# **Math 203** – Durée : 2h

## 1 Nombres complexes

Soit $z$ le nombre complexe $z = 2 + i$. On note $\theta \in [0; 2\pi[$ l'argument de $z$.

**1.** Calculer le module de $z$, et donner une valeur approchée de $\theta$ exprimée en radians à $10^{-2}$ près.

**2.** Donner les valeurs exactes de $\tan(\theta)$ et $\cos(\theta)$, et en déduire que $\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

**3.** Donner les modules et arguments des nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{z^2}{5}$, $z_2 = \frac{(\overline{z})^4}{25}$, $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z$. On exprimera chacun des arguments en fonction de $\theta$ avant d'en donner une valeur approchée.

**4.** Donner les parties réelles et imaginaires de $z_4 = \frac{z}{1+2i}$.

**5.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé $Oxy$, représenter les affixes des nombres $z, z_1, z_2, z_3, z_4$. (Toutes ces affixes peuvent être représentées précisément à la règle et au compas; on explicitera la construction pour chacune d'entre elles).

## 2 Développements limités

*Lorsqu'on étudie la propagation des vagues à la surface de l'eau, on trouve que la vitesse $v$ des vagues dépend de plusieurs paramètres : le nombre d'onde $k$ (nombre positif inversement proportionnel à la longueur d'onde), la profondeur $h$ de l'étendue d'eau, l'accélération de la pesanteur $g$, et une quantité $\ell_c$ appelée « longueur capillaire » qui caractérise la viscosité. La relation entre $v$ et ces différents paramètres est donnée par :*

$$v^2 = g\ell_c \left(\frac{1}{k\ell_c} + k\ell_c\right) \tanh(kh) \quad \text{où} \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

**1.** Lorsque la viscosité est faible (c'est à dire $\ell_c \to 0$), montrer que le facteur $\left(\frac{1}{k\ell_c} + k\ell_c\right)$ est équivalent à l'un de ses deux termes. Lequel ? Dans la suite de l'exercice, on suppose $\ell_c$ suffisamment petit pour identifier ce facteur à son terme prépondérant.

**2.** Donner un développement limité de $\tanh(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $x = 0$.

**3.** Montrer que dans la limite des faibles profondeurs, $v$ est bien approximée par $\sqrt{gh}$, c'est à dire que

$$v =_{(h\to 0)} \sqrt{gh} + o(h)$$

**4.** Montrer que $e^{-\frac{1}{x}}$ est négligeable devant $x$ pour $x \to 0^+$, et en déduire que $\tanh\left(\frac{1}{x}\right) =_{(x\to 0^+)} 1 + o(x)$.

**5.** Montrer alors que dans la limites des profondeurs importantes, $v$ est bien approximée par $\sqrt{\frac{g}{k}}$, c'est à dire que

$$v \sim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

## 3 Intégration

Calculer les intégrales suivantes :

**1.** $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(2x+\pi)\,dx$,

**2.** $I_2 = \displaystyle\int_0^1 (3x^2+2)\sqrt{x^3+2x+1}\,dx$,

**3.** $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(2x)dx$,

**4.** $I_4 = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^{-x}}\,dx$. Pour cette dernière, on pourra faire le changement de variable $u = e^x$.

## 4 Equations différentielles

*En optique, lorsqu'on étudie une fibre transparente cylindrique composée d'un milieu dont l'indice $n$ varie avec l'éloignement $z$ à l'axe, selon la loi*

$$n(z) = n_0\sqrt{1-\alpha z^2}$$

*où $\alpha$ désigne une constante, on trouve que les rayons lumineux qui entrent dans la fibre en faisant un angle $\theta_0$ avec l'axe obéissent à l'équation suivante*

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta_0} - 1 - \frac{\alpha z^2}{\cos^2\theta_0},$$

*où $z(x)$ désigne la distance entre l'axe de la fibre et le rayon lumineux, et $x$ l'avancement dans la fibre.*

**1.** En dérivant cette équation par rapport à $x$, montrer que

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\alpha z}{\cos^2\theta_0}$$

**2.** Donner la forme des solutions de l'équation différentielle ci-dessus, en distinguant les cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.

**3.** Exprimer $z'(0)$ en fonction de $\theta_0$.

**4.** On suppose que le rayon étudié entre dans la fibre par son centre, c'est à dire que $z(0) = 0$. Donner l'expression de $z(x)$ en fonction de $x$ dans le cas où $\alpha > 0$, et dans le cas où $\alpha < 0$.

**5.** Discuter l'allure des rayons lumineux, suivant le signe de $\alpha$.