

MATH103_MISPI

TD du chapitre 7 : Dérivées, accroissements finis

L1 MISPI

Questions de cours

- 1 Énoncer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.
- 2 Règle de l'Hopital.

Exercice 2

Pour les fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée :

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = (2x - 1)^3 & 2) f(x) = \frac{4}{(2x - 3)^4} \\ 3) f(x) = \frac{(2x - 1)^2}{(5x - 3)^3} & 4) f(x) = \frac{x}{2x + 1} \text{ puis } g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}} \\ 5) f(x) = \cos(x^2 + 3) & 6) f(x) = \cos^4 x + \sin^3(5x + 2) \end{array}$$

① $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}. f'(x) = 3(2x - 1)^2 \times 2 = 6(2x - 1)^2.$

① $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$. $f'(x) = 3(2x - 1)^2 \times 2 = 6(2x - 1)^2$.

② $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.

$$f'(x) = (4(2x - 3)^{-4})' = 4 \times -4(2x - 3)^{-5} \times 2 = -\frac{32}{(2x - 3)^5}.$$

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}. \quad f'(x) = 3(2x - 1)^2 \times 2 = 6(2x - 1)^2.$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

$$f'(x) = (4(2x - 3)^{-4})' = 4 \times -4(2x - 3)^{-5} \times 2 = -\frac{32}{(2x - 3)^5}.$$

$$\textcircled{3} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(2x - 1)(5x - 3)^3 - (2x - 1)^2 \times 15(5x - 3)^2}{(5x - 3)^6} \\ &= \frac{(5x - 3)^2(2x - 1)(4(5x - 3) - 15(2x - 1))}{(5x - 3)^6} \\ &= \frac{(2x - 1)(-10x + 3)}{(5x - 3)^4}. \end{aligned}$$

$$④ \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}. \quad f'(x) = \frac{1 \times (2x+1) - x \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}.$$

$\mathcal{D}_g = \left[0, +\infty \right[\cap \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[= \left[0, +\infty \right[$, $\mathcal{D}_{g'} =]0, +\infty[$. Sur $\mathcal{D}_g$, on a $g(x) = \sqrt{f(x)}$ donc

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{2g(x)} = \frac{1}{2(2x+1)\sqrt{x(2x+1)}}$$

$$\textcircled{4} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}. \quad f'(x) = \frac{1 \times (2x+1) - x \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}.$$

$\mathcal{D}_g = \left[0, +\infty \right[\cap \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[= \left[0, +\infty \right[$, $\mathcal{D}_{g'} =]0, +\infty[$. Sur $\mathcal{D}_g$, on a $g(x) = \sqrt{f(x)}$ donc

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{2g(x)} = \frac{1}{2(2x+1)\sqrt{x(2x+1)}}$$

$$\textcircled{5} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}. \quad f'(x) = -\sin(x^2 + 3) \times 2x = -2x \sin(x^2 + 3)$$

$$④ \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}. \quad f'(x) = \frac{1 \times (2x+1) - x \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}.$$

$$\mathcal{D}_g = \left[0, +\infty \right[\cap \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[= [0, +\infty[. \quad \mathcal{D}_{g'} =]0, +\infty[. \quad \text{Sur } \mathcal{D}_g, \text{ on a } g(x) = \sqrt{f(x)} \text{ donc}$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{2g(x)} = \frac{1}{2(2x+1)\sqrt{x(2x+1)}}$$

$$⑤ \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}. \quad f'(x) = -\sin(x^2 + 3) \times 2x = -2x \sin(x^2 + 3)$$

$$⑥ \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cos^3 x (-\sin x) + 3 \sin^2(5x+2) \times \cos(5x+2) \times 5 \\ &= -4 \cos^3 x \sin x + 15 \sin^2(5x+2) \cos(5x+2). \end{aligned}$$

Exercice 3

Soient a un réel et f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{1}{x-a}$.

- 1 Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
- 2 Trouver une formule donnant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ et la démontrer.

Sur $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$, on a

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{1}{x-a} = (x-a)^{-1},$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2} = -(x-a)^{-2} = \frac{-1}{(x-a)^2},$$

$$f''(x) = -(-2)(x-a)^{-3} = 2(x-a)^{-3} = \frac{2}{(x-a)^3},$$

$$f^{(3)}(x) = 2 \times (-3)(x-a)^{-4} = -6(x-a)^{-4} = \frac{-6}{(x-a)^4}.$$

On a $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

② On peut facilement conjecturer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}.$$

La formule est correcte pour $n = 0$ ($f^{(0)} = f$).

On la suppose correcte à l'ordre n . Alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x) \right)' = \left((-1)^n n! (x-a)^{-(n+1)} \right)' \\ &= (-1)^n n! \times -(n+1)(x-a)^{-(n+1)-1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x-a)^{n+2}} \end{aligned}$$

ce qui est la formule à l'ordre $n+1$: la formule est prouvée par récurrence sur n .

Exercice 4

Pour les fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée :

$$1) f(x) = 3e^{5x-2} + \ln(3x+1) \quad 2) f(x) = 3^x + 2x^3 + 3^{-x}$$

$$3) f(x) = \tan^2(4x+1) \quad 4) f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{(2x+1)^5}$$

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[\text{ et } f'(x) = 3 \times 5 e^{5x-2} + \frac{3}{3x+1}.$$

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[\text{ et } f'(x) = 3 \times 5 e^{5x-2} + \frac{3}{3x+1}.$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 3^x \ln 3 + 6x^2 - 3^{-x} \ln 3.$$

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[\text{ et } f'(x) = 3 \times 5 e^{5x-2} + \frac{3}{3x+1}.$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 3^x \ln 3 + 6x^2 - 3^{-x} \ln 3.$$

$$\textcircled{3} \quad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \left\{ x \in \mathbb{R} : 4x + 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Donc}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi-2}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Et on a :}$$

$$f'(x) = 2 \tan(4x+1) \times \frac{4}{\cos^2(4x+1)} = 8 \tan(4x+1)(1 + \tan^2(4x+1)).$$

$$\textcircled{1} \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[\text{ et } f'(x) = 3 \times 5 e^{5x-2} + \frac{3}{3x+1}.$$

$$\textcircled{2} \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 3^x \ln 3 + 6x^2 - 3^{-x} \ln 3.$$

$$\textcircled{3} \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \left\{ x \in \mathbb{R} : 4x+1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Donc}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi-2}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Et on a :}$$

$$f'(x) = 2 \tan(4x+1) \times \frac{4}{\cos^2(4x+1)} = 8 \tan(4x+1)(1 + \tan^2(4x+1)).$$

$$\textcircled{4} \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} =]0, +\infty[. \text{ En \acute{e}crivant } f(x) = 5x^{-\frac{1}{3}} + 4(2x+1)^{-5} \text{ on obtient}$$

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 40(2x+1)^{-6} \text{ que l'on peut \acute{e}crire, si on pr\'{e}f\acute{e}re,}$$

$$f'(x) = -\frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{40}{(2x+1)^6}.$$

Exercice 5

Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(e^{2x+1})$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée $f'(x)$ à l'aide de la dérivée de g .

Exercice 5

Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(e^{2x+1})$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée $f'(x)$ à l'aide de la dérivée de g .

Il s'agit d'appliquer le théorème sur la dérivée d'une composée de fonctions : il donne immédiatement la dérivabilité de f (toutes les fonctions l'étant) et

$$f'(x) = (g(e^{2x+1}))' = g'(e^{2x+1}) \times 2e^{2x+1} = 2e^{2x+1} g'(e^{2x+1}).$$

Exercice 6

- ❶ Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur I . Rappeler quelle est la dérivée de la fonction
- $$f : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln |u(x)| \end{cases}.$$
- ❷ Soit f la fonction de la variable réelle x définie par
- $$f(x) = \ln \left(\left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right).$$
- Préciser les domaines de définition et de dérivabilité de f puis montrer que $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Exercice 6 suite

1 $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ pour $x \in I \setminus \{u = 0\}$ i.e. $x \in I$.

Exercice 6 suite

❶ $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ pour $x \in I \setminus \{u = 0\}$ i.e. $x \in I$.

❷ f est définie et dérivable si et seulement si $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ est défini et non nul car alors $\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| > 0$. $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ est défini pour $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. D'autre part $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ si et seulement si $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq k\pi$, ce qui équivaut à $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Finalement $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On applique la formule rappelée en première question avec $u(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. On a

$$u'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \text{ et donc :}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \stackrel{\sin(2a)=2 \sin a \cos a}{=} \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos x} . \end{aligned}$$

Exercice 7

On cherche les solutions éventuelles de l'équation $(E) : 3^x + 4^x = 7^x$ autres que $x = 1$.

- 1 Montrer que (E) peut s'écrire sous la forme $f(x) = 1$ avec une fonction f de la forme $x \mapsto a^x + b^x$.
- 2 Donner les domaines de définition et de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
- 3 Étudier les variations de f et conclure.

- ① Divisons les deux membres par 7^x : on obtient $\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1$ et on pose

$$f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x.$$

- ① Divisons les deux membres par 7^x : on obtient $\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1$ et on pose

$$f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x.$$

- ② f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x \ln \frac{3}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^x \ln \frac{4}{7}$.

- ① Divisons les deux membres par 7^x : on obtient $\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1$ et on pose

$$f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x.$$

- ② f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x \ln \frac{3}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^x \ln \frac{4}{7}$.

- ③ $\left(\frac{3}{7}\right)^x > 0$, $\left(\frac{4}{7}\right)^x > 0$ et d'autre part $\frac{3}{7} < 1$ et $\frac{4}{7} < 1$ donc $f'(x) < 0$.

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$: elle ne prend donc la valeur 1 qu'une seule fois, en $x = 1$.

Il n'y a donc pas d'autre solution que $x = 1$.

Exercice 8

À l'aide d'une étude de fonction, montrer que :

$$\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \quad 3x < 2 \sin x + \tan x .$$

Exercice 8

Exercice 8

À l'aide d'une étude de fonction, montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad 3x < 2 \sin x + \tan x .$$

Posons $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$: f est bien définie (et dérivable) sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$f'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} .$$

$f'(x)$ est donc du signe de $2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1$. En posant $X = \cos x$, on cherche le signe du polynôme : $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

$X = 1$ étant racine de P on a :

$$P(X) = (X - 1)(2X^2 - X - 1) = (X - 1)^2(2X + 1) .$$

Comme $0 < X = \cos x < 1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $f'(x) > 0$ sur cet intervalle. Donc f est strictement croissante. Enfin comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, on conclut que $f(x) > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on obtient l'inégalité proposée.

Exercice 9

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$ possédant n racines réelles distinctes.

- ❶ Montrer que le polynôme dérivé P' possède $n - 1$ racines réelles distinctes.
- ❷ En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

- ① Soient $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les racines réelles de P classées dans l'ordre croissant. Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ la fonction polynomiale associée à P est continue et dérivable sur $[x_k, x_{k+1}]$ et vérifie $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$. Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème de Rolle : il existe un réel $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $P'(y_k) = 0$.

Les réels $y_1, \dots, y_{n-1}$ sont distincts car ils appartiennent à des intervalles disjoints : $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$. Comme a priori P' , de degré $n-1$ admet au plus $n-1$ racines réelles, on conclut que P' possède exactement $n-1$ racines réelles distinctes.

Exercice 9 suite. (Rolle)

- ❶ Soient $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les racines réelles de P classées dans l'ordre croissant. Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ la fonction polynomiale associée à P est continue et dérivable sur $[x_k, x_{k+1}]$ et vérifie $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$. Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème de Rolle : il existe un réel $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $P'(y_k) = 0$.

Les réels $y_1, \dots, y_{n-1}$ sont distincts car ils appartiennent à des intervalles disjoints : $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$. Comme a priori P' , de degré $n-1$ admet au plus $n-1$ racines réelles, on conclut que P' possède exactement $n-1$ racines réelles distinctes.

- ❷ Remarquons d'abord que $P^2 + 1$ n'a pas de racine réelle car $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)^2 + 1 \geq 1 > 0$. Il admet donc uniquement des racines complexes non réelles. On a $(P^2 + 1)' = 2P P'$: ce polynôme possède donc les n racines réelles de P et les $n-1$ racines réelles de P' soit $2n-1$ racines réelles distinctes. Comme $P^2 + 1$ est de degré $2n$, sa dérivée est de degré $2n-1$ donc ne peut avoir d'autre racine que celles trouvées précédemment. En particulier elle n'a pas de racine complexe non réelle. Ainsi $P^2 + 1$ n'a que des racines **simples** dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10. (Accroissements finis)

Exercice 10

- ❶ Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que $|\sin b - \sin a| \leq b - a$.
- ❷ Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que :

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}.$$

- ❸ Soit $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Montrer que :
- $$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \implies y - x \leq \tan y - \tan x \leq 2(y - x).$$
- ❹ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$. Interpréter graphiquement.

Exercice 10 suite. (Accroissements finis)

Toutes les fonctions rencontrées dans cet exercice sont continues et dérivables sur leur domaine, donc le théorème des accroissements finis s'applique sur tout segment inclus dans ce domaine ; nous ne le rappellerons pas à chaque fois.

① On a $(\sin x)' = \cos x$ donc $|(\sin x)'| \leq 1$. L'I.A.F. donne alors

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a| = b - a.$$

Exercice 10 suite. (Accroissements finis)

Toutes les fonctions rencontrées dans cet exercice sont continues et dérivables sur leur domaine, donc le théorème des accroissements finis s'applique sur tout segment inclus dans ce domaine ; nous ne le rappellerons pas à chaque fois.

- ① On a $(\sin x)' = \cos x$ donc $|(\sin x)'| \leq 1$. L'I.A.F. donne alors

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a| = b - a.$$

- ② Le T.A.F appliqué à $\ln$ de dérivée $\frac{1}{x}$ assure l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b - a)$. Comme $0 < a < c < b$ et comme la fonction $1/x$ est décroissante, on a donc : $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ d'où l'inégalité proposée.
Remarquez l'intérêt d'avoir $c \in]a, b[$ afin d'obtenir l'inégalité stricte.

Exercice 10 suite. (Accroissements finis)

Toutes les fonctions rencontrées dans cet exercice sont continues et dérivables sur leur domaine, donc le théorème des accroissements finis s'applique sur tout segment inclus dans ce domaine ; nous ne le rappellerons pas à chaque fois.

- ① On a $(\sin x)' = \cos x$ donc $|(\sin x)'| \leq 1$. L'I.A.F. donne alors

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a| = b - a.$$

- ② Le T.A.F appliqué à $\ln$ de dérivée $\frac{1}{x}$ assure l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b - a)$. Comme $0 < a < c < b$ et comme la fonction $1/x$ est décroissante, on a donc : $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ d'où l'inégalité proposée.
Remarquez l'intérêt d'avoir $c \in]a, b[$ afin d'obtenir l'inégalité stricte.

- ③ $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$. Or, on a $-1 \leq \tan x \leq 1$ sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Donc $1 \leq (\tan x)' \leq 2$ sur ce même intervalle. L'I.A.F. entraîne alors l'inégalité proposée.

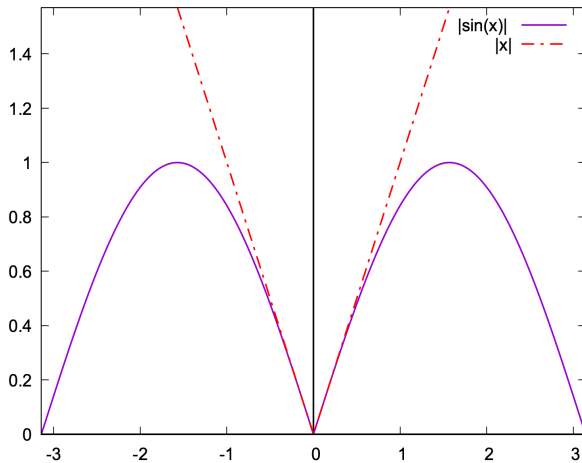
Exercice 10 suite. (Accroissements finis)

Toutes les fonctions rencontrées dans cet exercice sont continues et dérivables sur leur domaine, donc le théorème des accroissements finis s'applique sur tout segment inclus dans ce domaine ; nous ne le rappellerons pas à chaque fois.

- ④ Remarquons que $\sin(0) = 0$, donc on a $\sin(x) = \sin(x) - \sin(0)$. Comme $(\sin x)' = \cos x$ et $|\cos x| \leq 1$, l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle de bornes 0 et x (ordre inconnu) implique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|.$$

Exercice 10 suite. (Accroissements finis)



Exercice 11 (Continuité, limite d'une dérivée)

Exercice 11

Montrer que pour tout réel c , il existe un unique couple (a, b) de réels, que l'on déterminera, tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Avec ces valeurs de a et b , donner l'allure de sa courbe représentative quand $c = 0$ et quand $c = 1/2$.

Exercice 11 suite. (Continuité, limite d'une dérivée)

La fonction est continue sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ et dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce dernier intervalle car f' y est continue. Sur $]0, 1[$ on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et sur $]1, +\infty[$ on a $f'(x) = 2ax + b$. Il se pose donc la question de la continuité et de la dérivabilité en 1.

Exercice 11 suite. (Continuité, limite d'une dérivée)

Continuité : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = 1 = f(1)$ et

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx + c = a + b + c$ donc f est continue en 1 si et seulement si $a + b + c = 1$.

Exercice 11 suite. (Continuité, limite d'une dérivée)

Continuité : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = 1 = f(1)$ et

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx + c = a + b + c$ donc f est continue en 1 si et seulement si $a + b + c = 1$.

Dérivabilité : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ et

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2ax + b = 2a + b$. La condition $2a + b = \frac{1}{2}$, en sus de la précédente, assure la dérivabilité de f en 1 grâce au théorème (d'existence) de la limite (en un point) d'une dérivée. De plus c'est une C.N.S. pour que f' soit continue en 1 (égalité des limites de f' à droite et à gauche en 1).

En résumé :

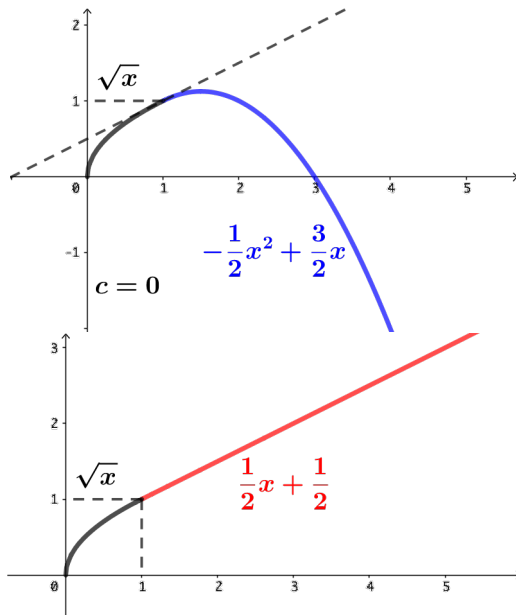
$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*) \iff \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a + b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le réel c étant donné, la solution unique est donnée par $a = c - \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2} - 2c$.

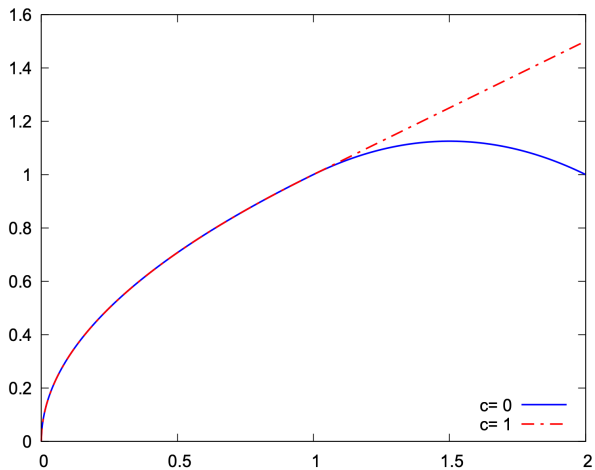
Exercice 11 suite (Continuité, limite d'une dérivée)

Pour $c = 0$ on a $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$ pour $x > 1$ (arc de parabole) et pour $c = \frac{1}{2}$ on a $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ pour $x > 1$ (demi-droite). Dans ce dernier cas, la demi-droite est portée par la tangente en 1.

Exercice 11 suite. (Continuité, limite d'une dérivée)



Exercice 11 suite. (Continuité, limite d'une dérivée)



Exercice 12 (Règle de l'Hôpital)

Exercice 12

Retrouver à l'aide de la règle de l'Hôpital les limites suivantes, étudiées au TD précédent :

$$f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{3x^2 - 4x + 1} \text{ en } 1 \text{ et } \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \text{ en } 4$$

- ❶ Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 1. On applique la règle de l'Hôpital

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{9x^2 - 14x + 5}{6x - 4} = 0.$$

Exercice 12 suite. (Règle de l'Hôpital)

- ❶ Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 1. On applique la règle de l'Hôpital

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{9x^2 - 14x + 5}{6x - 4} = 0.$$

Le numérateur et le dénominateur s'annulent en $1/3$. La règle de l'Hôpital entraîne

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1/3 \\ x \neq 1/3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1/3 \\ x \neq 1/3}} \frac{9x^2 - 14x + 5}{6x - 4} = -\frac{2}{3}.$$

Exercice 12 suite. (Règle de l'Hôpital)

- ❶ Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 1. On applique la règle de l'Hôpital

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{9x^2 - 14x + 5}{6x - 4} = 0.$$

Le numérateur et le dénominateur s'annulent en $1/3$. La règle de l'Hôpital entraîne

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1/3 \\ x \neq 1/3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1/3 \\ x \neq 1/3}} \frac{9x^2 - 14x + 5}{6x - 4} = -\frac{2}{3}.$$

- ❷ Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 4. On applique la règle de l'Hôpital

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x \neq 4}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x \neq 4}} \frac{1/(2\sqrt{x})}{1} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 13

Soient f et u des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f \circ u$ est deux fois dérivable et donner une expression de $(f \circ u)''$ en fonction des dérivées premières et secondes de f et u .

On a successivement :

$$(f \circ u)' = (f' \circ u) u'$$

$$(f \circ u)'' = (f' \circ u)' u' + (f' \circ u) u'' = (f'' \circ u) u'^2 + (f' \circ u) u''.$$

Exercice 14 : asymptote et accroissements finis

- 1 Soit f la fonction définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.
- a Donner le domaine de définition de cette fonction ainsi que les limites aux bornes du domaine.
 - b Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$. **Indication** : poser $x = \frac{1}{h}$ puis reconnaître un taux d'accroissement.
 - c Montrer que la courbe représentative de f possède, quand $x \rightarrow +\infty$, une asymptote oblique dont on donnera une équation cartésienne.
- 2 On reprend la fonction f de la question 1.
- a Calculer la dérivée de f .
 - b Soit $x > 0$. Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x, x+1]$.
 - c Quelle est la limite de $(1 - \frac{1}{x}) e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$? En déduire, avec la question b précédente, la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x)$.
 - d Retrouver ce dernier résultat en utilisant celui de c.

Exercice 14 : suite

- 1 Soit f la fonction définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 14 : suite

❶ Soit f la fonction définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

a On a immédiatement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. En posant $x = \frac{1}{t}$ on obtient :

Exercice 14 : suite

❶ Soit f la fonction définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

a On a immédiatement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. En posant $x = \frac{1}{t}$ on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t}{t} = -\infty,$$

❶ Soit f la fonction définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

a On a immédiatement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. En posant $x = \frac{1}{t}$ on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t}{t} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

❶ Soit f la fonction définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

a On a immédiatement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. En posant $x = \frac{1}{t}$ on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t}{t} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t} = 0^-,$$

❶ Soit f la fonction définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

a On a immédiatement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. En posant $x = \frac{1}{t}$ on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t}{t} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t} = 0^-,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty.$$

❶ Soit f la fonction définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

a On a immédiatement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. En posant $x = \frac{1}{t}$ on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t}{t} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t} = 0^-,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty.$$

b En posant $x = \frac{1}{h}$ on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h}$.

C'est la limite quand $h \rightarrow 0$ du taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et h .

On obtient donc la dérivée en zéro de l'exponentielle, d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1.$$

C On a d'une part :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1,$$

ensuite

$$f(x) - x = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

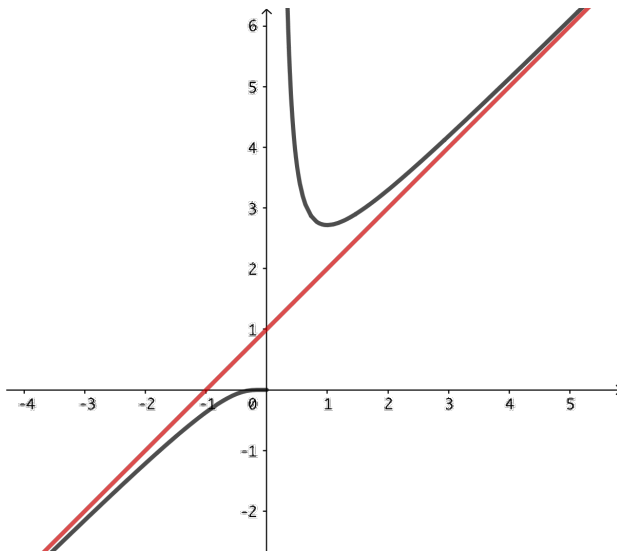
donc d'après le résultat de 2b on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 1.$$

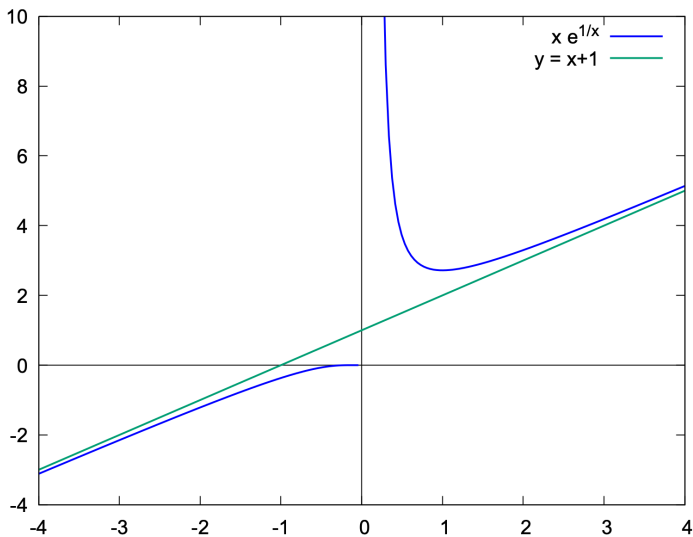
La courbe présente donc, quand $x \rightarrow +\infty$, une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$.

NB : on a le même résultat quand $x \rightarrow -\infty$. On pourra, à titre d'exercice, terminer l'étude de la fonction et aboutir au tracé ci-dessous. On peut prolonger f par continuité à gauche en zéro en posant $f(0) = 0$; la courbe admet alors en 0 une demi-tangente à gauche d'équation $y = 0, x \leq 0$.

Exercice 14 : suite



Exercice 14 : suite



Exercice 14 : suite

- 2 On reprend la fonction f de la question 1 définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 14 : suite

2 On reprend la fonction f de la question 1 définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

a $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \right)$. Donc on a : $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}}$.

2 On reprend la fonction f de la question 1 définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

a $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \right)$. Donc on a : $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}}$.

b Soit $x > 0$. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ (puisque dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ qui contient $[x, x+1]$). D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c_x \in]x, x+1[, \quad f(x+1) - f(x) = (x+1 - x) f'(c_x) = \left(1 - \frac{1}{c_x} \right) e^{\frac{1}{c_x}}$$

Exercice 14 : suite

2 On reprend la fonction f de la question 1 définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

a $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \right)$. Donc on a : $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}}$.

b Soit $x > 0$. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ (puisque dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ qui contient $[x, x+1]$). D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c_x \in]x, x+1[, \quad f(x+1) - f(x) = (x+1 - x) f'(c_x) = \left(1 - \frac{1}{c_x} \right) e^{\frac{1}{c_x}}$$

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - t) e^t = 1$ (ce n'est pas une forme indéterminée!).
Comme $c_x > x$ on en déduit que $c_x \rightarrow +\infty$ et ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = 1.$$

Exercice 14 : suite

2 On reprend la fonction f de la question 1 définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

a $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \right)$. Donc on a : $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}}$.

b Soit $x > 0$. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ (puisque dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ qui contient $[x, x+1]$). D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c_x \in]x, x+1[, \quad f(x+1) - f(x) = (x+1 - x) f'(c_x) = \left(1 - \frac{1}{c_x} \right) e^{\frac{1}{c_x}}$$

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - t) e^t = 1$ (ce n'est pas une forme indéterminée!).
Comme $c_x > x$ on en déduit que $c_x \rightarrow +\infty$ et ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = 1.$$

d On déduit du résultat de 1c qu'il existe une fonction φ de limite nulle en $+\infty$ telle que $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$. Alors $f(x+1) - f(x) = 1 + \varphi(x+1) - \varphi(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$.