Université Savoie Mont Blanc **Année 2019-2020**

EAD, devoir en temps limité du 7 mai 2020, L1 MATH203, durée 1h15
(documents autorisés)

Important :

1. **Il faut écrire votre nom et prénom sur la première page.**
2. **Si vous avez droit au tiers temps supplémentaire, il faut le mentionner à côté de votre nom. Dans ce cas, vous devez rendre votre copie suivant le même horaire, mais vous êtes exemptés de E1Q1, E2Q2, E3Q2.**

Exercice 1 (6 points) Lors du mouvement horizontal d'un point matériel M de masse m relié à un ressort de raideur k et soumis à une force de frottement fluide de coefficient f, les variations temporelles $x(t)$ de l'abscisse du point matériel sont régies par l'équation différentielle suivante :

$$mx''(t) + fx'(t) + kx(t) = 0.$$

On suppose $m = 1$, $k = 1$.

E1Q1. En fonction des différentes valeurs de f, écrire la forme générale de la solution de cette équation.

E1Q2. Déterminer l'expression de $x(t)$ en supposant $f = 2, x(0) = 10, x'(0) = 0$.

E1Q3. Reprendre la question précédente en supposant cette fois $f = \frac{5}{2}$.

Exercice 2 (4 points) Calculer les intégrales suivantes

E2Q1. $\displaystyle\int_0^\pi xe^{-x}dx$, *Indication : intégration par parties.*

E2Q2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$, *Indication : changement de variable.*

Exercice 3 (4 points) Donner les développements limités suivants :

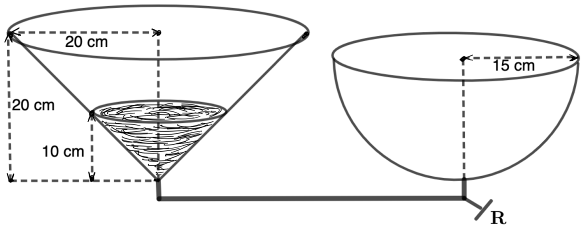
E3Q1. $f(x) = e^x$ en 1, à l'ordre 2.

E3Q2. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ en 0, à l'ordre 3.

Exercice 4 (2 points) Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(\sin(x) - x)}{1 - \cos(x) - \frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 5 (4 points) En mécanique des fluides, le principe des vases communicants établit qu'un liquide homogène remplissant plusieurs récipients, reliés entre eux à leur base et soumis à la même pression atmosphérique, s'équilibre à la même hauteur dans chacun d'eux.



Déterminer la hauteur atteinte par le liquide dans le cône et la demi-sphère après l'ouverture du robinet R. *Indication : utiliser la formule (vue en cours) du volume d'un corps de révolution.*

Exercice 1

1. On a l'équation :

$$m x'' + f x' + k x = 0 \quad , \quad m = k = 1 .$$

Équation caractéristique

$$r^2 + f r + 1 = 0$$

$$\Delta = f^2 - 4$$

Si $\Delta < 0 \Rightarrow r_1, r_2 = \dfrac{-f \pm i\sqrt{4-f^2}}{2}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} = e^{-\frac{f}{2}t}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{4-f^2}}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{4-f^2}}{2}\right)$$

Si $\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -\dfrac{f}{2}$

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2}.t}(At + B)$$

Si $\Delta > 0 \Rightarrow r_1, r_2 = \dfrac{-f \pm \sqrt{f^2-4}}{2}$

$$x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

2. Si $f = 2 \Rightarrow \Delta = 0$. Alors

$$x(t) = e^{-t}.(At + B)$$

Comme $x'(t) = -e^{-t}(At+B) + A.e^{-t}$, de $x'(0) = 0$

on a $\Rightarrow -B + A = 0 \Rightarrow \boxed{A = B}$

De $x(0) = 10 \Rightarrow$

$B = 10$. Donc

$$x(t) = e^{-t}(10t + 10).$$

3. Si $f = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$$\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} \quad \begin{cases} \nearrow r_1 = -2 \\ \searrow r_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc : $X(t) = A e^{-2t} + B e^{-\frac{t}{2}}$

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 10 \Rightarrow \\ X'(0) = -2A - \frac{B}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2B - \frac{B}{2} = 20 \Rightarrow \quad 3B = 40 \Rightarrow \boxed{B = \frac{40}{3}}$$

$$\boxed{A = -\frac{10}{3}}$$

Exercice 2.

1. $$\int_0^\pi x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x} dx$$

$$= -\pi e^{-\pi} - \left[e^{-x}\right]_0^\pi = -\pi e^{-\pi} - e^{-\pi} + 1.$$

2. $$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx \underset{du = e^x dx}{\overset{\boxed{u = e^x}}{=}} \int_1^e \frac{du}{u+1} = \left[\ln(u+1)\right]_1^e$$

$$= \ln(e+1) - \ln 2.$$

Exercice 3

1. $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x \Rightarrow$

$$e^x = e^1 + (x-1)e^1 + \frac{(x-1)^2}{2}e^1 + o((x-1)^2)$$

$$= e + (x-1)e + \frac{(x-1)^2}{2}e + o((x-1)^2)$$

2. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

On sait : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$= x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

Exercice 4.

On met en place de DL :

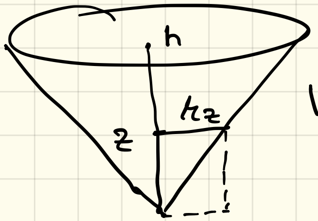
$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$$

Donc $\dfrac{x(\sin x - x)}{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}} = \dfrac{-\frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x)}{-\frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 4.$

Exercice 5.

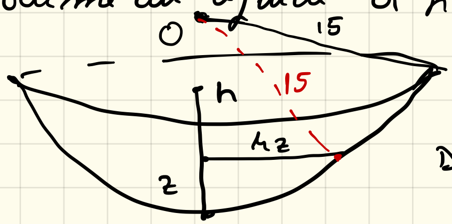
Le volume du liquide à hauteur h dans le cone est



$$V_C = \int_0^h \pi r_z^2 \, dz$$

Mais $r_z = z$ $\Rightarrow$ $V_C = \int_0^h \pi z^2 \, dz = \frac{\pi h^3}{3}$

Volume du liquide à hauteur h dans la demi-sphère



$$r_z^2 + (15-z)^2 = 15^2$$

Donc $r_z^2 = 15^2 - (15-z)^2 =$

$= 30z - z^2$

$$V_S = \pi \int_0^h 30z - z^2 \, dz = \pi\left(30\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}\right)$$

Donc on doit trouver h t.q.

$$V_S + V_C = \frac{\pi \cdot 10^3}{3} = \text{volume initial.}$$

Donc: $\frac{\pi h^3}{3} + 30\pi\frac{h^2}{2} - \frac{\pi h^3}{3} = \pi\frac{10^3}{3}$

$\Rightarrow h^2 = \frac{100}{9} \cdot 2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{10}{3}\sqrt{2}}$