Licence L3 Sciences et Technologies TRI et ESET
Bases des Mathématiques pour l'ingénieur
Année 2016/2017

Examen ETRS 502 session 1

EXERCICE 1 :

1. Déterminer A et B tels que $\dfrac{1}{t^2+t}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{1+t}$
2. Utiliser le résultat ci-dessus pour calculer l'intégrale suivante : $I=\displaystyle\int_0^X \frac{1}{1+e^u}\,du$
3. Donner la valeur limite de l'intégrale I lorsque: $X \to \infty$

EXERCICE 2 :

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale: $J=\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$

EXERCICE 3 :

1. Calculer $K=\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (on pensera à $\cos^2 u+\sin^2 u=1$)

EXERCICE 4 : *On rappelle que $j^2=-1$*

1. Mettre $1+j\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle.
2. A quelle condition sur n, le nombre $\left(1+j\sqrt{3}\right)^n$ est-il un nombre purement réel ?
3. A quelle condition sur n, le nombre $\left(1+j\sqrt{3}\right)^n$ est-il un nombre purement réel et positif ?

EXERCICE 5 : *On rappelle que $j^2=-1$*

1. Vérifier que j est une racine de $x^2+x-j+1=0$, en déduire la seconde racine de cette équation.
2. Chercher les nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 qui vérifient l'équation $z^4=j$.
3. Tracer z_1, z_2, z_3 et z_4 dans le plan complexe.
4. Chercher les nombres complexes z_5, z_6, z_7 et z_8 qui vérifient l'équation $z^4=-1-j$.
5. Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation $jz^8+jz^4+1+j=0$

EXERCICE 6 :

1. Donner le développement limité de $\cos(x)\ln(\cancel{x})$ à l'ordre 4 autour de $x=0$.

$\ln(1+x)$

EXERCICE 7 :

1. En utilisant le développement limité de e^x, écrire à l'ordre 3 le développement limité autour de $x=0$ de la fonction f, définie par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.
2. En déduire que l'on peut approximer f par une droite D d'équation $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}$.
3. Expliquer (justifier) pourquoi la fonction f coupe (ou croise) la droite D.
4. Pour quelle valeur de x l'approximation de f(x) par la droite D donne-t-elle une erreur de 10 % ?

On rappelle les résultats suivants

$$\sin(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+3}\varepsilon(x)$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\exp(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

$$avec\quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

Formulaire : primitives usuelles

Forme de f	Forme de $\int f$	Forme de f	Forme de $\int f$	Forme de f	Forme de $\int f$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a}\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}$	$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{1}{x^n}(n\neq 1)$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\frac{1}{(ax+b)^n}(n\neq 1)$	$\frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$	$\frac{u'}{u^n}(n\neq 1)$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$	$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$x^\alpha(\alpha\neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$(ax+b)^\alpha(\alpha\neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{a}(ax+b)^{\alpha+1}$	$u'u^\alpha(\alpha\neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$
e^x	e^x	e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$u'e^u$	e^u
$\cos x$	$\sin x$	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotan}\, x$
$\tan x\,(=\frac{\sin x}{\cos x})$	$-\ln(\cos x)$	$\mathrm{cotan}\, x\,(=\frac{\cos x}{\sin x})$	$\ln(\sin x)$	$a^x\,(=e^{x\ln a})$	$\frac{1}{\ln a}a^x$