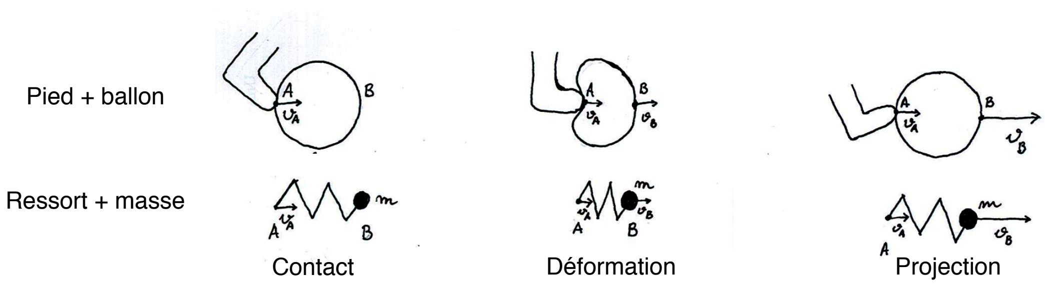
Math 203 (session 2) – Durée : 2h

La présentation affecte la notation (1pt).
Les résultats sans justification ne sont pas comptabilisés.
Le barème proposé est indicatif.

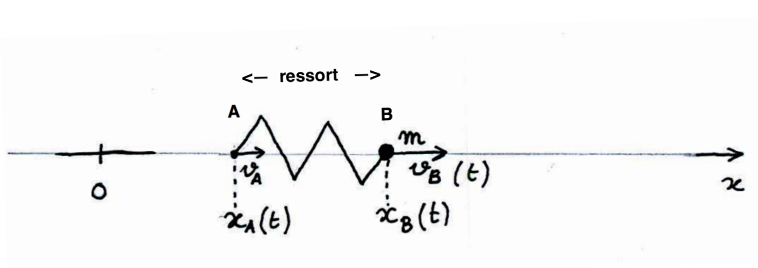
1 Tir au but (7pts)

L'objectif de cet exercice est de calculer la vitesse à laquelle est projeté un ballon lors d'un tir, en fonction de la vitesse du pied qui le frappe. Pour ce faire, on modélise le ballon (qui se déforme lors du choc) comme un couple ressort + masse comme schématisé sur la figure 1.



– FIGURE 1. –

On s'intéresse ainsi à un système couplant un ressort et une boule de masse m (figure 2). Les extrémités du ressort sont notées A et B. La boule est placée en B. Le point A est poussé vers la droite et se déplace à une vitesse **constante** v_A. À l'instant t, on note $x_A(t)$ et $x_B(t)$ les coordonnées des points A et B et $v_B(t)$ la vitesse du point B. L'origine du repère est choisie de telle manière qu'à l'instant $t = 0$ (quand le pied entre en contact avec le ballon), $x_B(0) = 0$ (le ballon est posé à l'origine du repère).



– FIGURE 2. –

La force $F(t)$ exercée par le ressort sur la masse m à l'instant t est proportionnelle à l'élongation du ressort, et la loi fondamentale de la dynamique lie l'accélération de la boule aux forces qu'elle subit. On a ainsi les relations :

$$F(t) = -k\Big(x_B(t) - x_A(t) - \ell\Big) \qquad \text{et} \qquad m\frac{d\,v_B}{dt}(t) = F(t),$$

où k et ℓ sont des constantes positives (raideur et longueur du ressort). On rappelle enfin que la vitesse d'un point est la dérivée de sa position : ici, $\dfrac{d\,x_B}{dt}(t) = v_B(t)$ et $\dfrac{d\,x_A}{dt}(t) = v_A$.

1. Montrer que $\dfrac{dF}{dt} = -k(v_B - v_A)$.

2. En déduire que v_B vérifie une équation différentielle (E) de la forme

$$(E): \qquad \frac{d^2 v_B}{dt^2}(t) + \frac{1}{\tau^2} v_B(t) = a_0$$

où τ et a_0 sont des constantes que l'on exprimera en fonction des données du problème.

3. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Puisqu'à l'instant $t = 0$, le ressort est au repos, $x_B(0) - x_A(0) = \ell$. En déduire la valeur de $\dfrac{dv_B}{dt}(0)$.

5. Comme le ballon est immobile avant contact avec le pied, $v_B(0) = 0$. Déduire de cette condition et des deux questions précédentes l'expression de $v_B(t)$ en fonction du temps.

6. En déduire l'expression de $x_B(t)$ en fonction du temps et des données du problème (on rappelle que $x_B(0) = 0$).

7. Le modèle étudié jusqu'ici présente un défaut. Le pied pousse le ballon mais ne peut le tirer vers l'arrière : F est nécessairement positive. On modifie notre modèle : la force exercée par le ressort sur le ballon est maintenant

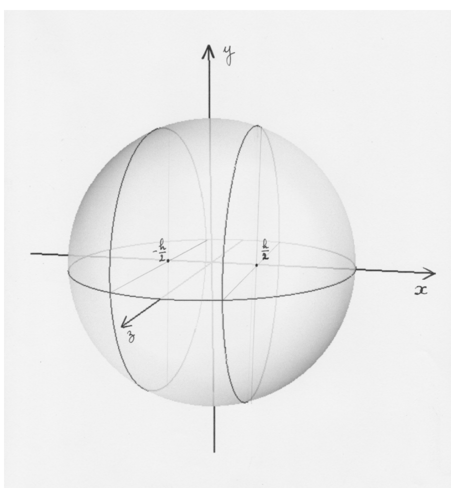
$$F = \begin{cases} -k\Big(x_B - x_A - \ell\Big) \text{ si } -k\Big(x_B - x_A - \ell\Big) > 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un instant t_0 que l'on déterminera tel que :

- Si $t < t_0$, $v_B(t) = A(1 - \cos(\frac{t}{\tau}))$, avec A une constante à préciser.
- Si $t \geq t_0$, $v_B(t) = V$ avec V une constante à déterminer.

2 Aire d'anneau (5pts)

On appelle sphère tronquée de rayon R et de hauteur h les points (x,y,z) d'une sphère de rayon R vérifiant $-\frac{h}{2} < x < \frac{h}{2}$.



1. Montrer que si $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, alors le point (x,y) se trouve sur le cercle de rayon R centré à l'origine.

2. La sphère tronquée de rayon R et de hauteur h est la surface extérieure du solide de révolution obtenu par rotation du graphe $y = f(x)$ d'une fonction f autour de l'axe des x, et délimité par deux plans d'équations $x = a$ et $x = b$. Quelle est la fonction f ? Quelles sont les valeurs de a et b ?

3. On rappelle le résultat de cours suivant : l'aire de la surface extérieure du solide de révolution obtenu par rotation du graphe de la fonction f autour de l'axe des x, et délimité par deux plans d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\; dx.$$

Calculer, en fonction de R et h, l'aire d'une sphère tronquée de rayon R et de hauteur h.

3 Calculs divers (7pts)

1.

1. Rappeler les développements limités de $\ln(1 + x)$ et $\cos(x)$ à l'ordre 2.
2. En déduire la valeur de la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1 + x)}{\cos(2x) - 1}.$$

2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi x)\; dx.$
2. $\displaystyle\int_0^1 x\sin(\pi x)\, dx.$

3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2}\; dx.$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)\cos(u)}{1 + \sin^2(u)}\; du$ en faisant le changement de variable $x = \sin(u)$.