L1 MPC **2017–2018**

Olivier Le Gal

Intégration

1. Aires

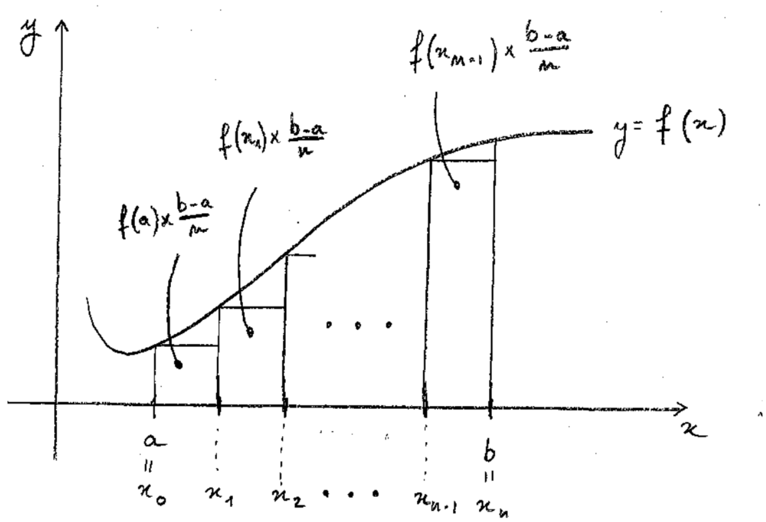
On se donne une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. La problématique est la suivante : déterminer la valeur de l'aire A de la surface qui se trouve entre l'axe des abscisses et le graphe de f, entre a et b. L'idée est la suivante : on va

(1) subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en petits intervalles de taille $\frac{b-a}{n}$,

(2) approximer f par une fonction constante sur chacun de ces petits intervalles,

(3) calculer l'aire A_n qui se trouve sous l'approximation de f que l'on a construite.

Si la subdivision de $[a, b]$ est choisie suffisement fine, c'est à dire si n est choisi suffisement grand, on espère que A_n sera une bonne approximation de l'aire A cherchée. Pour obtenir A, on prendra alors la limite, quand n tend vers l'infini, de A_n.



Formellement, on fixe un entier n, et on définit, pour tout $k \leq n$, $x_k = a + \frac{b-a}{n}$. On construit alors la fonction $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f_n(x) = f(x_k) \text{ si } x_k \leq x < x_{k+1}$$

La fonction f_n est constante sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$. La surface comprise entre le graphe de f_n et l'axe des abcisses, entre x_k et x_{k+1}, est un rectangle dont l'aire est $\frac{b-a}{n} f_n(x_k)$. L'aire A_n de la surface qui se trouve entre l'axe des abscisses et le graphe de f_n, entre les verticales $x = a$ et $x = b$ est la somme des aires des n petits rectangles. Elle vaut :

$$A_n = f(x_0)\frac{b-a}{n} + f(x_1)\frac{b-a}{n} + f(x_2)\frac{b-a}{n} + \cdots + f(x_{n-1})\frac{b-a}{n},$$

c'est à dire, en notant δx la taille de la subdivision ($\delta x = \frac{b-a}{n}$) :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\delta x$$

Théorème 1 (et **Définition**)**.** Avec les notations et hypothèses précédentes, la limite quand n tend vers l'infini de $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\delta x$ existe. On appelle **intégrale de f entre a et b** la valeur de cette limite, et on la note

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Géométriquement, l'intégrale de f entre a et b correspond à l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, le graphe de f, et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, où l'aire se trouvant sous l'axe des abscisses est comptée négativement. Les valeurs a et b sont appelées **bornes d'intégration**, et la variable x qui intervient dans l'intégrale est appelée **variable d'intégration**.

2. Fonction aire – Primitives

On s'intéresse à la façon dont varie l'intégrale de f en fonction des bornes d'intégration. Formellement, on définit, pour t entre a et b, la fonction $A(t) = \int_a^t f(x)dx$, qui représente l'aire entre le graphe de f, l'axe des abscisses, la verticale $x = a$ et la verticale $x = t$. En exprimant $A(t+h)$ en fonction de $A(t)$, où h est un petit accroissement, on se rend compte que $A'(t) = f(t)$. La fonction aire $A(t)$ est donc une **primitive** de f. C'est l'idée de base du théorème suivant :

Théorème 2. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f, c'est à dire une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $F'(t) = f(t)$ pour tout t. Alors,*

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

Pour calculer une intégrale, il suffit donc de savoir calculer une primitive. Ce théorème est le théorème fondamental du calcul intégral, c'est celui qu'on utilisera systématiquement. Si f est une fonction continue, les notations $\int f(t)dt$ ou $\int f$ désignent **une primitive** de f. Rappelons qu'une fonction continue admet une infinité de primitives qui diffèrent les unes des autres d'une constante. La notation $\int f$ ne désigne donc une fonction qu'à une constante près.

Voici un tableau de primitives usuelles à connaître, et un tableau de formes à savoir reconnaître. Dans le deuxième tableau, u et g désignent des fonctions, u' désigne la dérivée de u et G la primitive de g. Toutes les formules qui s'y trouvent sont issues de la première. Remarquez la similarité des deux tableaux et le facteur u' dans chacune des formes.

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n (pour $n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln(\|x\|)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$

f	$\int f$
$g(u)u'$	$G(u)$
$u^n u'$ (pour $n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u} = u^{-1}u'$	$\ln(\|u\|)$
$\exp(u)u'$	$\exp(u)$
$\sin(u)u'$	$-\cos(u)$
$\cos(u)u'$	$\sin(u)$
$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$

3. Propriétés – Techniques de calcul

3.1. **Relation de Chasles.** La propriété suivante, évidente pour les aires quand c est entre a et b, est appelée relation de Chasles :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt}$$

Pour qu'elle reste valable indépendement de la position de a, b et c, on est conduit à définir l'intégrale $\int_b^a f(t)dt$ pour $a < b$ comme étant l'opposée de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$:

$$\boxed{\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt}$$

3.2. **Intégration par partie.** De la formule $(uv)' = u'v + uv'$, on tire l'égalité :

$$\boxed{\int u'v = uv - \int uv'}$$

Cette égalité est appelée intégration par partie. On l'utilise en particulier pour calculer les intégrales où interviennent des produits de logarithme et de puissance (en dérivant le ln), ou des produits de polynômes et d'exponentielles ou de fonctions trigonométriques (en dérivant les polynômes).

Un exemple avec logarithme : calcul de $I = \int x^2 \ln(x)dx$

Pour se débarasser du logarithme, on va intégrer par partie, en dérivant $\ln(x)$ et en intégrant x^2. Autrement dit, on pose : $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$.
On a donc $u(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.
L'intégration par partie donne alors :

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \ln(x) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Et finalement, $\boxed{I = \dfrac{x^3}{3} \ln(x) - \dfrac{x^3}{9}}$

Un exemple avec exponentielle : calcul de $J = \displaystyle\int (x^2 - x + 1)e^x dx$

La fonction à intégrer se présente comme le produit d'une exponentielle et d'un polynôme de degré 2. Si l'on intègre par partie en intégrant l'exponentielle et en dérivant le polynôme, on va se retrouver à devoir calculer l'intégrale du produit d'une exponentielle par un polynôme de degré 1. On réintègrera alors par partie, de manière à ce qu'il ne nous reste plus qu'à calculer une primitive du produit d'une exponentielle par une constante, qui ne pose pas de problèmes. On va ainsi faire deux intégrations par partie.

Première intégration par partie : on pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 - x + 1$. On a donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 2x - 1$. L'intégration par partie donne alors :

$$\begin{aligned} J &= \int (x^2 - x + 1)e^x dx \\ &= (x^2 - x + 1)e^x - \int (2x - 1)e^x dx \end{aligned}$$

Deuxième intégration par partie : on pose maintenant $u'(x) = e^x$, et $v(x) = 2x-1$. On a $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 2$. En intégrant par partie, on obtient donc :

$$\begin{aligned} J &= (x^2 - x + 1)e^x - \int (2x - 1)e^x dx \\ &= (x^2 - x + 1)e^x - \left((2x - 1)e^x - \int 2e^x dx \right) \\ &= (x^2 - x + 1)e^x - (2x - 1)e^x + 2e^x \end{aligned}$$

Et finalement, $\boxed{J = (x^2 - 3x + 4)e^x}$

3.3. **Changement de variables.** Il est parfois utile de changer la variable d'intégration. Si l'on pose $x = \varphi(t)$, la formule de changement de variable est la suivante :

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

Les trois points à retenir pour appliquer cette formule :

(1) x est remplacé partout par $\varphi(t)$. S'il reste des x après le changement de variable, il y a un problème.

(2) les bornes changent.

(3) l'élément différentiel dx est remplacé par $\varphi'(t)dt$.

Remarquons que le point (3) est cohérent avec la notation $\dfrac{dx}{dt}$ utilisée en physique pour noter la dérivée de x par rapport à t. Ici, $x = \varphi(t)$, donc $\dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$. En “faisant passer le dt de l'autre coté”, on retrouve bien $dx = \varphi'(t)dt$.

Un exemple d'utilisation : calcul de $K = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(x)^2 + \ln(x))}{x} dx$

On va faire le changement de variable $x = e^t$, c'est à dire $t = \ln(x)$. On tient le raisonnement suivant au brouillon :

(1) Bornes : comme $t = \ln(x)$, lorsque x vaut 1, t vaut $\ln(1) = 0$, et lorsque x vaut e, t vaut $\ln(e) = 1$. Les nouvelles bornes sont donc 0 et 1.

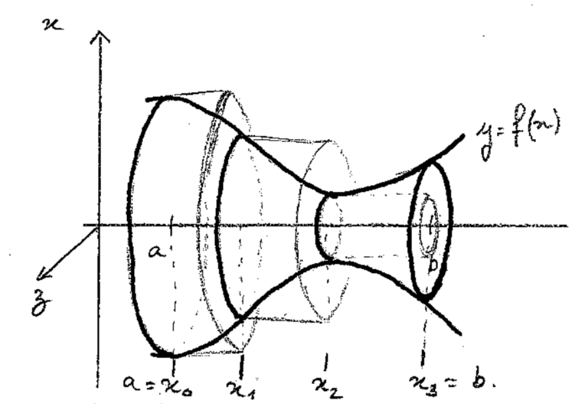
(2) Élément différentiel : comme $x = e^t$, $\frac{dx}{dt} = (e^t)' = e^t$, donc $dx = e^t dt$.

On remplace partout dans l'intégrale x par e^t, les anciennes bornes par les nouvelles, et dx par $e^t dt$:

$$\begin{aligned} K = & \int_1^e \frac{\ln(x)^2 + \ln(x)}{x}\, dx \\ = & \int_0^1 \frac{\ln(e^t)^2 + \ln(e^t)}{e^t} e^t\, dt \\ = & \int_0^1 t^2 + t\, dt \\ = & \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

4. Volumes de solides de révolution

On se donne une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et on veut calculer le volume V du solide obtenu par révolution du graphe de f autour de l'axe des abscisses.



On commence par calculer une approximation de ce volume de la façon suivante.

— On découpe le solide perpendiculairement à l'axe des x en n tranches de taille δx avec $\delta x = (b - a)/n$. L'intervalle $[a, b]$ est ainsi découpé en n morceaux $[x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \ldots, n - 1$ avec $x_i = a + i\delta x$.

— Au dessus de chaque morceau, on va approximer le volume de la tranche par le volume d'un cylindre (noté C_i) de même base que la tranche, c'est à dire un disque de rayon $f(x_i)$.

— L'approximation du volume du solide sera donnée par la somme des volumes des C_i.

Le cylindre C_i a pour base un disque de rayon $f(x_i)$ et pour hauteur δx. Son volume est donc $\pi f(x_i)^2\delta x$ (le produit de la surface de la base par la hauteur). L'approximation que l'on donne de V est donc

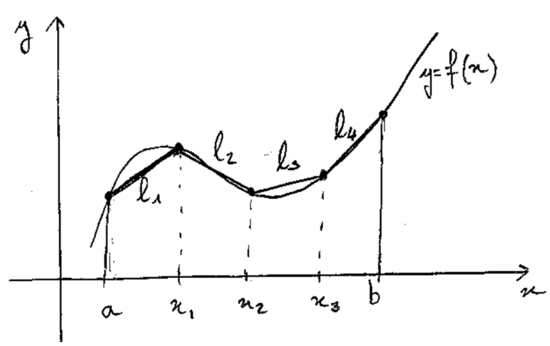
$$V \sim \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)^2 \delta x$$

On reconnaît cette expression : elle ressemble à la somme utilisée pour définir l'intégrale. En particulier, lorsque δx tend vers 0, c'est à dire lorsque le nombre de tranches de notre découpage tend vers l'infini, on sait que cette somme tend vers l'intégrale, entre a et b, de la fonction $x \mapsto \pi f(x)^2$. On vient de trouver l'expression du volume V du solide obtenu par révolution du graphe de f autour de l'axe des abscisses :

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx}$$

5. Longueurs de courbes

On se donne une fonction C^1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et on veut calculer la longueur L de la courbe formée par le graphe de f.



Le principe est le même que pour le volume du paragraphe précédent : on va calculer d'abord une approximation de cette longueur par découpage.

- On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n morceaux $[x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \dots, n-1$ avec $x_i = a + i\delta x$, et $\delta x = (b-a)/n$.
- Au dessus de chaque morceau $[x_i, x_{i+1}]$, on approxime la longueur de la courbe par la longueur l_i de sa corde c_i (c_i est ainsi le segment de droite qui relie les deux extrémités de la courbe au dessus de $[x_i, x_{i+1}]$).
- L'approximation de la longueur L sera donnée par la somme des longueurs l_i.

La longueur l_i de c_i se calcule par le théorème de pythagore. On a $l_i^2 = (\delta x)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2$, d'où

$$l_i = \sqrt{(\delta x)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x} \right)^2} \right) \delta x$$

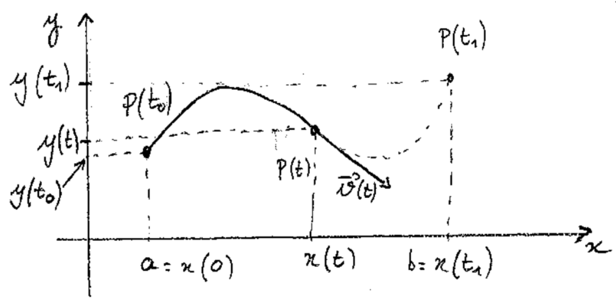
L'approximation que l'on donne de L est donc

$$L \sim \sum_{i=0}^{n-1} l_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x} \right)^2} \right) \delta x$$

Il y a deux choses à remarquer pour tirer de cette approximation l'expression de la longueur exacte de la courbe. La première est que $\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x}$ est le taux d'accroissement de f entre x_i et x_{i+1}. En particulier, quand δx tend vers 0, cette valeur approche $f'(x_i)$. L'autre remarque est que cette somme a la même forme que la somme formée pour définir l'intégrale. La valeur de L que l'on trouve ainsi est :

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

5.1. **Une autre interprétation de la formule précédente.** Imaginons un point P se déplaçant sur le graphe de f. La longueur que l'on cherche à calculer est la distance parcourue par ce point. Pour donner le mouvement de P, il nous faut donner chacune de ses coordonnées en fonction du temps. Appelons $x(t)$ l'abscisse de P à l'instant t, et $y(t)$ son ordonnée à l'instant t. Comme P est sur le graphe, on a $y(t) = f(x(t))$. On notera t_0 l'instant où P part du point $(a, f(a))$ et t_1 l'instant où P arrive au point $(b, f(b))$.



Comment calculer la distance parcourue par un point mobile dont on connait la position en fonction du temps ? Commençons par imaginer un point se déplaçant en ligne droite, et appelons $d(t)$ la distance qu'il a parcouru à l'instant t et $v(t)$ sa vitesse à l'instant t. La fonction $v(t)$ est la dérivée de $d(t)$. Donc la distance parcourue entre l'instant t_0 et l'instant t_1 est $D = d(t_1) - d(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt$.

Revenons au point P qui se déplace le long du graphe. On ne peut pas appliquer directement la formule précédente. En effet, celle-ci prend en en compte une vitesse scalaire alors que la vitesse de P est un vecteur. C'est le vecteur $(x'(t), y'(t))$. "Déplions" la courbe, de manière à ce qu'elle devienne un segment de droite, et imaginons un point Q qui se déplace sur ce segment de la même façon dont P se déplace sur le graphe. La distance parcourue par Q est la même que celle parcourue par P, mais Q se déplace en ligne droite. La vitesse de Q à l'instant t est la norme de la vitesse de P à l'instant t, c'est à dire $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. On a donc

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

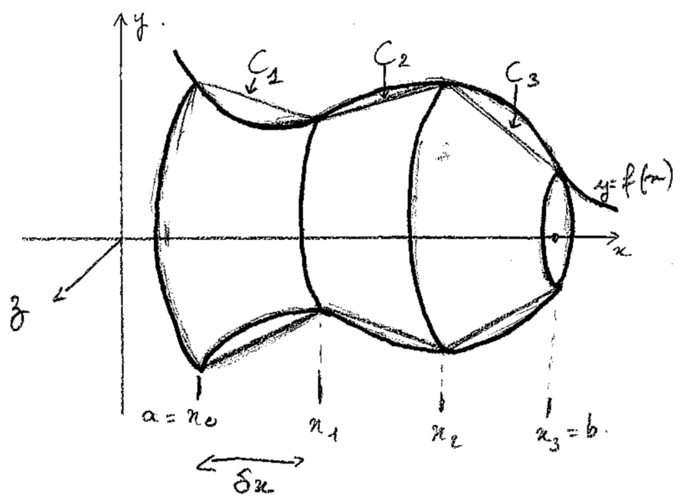
Comme $y(t) = f(x(t))$, on a $y'(t) = f'(x(t))x'(t)$ et notre formule devient

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + f'(x(t))^2}\, x'(t)\, dt$$

On retrouve alors la formule de la longueur donnée dans la section précédente, soit en se plaçant dans le cas particulier où P se déplace avec une vitesse horizontale égale à 1 (c'est à dire $x'(t) = 1$, $x(t) = t$, donc $t_0 = a$ et $t_1 = b$) soit en faisant le changement de variable $u = x(t)$ dans l'intégrale précédente.

6. Aire des surfaces de solides de révolution

On se donne une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et on veut calculer l'aire A de la surface du solide de révolution obtenu en faisant tourner le graphe de f autour de l'axe des abscisses.

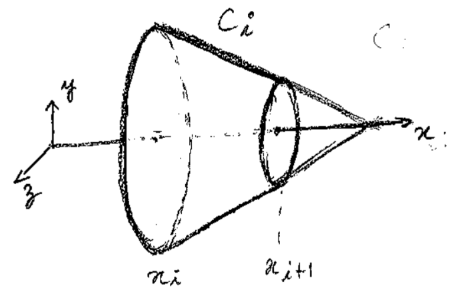


On va à nouveau calculer une approximation de la surface S par un procédé de découpage.

(1) On découpe le solide en tranches de largeur $\delta x = (b - a)/n$. On appelle x_i les abscisses des plans de coupe, pour $i = 0, \dots, n$.

(2) Au dessus de chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on approxime l'aire de la surface de la tranche par celle du cône tronqué C_i obtenu par révolution de la corde qui joint le point $(x_i, f(x_i))$ au point $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. On appelle A_i l'aire de la surface de C_i.

(3) L'approximation de l'aire A est la somme des aires des surfaces de ces cônes tronqués.



Pour calculer A_i, il nous faut connaître l'aire de la surface d'un cône tronqué. Si r_1 et r_2 sont les rayons des deux disques qui bordent le cône, et l la longueur du segment qui engendre le cône par révolution, l'aire de la surface du cône est $\pi(r_1 + r_2)l$. Cette formule est démontrée ci-dessous.

Dans le cas de C_i, les deux rayons sont $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$, et la longueur du segment qui engendre C_i est obtenue par le théorème de Pythagore : $\sqrt{\delta x^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$. L'approximation de A

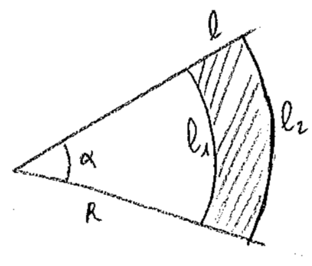
que l'on obtient est donc :

$$\begin{aligned} A \sim \sum_{i=0}^{n-1} A_i &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)\sqrt{\delta x^2 + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi(f(x_i) + f(x_{i+1}))\left(\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x}\right)^2}\right)\delta x \end{aligned}$$

On tire enfin de cette expression, par passage à la limite quand δx tend vers 0, la formule suivante pour l'aire de la surface d'un solide de révolution :

$$\boxed{A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

6.1. **Aire du cône tronqué.** On se donne un cône tronqué. On veut exprimer l'aire $\mathcal{A}$ de sa surface en fonction des rayons r_1 et r_2 des deux disques qui le bordent, et de la longueur l du segment qui l'engendre. Pour ce faire, imaginons que le cône est en papier ; on peut découper celui-ci le long d'un segment et le mettre à plat. On obtient alors un secteur de couronne dont on peut calculer l'aire. On appelle α l'angle du secteur, l_1 et l_2 les longueurs des deux arcs qui bordent la couronne, et R le rayon du petit cercle qui borde la couronne.



Dans le cône, l_1 et l_2 sont les périmètres de disques de rayons respectifs r_1 et r_2. On en tire $l_1 = 2\pi r_1$ et $l_2 = 2\pi r_2$. D'autre part, dans le secteur de couronne, l_1 et l_2 sont les longueurs d'arcs d'ouverture α de deux cercles de rayons respectifs R et $R + l$. On a donc $l_1 = \alpha R$ et $l_2 = \alpha(R + l)$.

Enfin, l'aire du secteur de couronne est la différence entre les aires de deux secteurs de disque, d'ouverture α, et de rayons respectifs R et $R + \ell$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{\alpha}{2}(R + l)^2 - \frac{\alpha}{2}R^2 \\ &= \frac{\alpha}{2}(2\ell R + \ell^2) \\ &= \ell(\alpha R + \frac{1}{2}\alpha\ell) \\ &= \ell(\ell_1 + \frac{(\ell_2 - \ell_1)}{2}) \\ &= \ell\frac{(\ell_1 + \ell_2)}{2} \\ \mathcal{A} &= \pi\ell(r_1 + r_2). \end{aligned}$$

L'aire de la surface du cône tronquée est ainsi $\boxed{\mathcal{A} = \pi(r_1 + r_2)l}$.