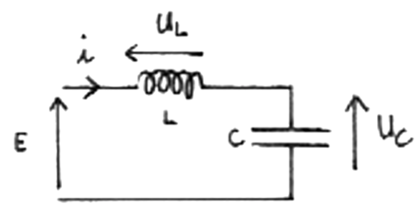
Math 203 – Durée : 2h

1 Double tension

On s'intéresse au circuit électrique suivant (circuit 1), représentant une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C montés en série, et alimentés par une tension électrique **constante** E.



– CIRCUIT 1. –

À l'instant t, on appelle $U_L(t)$ la tension aux bornes de la bobine, $U_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur et $I(t)$ l'intensité parcourant le circuit. À l'instant initial $t = 0$, le condensateur est déchargé et on commence à alimenter le circuit.

Dans ce dispositif, la loi des mailles donne, pour tout t, $E = U_C(t) + U_L(t)$. D'autre part, les tensions aux bornes des dipôles sont liées à l'intensité les traversant par les lois :

$$U_L(t) = L\frac{dI}{dt}(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{dU_C}{dt}(t) = \frac{I(t)}{C}.$$

1. Montrer que l'intensité $I(t)$ vérifie une équation différentielle (H) de la forme

$$(H) : \qquad \frac{d^2 I}{dt^2}(t) + \frac{1}{\tau^2} I(t) = 0,$$

où τ est une constante que l'on exprimera en fonction des données du problème.

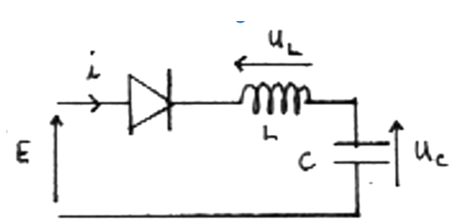
2. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle (H).

3. Puisqu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé, $U_C(0) = 0$. En déduire la valeur de $\frac{dI}{dt}(0)$.

4. Le circuit n'étant alimenté qu'à partir de $t = 0$, on a $I(0) = 0$. Déduire de cette condition et des deux questions précédentes l'expression de $I(t)$ en fonction du temps.

5. En déduire l'expression de $U_C(t)$ en fonction de t, et des constantes du problème. (On rappelle que $U_C(0) = 0$).

6. On modifie le circuit en ajoutant une diode en série (circuit 2).



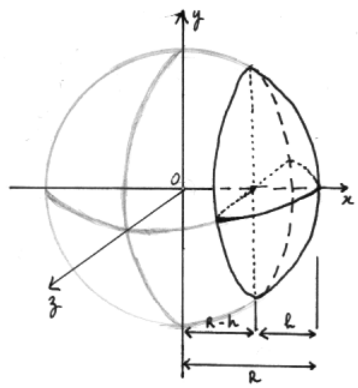
– CIRCUIT 2. –

La diode est passante si $I > 0$, et non passante sinon. Autrement dit, si $I > 0$, le circuit 2 se comporte comme le circuit 1. Sinon, $I = 0$. Montrer qu'il existe un instant t_0 que l'on déterminera tel que :

- Si $t < t_0$, $U_C(t) = A(1 - \cos(\frac{t}{\tau}))$, avec A une constante à préciser.
- Si $t \geq t_0$, $U_C(t) = V$ avec V une constante à déterminer.

2 Aire de banquise

On appelle calotte sphérique de rayon R et de hauteur h les points (x,y,z) d'une sphère de rayon R vérifiant $x > R - h$. (Sur le dessin, la partie en noir de la sphère grise).



1. Montrer que si $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, alors le point (x,y) se trouve sur le cercle de rayon R centré à l'origine.

2. La calotte sphérique de rayon R et de hauteur h est la surface du solide de révolution obtenu par rotation du graphe $y = f(x)$ d'une fonction f autour de l'axe des x, et délimité par deux plans d'équations $x = a$ et $x = b$. Quelle est la fonction f ? Quelles sont les valeurs de a et b ?

3. On rappelle le résultat de cours suivant : l'aire de la surface extérieure du solide de révolution obtenu par rotation du graphe de la fonction f autour de l'axe des x, et délimité par deux plans d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Calculer, en fonction de R et h, l'aire d'une calotte sphérique de rayon R et de hauteur h.

4. On modélise (grossièrement) la banquise arctique par une calotte sphérique de rayon $R = 6000\,km$ (le rayon de la terre). Sachant qu'en septembre 2009, la surface de la banquise arctique était de $5.10^6 km^2$, quelle était la hauteur h de la calotte glaciaire arctique à ce moment ?

3 Calculs divers

1. Rappeler les développements limités de e^x et $\sin(x)$ à l'ordre 2. En déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - \sin(x)}{x^2}$.

2. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\, dx$ puis $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\, dx$.

3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^8 \sqrt{1+u}\, du$, puis l'intégrale $\displaystyle\int_1^{e^4} \frac{\sqrt{1 + \ln(x^2)}}{x}\, dx$ en faisant le changement de variable $u = \ln(x^2)$.