Université de Savoie
2011-2012

Polycopié pour le cours de MATH121b
Analyse élémentaire.

◇ Fiche méthode 3 : Équations différentielles.

I Du premier ordre :

On a une équation du type (E) : $y' + ay = b$ à résoudre. (a(t) est a priori une fonction ...).
• **On commence par résoudre l'équation homogène** (H) : $y' + ay = 0$. On note u_0 ses solutions.

1. Si on se souvient de la formule du cours qui donne les solutions, on calcule une primitive $A(t)$ de a, et on remplace $\int a(s)ds$ par $A(t)$ dans la formule pour obtenir toutes les solutions de (H) :
$$u_0(t) = K\exp(-A(t)) \text{ avec } K \text{ constant.}$$
2. Si on a oublié la formule, on écrit (au brouillon, sinon il faut justifier pourquoi y ne s'annule pas quand on divise) :
$y' = -ay$, donc $\frac{y'}{y} = -a$, donc en intégrant des deux cotés :
$$\ln(|y|) = -\int a(s)ds + k,\ k \text{ constante.}$$
On calcule une primitive de a : $A(t) = \int a(s)ds$. En prenant l'exponentielle des deux cotés de la dernière l'égalité, on obtient :
$$u_0(t) = K\exp(-A(t)) \text{ avec } K \text{ constant.}$$

• **On cherche ensuite une solution particulière** de (E). On note celle-ci $u_1(t)$. Si a est constant, on cherche cette solution sous la "même forme" que le second membre b :

1. Si $b(t)$ est de la forme $b(t) = P(t)$, où P est un polynôme, on cherche u_1 sous la forme $u_1(t) = Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
2. Si $b(t)$ est de la forme $b(t) = P(t)\exp(rt)$, où P est un polynôme, on cherche u_1 sous la forme $u_1(t) = Q(t)\exp(rt)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
3. Si $b(t)$ est de la forme $b(t) = P_1(t)\sin(rt) + P_2(t)\cos(rt)$, où P_1 et P_2 sont des polynômes, on cherche u_1 sous la forme $u_1(t) = Q_1(t)\sin(rt) + Q_2(t)\cos(rt)$, où Q_1 et Q_2 sont des polynômes de même degré que le plus haut degré entre P_1 et P_2.

Remarques :

* Ces différents cas incluent le cas où P est une constante et le cas où Q_1 ou Q_2 est nul.
* Si $b(t)$ s'écrit $b(t) = b_1(t) + b_2(t) + \ldots$ où chacun des b_i a une des formes précédentes, on cherche des solutions particulières de $y' + ay = b_1,\ y' + ay = b_2, \ldots$, qu'on appelle $v_1, v_2, \ldots$ Une solution particulière de (E) est : $u_1 = v_1 + v_2 + \ldots$ (théorème de superposition).

• **Les solutions de (E) s'obtiennent en prenant la somme des solutions de H avec la solution particulière** : la solution générale de (E) est $u(t) = u_0(t) + u_1(t)$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = t^2$

Rédaction :	**Brouillon et détail :**
L'équation homogène est (H) : $y' + 2y = 0$. On a $\int -2ds = -2t + cste$, donc la solution générale de l'équation homogène est : $u_0(t) = K\exp(-2t)$ pour $K \in \mathbb{R}$.	$y' = -2y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -2$ $\Rightarrow \ln(\lvert y\rvert) = \int -2ds$ $\Rightarrow \ln(\lvert y\rvert) = -2t$ $\Rightarrow y = K\exp(-2t)$
Cherchons maintenant une solution particulière de (E) sous la forme : $u_1(t) = at^2 + bt + c$.	Le second membre est un polynôme de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme.
On a $u_1'(t) = 2at + b$, donc, si u_1 est solution de (E), $(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) = t^2$	On injecte la forme dans l'équation (E)
C'est à dire $2at^2 + (2a + 2b)t + (b + c) = t^2$ On doit donc avoir :	On identifie les termes de même degré de chaque coté
$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$	
La fonction $u_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (H).	Vérifier au brouillon peut s'avérer bénéfique ...
La solution générale de (E) est donc : $u(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} + K\exp(-2t)$ pour $K \in \mathbb{R}$.	On prend la somme de u_0 et u_1

Exemple d'un problème de Cauchy : Résoudre le système :

$$(C):\ y' - e^t y = 0, \quad y(0) = 1.$$

On cherche d'abord la solution génerale $u(t)$ de l'équation $y' - e^t y = 0$.
On a $\int -e^s ds = e^t + cste$, donc : (si on a oublié la formule : $\frac{y'}{y} = e^t$, donc $\ln\lvert y\rvert = e^t + cste$, donc :)

$$u(t) = Ke^{e^t},\ \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

On détermine ensuite la constante d'intégration K :
Si $y(0) = 1$, on a $K\exp(\exp(0)) = 1$, c'est à dire $Ke = 1$, donc $K = \frac{1}{e}$.
Finalement, la solution de (C) est

$$y(t) = (\frac{1}{e})\ e^{e^t}$$

II Du second ordre

Le shéma est le même que pour le premier ordre :

1. On cherche la solution générale u_0 de l'équation homogène ;
2. On cherche une solution particulière u_1 de l'équation, sous la même forme que le second membre ;
3. La solution générale de l'équation est $u = u_0 + u_1$.

Il y a trois cas de figure pour les solutions de l'équation homogène, selon si le Δ est positif, négatif ou nul. On va voir trois exemples correspondants.

Exemple 1 (Δ positif). $(\mathrm{H}_1) : 2y'' - y' - 1 = 0$

Rédaction	**Détail**
L'équation caractéristique de (H_1) est : $2r^2 - r - 1 = 0$	Obtenue en remplaçant y'' par r^2, y' par r et y par 1.
On a $\Delta = 1^2 - 4(2)(-1) = 9$.	$\Delta = b^2 - 4ac$
Δ est positif, donc l'équation caractéristique a deux racines : $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$	les racines sont $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
La solution générale u_0 de (H_1) est donc : $u_0(t) = Ae^t + Be^{-\frac{t}{2}}$, avec $A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$	c'est la formule du cours.

Exemple 2 (Δ négatif). $(\mathrm{H}_2) : y'' - 2y' + 2 = 0$

Rédaction	**Détail**
L'équation caractéristique de (H_2) est : $r^2 - 2r + 2 = 0$	Obtenue en remplaçant y'' par r^2, y' par r et y par 1.
On a $\Delta = -4$.	$\Delta = b^2 - 4ac$
Δ est négatif. On pose $r_0 = 2/2 = 1$ et $\phi = 2/2 = 1$	$r_0 = -\frac{b}{2a}$ et $\phi = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$
La solution générale u_0 de (H_2) est donc : $u_0(t) = Ae^{r_0 t}\cos(\phi t) + Be^{r_0 t}\sin(\phi t)$, avec $A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$ C'est à dire $u_0(t) = Ae^t\cos(t) + Be^t\sin(t)$, avec $A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$	c'est la formule du cours.

Exemple 3 (Δ nul). $(\mathrm{H}_3) : y'' + 2y' + 1 = 0$

Rédaction	**Détail**
L'équation caractéristique de (H_3) est : $r^2 + 2r + 1 = 0$	Obtenue en remplaçant y'' par r^2, y' par r et y par 1.
On a $\Delta = 2^2 - 4(1)(1) = 0$.	$\Delta = b^2 - 4ac$
Δ est nul, donc l'équation caractéristique a une racine double : $r_0 = -1$	la racine est $\frac{-b}{2a}$
La solution générale u_0 de (H_1) est donc : $u_0(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t}$, avec $A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$	c'est la formule du cours.

Exemple 4 : recherche d'une solution particulière. (E) : $2y'' - y' - 1 = 10\sin(t)$

Rédaction	**Détail**
• Résolvons l'équation homogène (H) : $2y'' - y' - 1 = 0$. C'est l'équation H_1 de l'exemple 1. La solution générale u_0 de (H) est donc :	
$u_0(t) = Ae^t + Be^{-\frac{t}{2}}$, avec $A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$	(voir exemple 1)
• Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $u_1(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$	le second membre est de la forme (3) : $P_1(t)\sin(t) + P_2(t)\cos(t)$ (ici $P_1 = 10, P_2 = 0$)
On a $u_1'(t) = -\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)$ et $u_1''(t) = -\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)$	On a besoin de l'expresion de u_1' et u_1'' pour remplacer dans (E)
Si $u_1(t)$ est solution de (E), on a donc : $2(-\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)) - (-\alpha\sin(t) + \beta\cos(t))\dots$ $\dots - (\alpha\cos(t) + \beta\sin(t)) = 10\sin(t)$,	On remplace ici dans (E)
c'est à dire : $\cos(t)(-3\alpha - \beta) + \sin(t)(-\beta + \alpha) = 10\sin(t)$	On range un peu
On a donc :	On identifie les termes en sin et ceux en cos
$\begin{cases} -3\alpha - \beta = 0 \\ -3\beta + \alpha = 10 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \end{cases}$	On résoud le système
Une solution particulière de (E) est donc : $u_1(t) = \cos(t) - 3\sin(t)$	
• La solution générale de (E) est : $u(t) = Ae^t + Be^{-\frac{t}{2}} + \cos(t) - 3\sin(t)$, avec $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$.	On somme u_0 et u_1 pour avoir les solutions de (E).