques.



- Les droites  $(AB)$  et  $(BC)$  sont orthogonales et perpendiculaires en  $B$ .
- Les droites  $(AB)$  et  $(FG)$  sont orthogonales mais ne sont pas perpendiculaires.
- La droite  $(AB)$  et le plan  $(CFG)$  sont perpendiculaires en  $B$ . Ils sont orthogonaux.
- Les plans  $(ABC)$  (le sol) et  $(ABF)$  (un mur) sont perpendiculaires, d'intersection la droite  $(AB)$ .
- Les plans  $(ABC)$  (le sol) et  $(BDF)$  sont perpendiculaires, d'intersection la droite  $(BD)$ .

**Définition 11.4.1.** Deux sous ensembles de vecteurs de l'espace qui sont des directions de plans ou de droites sont dits orthogonaux si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre.

**Définition 11.4.2.** Deux droites  $D$  et  $D'$  de l'espace sont orthogonales ( $D \perp D'$ ) si elles forment un angle droit :  $(\widehat{D, D'}) = \frac{\pi}{2}$ .

En particulier  $D(A, \vec{u})$  et  $D'(B, \vec{u}')$  sont orthogonales si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ . En fait :

**Proposition 11.4.9.** *Deux droites  $D$  et  $D'$  de l'espace sont orthogonales si et seulement si leurs directions  $\vec{D}$  et  $\vec{D}'$  sont orthogonales.*

**Définition 11.4.3.** Deux droites  $D$  et  $D'$  de l'espace sont perpendiculaires si elles sont **sécantes et orthogonales** :  $D \cap D' \neq \emptyset$  et  $D \perp D'$ . Si alors  $D \cap D' = \{A\}$  on dit que  $D$  et  $D'$  sont perpendiculaires en  $A$ .

Dans le cas d'une droite et d'un plan les deux notions coïncident car une droite qui n'est pas parallèle à un plan est toujours sécante à ce plan.

**Définition 11.4.4.** Une droite  $D$  et un plan  $P$  sont perpendiculaires (ou orthogonales) si  $D$  est orthogonale à deux droites sécantes de  $P$

**Proposition 11.4.10.** *Une droite  $D$  et un plan  $P$  sont perpendiculaires si et seulement si leurs directions  $\vec{D}$  et  $\vec{P}$  sont orthogonales.*

On a un critère très simple :

**Proposition 11.4.11.** *Une droite  $D$  dirigée par  $\vec{u}$  et un plan  $P$  sont perpendiculaires si et seulement si  $\vec{u}$  est un vecteur normal à  $\vec{P}$ .*

**Définition 11.4.5.** Un plan  $P$  est perpendiculaire à un plan  $P'$  s'il contient une droite perpendiculaire à  $P'$ . On démontre que cette relation est symétrique (i.e. on peut énoncer les plans dans un ordre quelconque). On écrit  $P \perp P'$ .

**Attention :** les directions de deux plans perpendiculaires ne sont pas orthogonales car il est faux que tout vecteur de  $\vec{P}$  est orthogonal à tout vecteur de  $\vec{P}'$  : un vecteur directeur de la droite d'intersection n'est pas orthogonal à lui-même !

On a le critère pratique suivant :

**Proposition 11.4.12.** *Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leur vecteurs normaux sont orthogonaux.*

Citons Wikipedia pour finir (on pourra faire des figures pour illustrer) :

« Il faut se méfier de la notion de plans perpendiculaires. Par exemple : deux plans perpendiculaires peuvent contenir des droites parallèles, deux plans perpendiculaires à un troisième ne sont pas forcément parallèles (voir les faces du cube). Il reste cependant quelques propriétés :

Si deux plans sont perpendiculaires, un plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre  
Si deux plans sont parallèles, un plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre. »

## 11.5 Calculs de distances

On va examiner trois types de problèmes : calcul de la distance d'un point à un plan, d'un point à une droite et entre deux droites.

### 11.5.1 Distance d'un point à un plan

Soient  $A(x_A, y_A, z_A)$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $P$  un plan. Soit  $H$  la projection orthogonale de  $A$  sur  $P$  : on déduit facilement du théorème de Pythagore que la plus courte distance entre  $A$  et un point quelconque de  $P$  est  $\|\overrightarrow{AH}\|$ . C'est la distance de  $A$  au plan  $P$ , on la note  $d(A, P)$ . Pour la calculer, on distinguera les cas où le plan est donnée par une équation cartésienne et celui où il est défini par un point et deux vecteurs directeurs.

**Proposition 11.5.1.** *Soient  $P$  un plan de l'espace et  $A(x_A, y_A, z_A)$  un point.*

- *si le plan est défini par une équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$ , alors la distance de  $A$  au plan  $P$  est donnée par :*

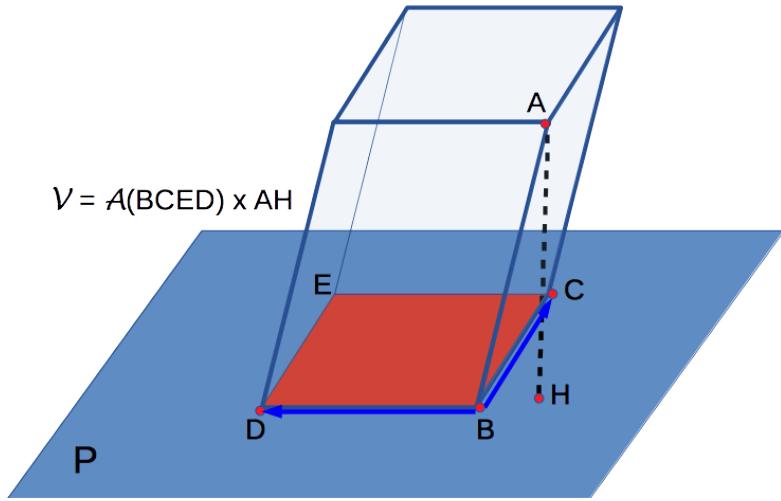
$$d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- *si le plan est défini par un point  $B$  et un couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  de vecteurs non colinéaires, ou encore par trois points non alignés  $(B, C, D)$ , alors la distance de  $A$  au plan  $P$  est donnée par :*

$$d(A, P) = \frac{\|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]\|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{\|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]\|}{\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\|}$$

**Preuve :** le cas d'une équation cartésienne s'établit comme pour la distance d'un point à une droite en géométrie plane (formule 10.3.5), avec une coordonnée de plus. Le détail est laissé en exercice.

Lorsque le plan est défini par la donnée d'un point  $B$  et d'un couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  de vecteurs non colinéaires, ou encore par trois points non alignés  $(B, C, D)$ , on peut interpréter la distance  $d(A, P)$  comme la hauteur du parallélépipède construit sur les vecteurs  $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{BA})$  (ou  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ ) au dessus du parallélogramme de base construit sur  $(\vec{u}, \vec{v})$  (ou  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ ) dont l'aire est  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ .



On a donc :

$$d(A, P) = AH = \frac{V}{A} = \frac{|\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}|}{\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\|}$$

■

### 11.5.2 Distance d'un point à une droite

Cette notion de distance est la même qu'au chapitre 10, d'ailleurs une droite et un point sont toujours dans un même plan.

**Proposition 11.5.2.** Soient  $A(x_A, y_A, z_A)$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $D(B, \vec{u})$  une droite. La distance de  $A$  à  $D$  est donnée par :

$$d(A, D) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

**Preuve :** on se place dans le plan défini par  $A$ ,  $B$  et  $\vec{u}$ , on peut alors construire  $H$  la projection orthogonale de  $A$  sur  $D$  (voir la figure 11.8 ci-dessous). La distance de  $A$  à  $D$ , c'est à dire la plus petite distance de  $A$  à un point de  $D$  est donnée par  $d(A, D) = \|\overrightarrow{AH}\|$  (garanti par Pythagore). Soit  $C$  le point de  $D$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$  : l'aire du triangle  $ABC$  est donnée par  $A(ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AH}\| \|\overrightarrow{BC}\|$ . Le résultat s'en suit immédiatement. ■

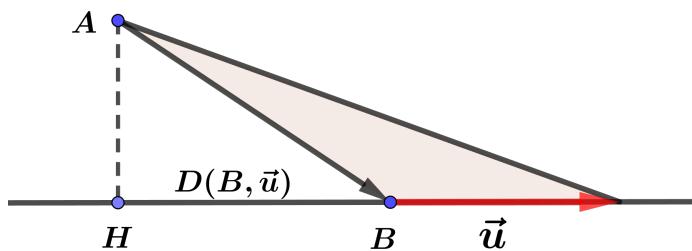


FIGURE 11.8 – Distance d'un point à une droite de l'espace

**Exemple :** calculer la distance du point  $A(1, -1, 2)$  à la droite  $D$  d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

On calcule un vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $D$  :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule les coordonnées d'un point  $B$  de  $D$  en faisant  $x = 0$  par exemple et en calculant  $(y, z)$ , on trouve  $y = 0$ ,  $z = -1$  donc  $B(0, 0, -1)$ . On a alors  $\overrightarrow{AB}(-1, 1, -3)$ , on calcule alors

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

On a

$$d(A, D) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{10^2 + 5^2 + 5^2}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{15}} = \sqrt{10}.$$

○

### 11.5.3 Distance entre deux droites

Soient  $D(A, \vec{u})$  et  $D'(A', \vec{u}')$  deux droites de l'espace :

- si  $D//D'$ , ce qui équivaut à  $\vec{u} // \vec{u}'$ , la distance d'un point de  $D$  à  $D'$  ne dépend pas du point considéré, c'est par définition aussi la distance de  $D$  à  $D'$ , elle est donnée par la formule de la proposition 11.5.2 :

$$d(D, D') = \frac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}'\|}{\|\vec{u}'\|} \quad (11.6)$$

- si les deux droites sont sécantes, alors  $d(D, D') = 0$ .
- si on est dans le cas général de droites non coplanaires, on définit alors la distance entre  $D$  et  $D'$  comme la plus petite distance entre un point de  $D$  et un point de  $D'$ . C'est l'objet de la proposition qui suit.

**Proposition 11.5.3.** Soient  $D(A, \vec{u})$  et  $D'(A', \vec{u}')$  deux droites **non coplanaires** de l'espace. La distance entre ces droites est donnée par :

$$d(D, D') = \frac{|[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}']|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|} \quad (11.7)$$

**Preuve :** grâce au théorème de Pythagore, on montre que la distance est atteinte pour  $H \in D$  et  $H' \in D'$  tels que  $\overrightarrow{HH'} \perp D$  et  $\overrightarrow{HH'} \perp D'$  (voir la figure 11.9). On a donc  $\overrightarrow{HH'} // (\vec{u} \wedge \vec{u}')$  d'où, en posant  $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|} \vec{u} \wedge \vec{u}'$

$$d(D, D') = \|\overrightarrow{HH'}\| = |\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{n}|$$

mais le projeté orthogonal du vecteur  $\overrightarrow{AA'}$  sur  $\text{Vect}(\vec{n})$  est  $\overrightarrow{HH'}$ , donc  $\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{n}$  et la formule s'en suit. ■

**Remarque 11.5.1.** Cette dernière formule donne aussi le résultat correct (distance nulle) quand les droites sont sécantes.

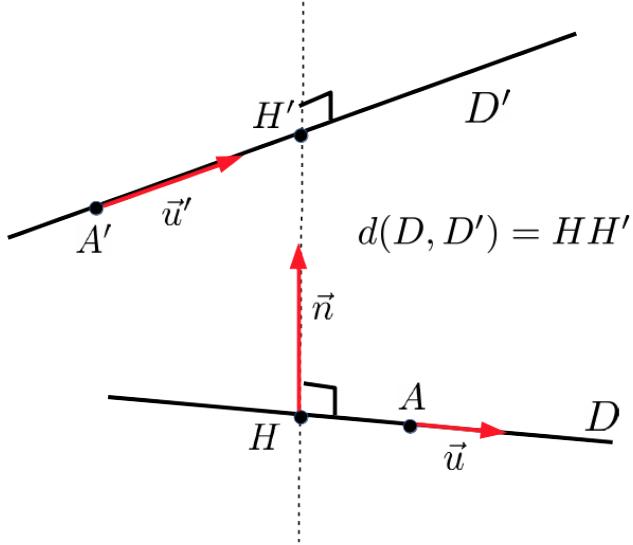


FIGURE 11.9 – Perpendiculaire commune et distance entre deux droites

**Exemple :**

soient  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(-1, 1, 2)$ ,  $C(1, 1, 1)$  et  $D(-2, 1, 4)$ , calculer la distance de la droite  $(AB)$  à la droite  $(CD)$ .

On applique le résultat avec  $D(A, \overrightarrow{AB})$  et  $D'(C, \overrightarrow{CD})$ . On calcule  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  les vecteurs directeurs des deux droites, puis  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$  qui n'est pas nul, les droites ne sont donc pas parallèles. On calcule alors  $\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 6^2} = 9$ , puis  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et enfin  $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = 0 \cdot (-6) + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot (-6) = -15$ . On trouve donc

$$d((AB), (CD)) = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

## 11.6 Translations, Homothéties, Projections, Symétries.

### 11.6.1 Introduction

On peut reprendre intégralement l'introduction 10.5.1 en remplaçant  $\mathcal{P}$  par  $\mathcal{E}$  et  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$  par  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ .

### 11.6.2 Les translations

Elle est définie comme dans le plan : la translation de vecteur  $\vec{a}$  est la transformation  $t_{\vec{a}}$  de  $\mathcal{E}$  qui, à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{a}.$$

Si  $\vec{a}$  a pour coordonnées  $(x_a, y_a, z_a)$  et  $M$  pour coordonnées  $(x, y, z)$  dans un repère, alors les coordonnées de  $M'$  sont

$$\begin{cases} x' = x + x_a \\ y' = y + y_a \\ z' = z + z_a \end{cases}$$

- **Propriétés des translations :** en plus des propriétés qu'on a donné dans le chapitre 10, on a

1. L'image par une translation d'un plan est le plan lui-même si les vecteurs directeurs du plan et le vecteur de la translation sont coplanaires.
2. L'image par une translation d'un plan est un plan parallèle si les vecteurs directeurs du plan et le vecteur de la translation ne sont pas coplanaires.

L'application vectorielle associée à la translation est l'identité, la démonstration est la même que dans le plan.

### 11.6.3 Les homothétries

Soit  $\Omega$  un point du plan et  $k$  un réel non nul. Comme dans le plan, l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$  la transformation  $h(\Omega, k)$  de  $\mathcal{E}$  qui, à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

Si  $\Omega$  a pour coordonnées  $(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$  et  $M$  a pour coordonnées  $(x, y, z)$ , alors les coordonnées  $(x', y', z')$  de  $M'$  vérifient :

$$\begin{cases} x' = x_\omega + k(x - x_\omega) \\ y' = y_\omega + k(y - y_\omega) \\ z' = z_\omega + k(z - z_\omega) \end{cases}$$

- **Propriétés des homothétries :** comme pour la translation, il faut ajouter aux propriétés déjà vues

1. L'image d'un plan passant par le centre de l'homothétie est le plan lui-même.
2. L'image d'un plan ne passant pas par le centre de l'homothétie est un plan parallèle.

L'homothétie vectorielle, associée à  $h(\Omega, k)$ , est la transformation linéaire  $\vec{u} \rightarrow k \vec{u}$  donnée par :

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à l'homothétie vectorielle est  $k I_3$ .

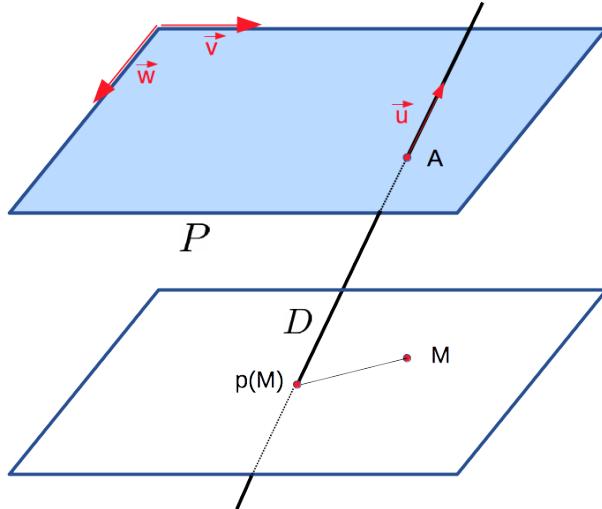
### 11.6.4 Les projections et les symétries

On va maintenant projeter sur une droite suivant la direction d'un plan ou projeter sur un plan suivant la direction d'une droite. Idem pour les symétries.

## Projection sur une droite parallèlement à un plan

**Définition 11.6.1.** Soient une droite  $D(A, \vec{u})$  et  $\vec{P}$  un plan vectoriel de vecteurs directeurs  $\vec{v}, \vec{w}$  tels que  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  ne sont pas coplanaires. On appelle **projection sur  $D$  parallèlement à  $\vec{P}$**  l'application  $p$  de l'espace dans lui-même qui à tout point  $M$  associe le point  $p(M)$  tel que

- $p(M) \in D$ ,
- $\overrightarrow{Mp(M)} \in \vec{P}$



Pour trouver les coordonnées  $(x', y', z')$  de  $p(M)$  en fonction de celles de  $M(x, y, z)$ , on calcule l'intersection du plan  $P(M, \vec{v}, \vec{w})$  avec la droite  $D$ . Cette intersection est un point car  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  ne sont pas coplanaires.

## Symétrie par rapport à une droite parallèlement à un plan

**Définition 11.6.2.** On appelle **symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $\vec{P}$**  l'application  $s$  de l'espace dans lui-même qui à tout point  $M$  associe le point  $s(M)$  tel que

- le milieu  $I$  du segment  $[M, s(M)]$  appartient à  $D$  ( $I = p(M)$ ),
- $\overrightarrow{Ms(M)} \in \vec{P}$

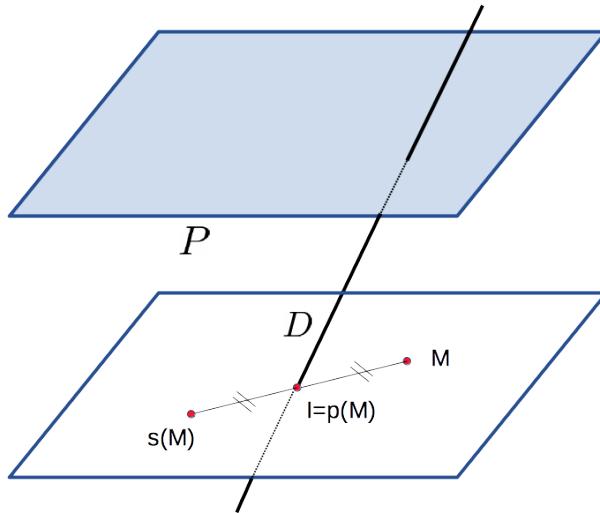


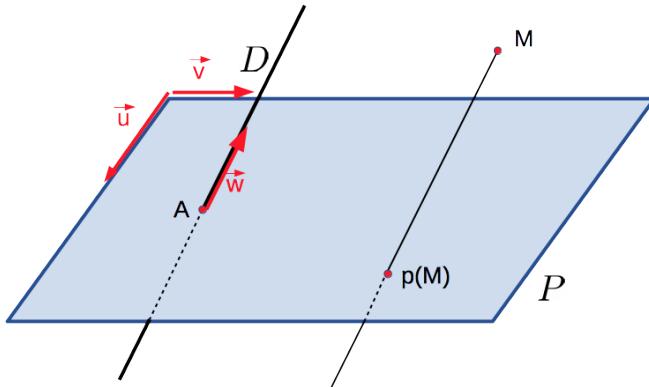
FIGURE 11.10 – Projections et symétries par rapport à une droite parallèlement à un plan

Pour trouver  $s(M)(x', y', z')$ , on écrit les deux équations qui expriment que  $I(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2})$  est un point de  $d$  et l'équation  $[\overrightarrow{Ms(M)}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$  qui exprime que  $\overrightarrow{Ms(M)}, \vec{u}, \vec{v}$  sont coplanaires : on a un système de trois équations à trois inconnues.

### Projection sur un plan parallèlement à une droite

**Définition 11.6.3.** Soient un plan  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$  et  $\vec{D}(\vec{w})$  la direction d'une droite tels que  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  ne sont pas coplanaires. On appelle **projection sur  $P$  parallèlement à  $\vec{D}$**  l'application  $p$  de l'espace dans lui-même qui à tout point  $M$  associe le point  $p(M)$  tel que

- $p(M) \in P$ ,
- $Mp(M) \in \vec{D}$



Pour trouver les coordonnées  $(x', y', z')$  de  $p(M)$  en fonction de celles de  $M(x, y, z)$ , on calcule l'intersection du plan  $P(A, \vec{v}, \vec{w})$  avec la droite  $D(M, \vec{w})$  : c'est un point car  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  ne sont pas coplanaires.

### Symétrie par rapport à un plan parallèlement à une droite

**Définition 11.6.4.** On appelle **symétrie par rapport à  $P$  parallèlement à  $\vec{D}$**  l'application  $s$  de l'espace dans lui-même qui à tout point  $M$  associe le point  $s(M)$  tel que

- le milieu  $I$  du segment  $[M, s(M)]$  appartient à  $P$  ( $I = p(M)$ ),
- $\overrightarrow{Ms(M)} \in \vec{D}$

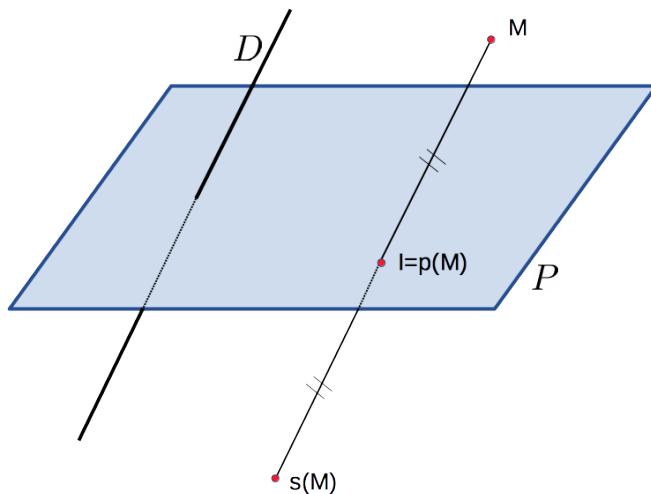


FIGURE 11.11 – Projections et symétries par rapport à un plan parallèlement à une droite

Pour trouver  $s(M)(x', y', z')$ , on écrit l'équation cartésienne qui exprime que  $I\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$  est un point de  $P$  et la relation  $\overrightarrow{Ms(M)} = \alpha \vec{w}$ . On a un système de quatre équations à quatre inconnues  $(x', y', z', \alpha)$  à résoudre.

- **Projections et symétries orthogonales :**

Ces transformations sont dites orthogonales si la droite et le plan qui les définissent sont orthogonaux.

- **Propriétés des projections et des symétries :**

1. Une projection est caractérisée par le fait que  $p \circ p = p$ . La droite ou le plan sur lequel on projette est l'ensemble des points invariants.
2. Une symétrie est caractérisée par le fait que  $s \circ s = Id$ . La droite ou le plan par rapport auquel on fait la symétrie est l'ensemble des points invariants.
3. L'image d'une droite ou d'un plan par une symétrie est une droite ou un plan.
4. Une symétrie orthogonale conserve la distance entre deux points, change les angles en leurs opposés et transforme une droite en une autre droite, un cercle en un autre cercle.

### Exemple

Soient  $A(1, 2, 3)$  et  $B(-1, 3, 1)$ ,  $C(2, 1, 3)$ ,  $D(4, 1, -2)$ . Calculer les coordonnées de  $D'$  symétrique orthogonal de  $D$  par rapport au plan  $(ABC)$ .

Soit  $(x', y', z')$  les coordonnées de  $D'$ . On a une symétrie orthogonale par rapport au plan  $(ABC)$ , la direction de la symétrie est donc donnée par  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ , on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on en déduit

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $\overrightarrow{DD'}/\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  s'écrit :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x' = 4 - 2k \\ y' = 1 + k \\ z' = -2 - 2k \end{cases}$$

Le milieu  $I$  de  $(D, D')$  a pour coordonnées  $\left(\frac{4+x'}{2}, \frac{1+y'}{2}, \frac{-2+z'}{2}\right)$ .

$I \in (ABC)$  s'écrit  $\overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$ .

On a  $\overrightarrow{AI}\left(\frac{x'}{2} + 1, \frac{y'}{2} - \frac{3}{2}, \frac{z'}{2} - 4\right)$  et on obtient finalement, après calcul :

$$-x' - y' + z', 2 - 3 = 0.$$

On a à résoudre

$$\begin{cases} x' = 4 - 2k \\ y' = 1 + k \\ z' = -2 - 2k \\ -x' - y' + z', 2 - 3 = 0 \end{cases}$$

On calcule  $k$  avec la dernière ligne  $-4 + 2k - 1 - k - 1 + k - 3 = 0$  soit  $2k = 9$  et on obtient les coordonnées de  $D'$  :

$$\begin{cases} x' = -5 \\ y' = \frac{11}{2} \\ z' = -11 \end{cases}$$

d'où  $D'(-5, 11, 2, -11)$ .