MATH103_MISPI
TD du chapitre 6 : Limites, continuité

L1 MISPI

Exercice 2

Étudier la limite de la fonction f aux points proposés (ou les limites à gauche et à droite s'il y a lieu) :

1) $f(x) = (1-3x)(2x-1)^2$ en $-\infty$

2) $f(x) = \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2}{x-1}$ en $+\infty$, 1

3) $f(x) = x^2 - 5x^4 + 3x$ en $+\infty, -\infty$

4) $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{2x-1}$ en $+\infty, -\infty$

5) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$ en 1, $\dfrac{1}{3}$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+3}$ en $-\infty$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ en 4

1. On a $\lim_{x \to -\infty} (1-3x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} (2x-1)^2 = +\infty$ donc

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-3x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)^2=+\infty$ donc
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2}=+\infty.$
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2}{x-1}=+\infty$ et
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2}{x-1}=-\infty.$
En particulier, $\lim\limits_{1} f$ n'existe pas.

1. On a $\lim_{x\to-\infty}(1-3x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(2x-1)^2=+\infty$ donc
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

2. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2}=+\infty.$
$\lim_{x\to1}\dfrac{x-1}{2}=0$ donc $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\dfrac{2}{x-1}=+\infty$ et
$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\dfrac{2}{x-1}=-\infty.$
En particulier, $\lim_1 f$ n'existe pas.

3. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}-5x^4=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-5x^4=-\infty.$

1. On a $\lim_{x\to-\infty}(1-3x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(2x-1)^2 = +\infty$ donc
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{2} = +\infty.$
$\lim_{x\to1} \dfrac{x-1}{2} = 0$ donc $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \dfrac{2}{x-1} = +\infty$ et
$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \dfrac{2}{x-1} = -\infty.$
En particulier, $\lim_1 f$ n'existe pas.

3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -5x^4 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -5x^4 = -\infty.$

4. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{2} = +\infty.$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{5x}{2} = -\infty.$

5. Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 1. On les factorise par $(x-1)$ par division euclidienne. On trouve alors
$f(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2-4x+1)}{(x-1)(3x-1)} = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x-1}$ et on obtient
$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2-4x+1}{3x-1} = 0.$
On a vu que $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x-1}$ (sur son domaine de définition). Or le numérateur et le dénominateur s'annulent en $1/3$. Le numérateur se factorise en $3x^2-4x+1 = 3(x-1)(x-1/3)$. Finalement sur son domaine de définition, $f(x) = x-1$. On a donc :

$$\lim_{x\to1/3} f(x) = -2/3.$$

Exercice 2 suite

5. Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 1. On les factorise par $(x-1)$ par division euclidienne. On trouve alors
$f(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2-4x+1)}{(x-1)(3x-1)} = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x-1}$ et on obtient
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{3x-1} = 0.$
On a vu que $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x-1}$ (sur son domaine de définition). Or le numérateur et le dénominateur s'annulent en $1/3$. Le numérateur se factorise en $3x^2-4x+1 = 3(x-1)(x-1/3)$. Finalement sur son domaine de définition, $f(x) = x-1$. On a donc :
$$\lim_{x\to 1/3} f(x) = -2/3.$$

6. $\mathcal{D}_f = (]-\infty,-2] \cup [-1,+\infty[) \setminus \{-3\}$. On met le terme dominant sous le radical (x^2) en facteur :
$$\sqrt{x^2+3x+2} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

6. (suite) et donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{3+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{3}.$$

6. (suite) et donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{3+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{3}.$$

7. $\mathcal{D}_f = [0,4[\cup]4,+\infty[$. Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 4. En écrivant $x-4 = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$, on obtient :
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \underset{x\to 4}{\to} \frac{1}{4}$$

Exercice 3

Étudier la limite de la fonction f aux points proposés :

1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{4x^3+2x-1}{5x^4+3x+2}\right)$ en $+\infty$

2) $f(x) = x - \ln x$ en $+\infty$, 0

3) $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x + x$ en $+\infty$

4) $f(x) = 2x - 1 - e^x$ en $+\infty$, $-\infty$

5) $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ en $+\infty$, $-\infty$

6) $f(x) = x^{-3}e^x$ en $+\infty$

7) $f(x) = \dfrac{2^x}{x^3}$ en $+\infty$

8) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ en 0.

Exercice 3 suite

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+2x-1}{5x^4+3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3}{5x^4} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (théorème sur la limite d'une fonction composée).

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+2x-1}{5x^4+3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3}{5x^4} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (théorème sur la limite d'une fonction composée).

2. En $+\infty$ il y a indétermination. On écrit $f(x) = x\,(1 - \dfrac{\ln x}{x})$, ce qui lève l'indétermination car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (*limite de référence*). On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

On a directement $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln x) = +\infty$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+2x-1}{5x^4+3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3}{5x^4} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (théorème sur la limite d'une fonction composée).

2. En $+\infty$ il y a indétermination. On écrit $f(x) = x\,(1 - \dfrac{\ln x}{x})$, ce qui lève l'indétermination car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (*limite de référence*). On a donc
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
On a directement $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln x) = +\infty$.

3. On factorise par le terme dominant (croissances comparées) :
$f(x) = x\left(\dfrac{(\ln x)^2}{x} - \dfrac{\ln x}{x} + 1\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^{1/2}}\right)^2 = 0$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On voit ainsi que les résultats de croissances comparées justifient le raccourci consistant à écrire $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 - \ln x + x = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

4. En $+\infty$, par croissances comparées on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -e^x = -\infty$.
On a directement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x - 1 = -\infty$.

4. En $+\infty$, par croissances comparées on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -e^x = -\infty$.
   On a directement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x-1 = -\infty$.
5. On a $f(x) = \dfrac{e^x\left(2-e^{-x}\right)}{e^x\left(1+e^{-x}\right)} = \dfrac{2-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
   (*On aurait pu appliquer le théorème de composition des limites avec* $x \mapsto e^x$ *et* $y \overset{g}{\mapsto} \dfrac{2y-1}{y+1}$.)

4. En $+\infty$, par croissances comparées on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -e^x = -\infty$.
   On a directement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x-1 = -\infty$.
5. On a $f(x) = \dfrac{e^x\left(2-e^{-x}\right)}{e^x\left(1+e^{-x}\right)} = \dfrac{2-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
   (*On aurait pu appliquer le théorème de composition des limites avec* $x \mapsto e^x$ *et* $y \overset{g}{\mapsto} \dfrac{2y-1}{y+1}$.)
6. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. En $+\infty$, par croissances comparées on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -e^x = -\infty$.
   On a directement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x - 1 = -\infty$.
5. On a $f(x) = \dfrac{e^x(2-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{2-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
   $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
   (*On aurait pu appliquer le théorème de composition des limites avec* $x \mapsto e^x$ *et* $y \overset{g}{\mapsto} \dfrac{2y-1}{y+1}$.)
6. Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
7. Par définition on a $2^x = e^{\ln(2)x}$. Donc $f(x) = \dfrac{e^{\ln(2)x}}{x^3} = \left(\dfrac{e^x}{x^{3/\ln 2}}\right)^{\ln 2}$.
   Par croissances comparées et comme $\ln(2) > 0$, on obtient
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

8. Comme pour $x \neq 0$, $|\sin(1/x)| \leq 1$, on a $0 \leq |f(x)| \leq |x|$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (par le *théorème d'encadrement*).

Exercice 4

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 2 + \dfrac{x+1}{x-1}$. Déterminer toutes les asymptotes à sa courbe représentative ainsi que les positions relatives de la courbe par rapport à ses asymptotes.
2. La fonction définie par $g(x) = 2x + 1 - \sqrt{x}$ admet-elle une asymptote en $+\infty$?

1. Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Asymptotes verticales.
On a

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale au graphe de f, noté $\mathcal{C}_f$.

Asymptote en $\pm\infty$.

On traite tout d'abord la limite en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
On forme maintenant le quotient $f(x)/x$ et on regarde la limite en $+\infty$. On a

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\frac{x+1}{x-1}$$

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. On obtient une *direction asymptotique* suivant la droite $y = x$.
On forme maintenant $f(x) - x$ pour déterminer l'ordonnée à l'origine *éventuelle* de l'asymptote *éventuelle*. On a

$$f(x) - x = -2 + \frac{x+1}{x-1}$$

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$, il vient $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x = -1$.
On conclut que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote (oblique) à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Pour connaître la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote, on étudie le signe de $f(x)-(x-1)$.
On a $f(x)-(x-1) = -1+\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{x-1} \geqslant 0$ en $+\infty$. Donc le graphe de f est au-dessus de l'asymptote d'équation $y=x-1$ en $+\infty$.

<u>Etude en $-\infty$</u>.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x-2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
On forme maintenant le quotient $f(x)/x$ et on regarde la limite en $-\infty$. On a déjà calculé $f(x)/x$: $\dfrac{f(x)}{x} = 1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x}\dfrac{x+1}{x-1}$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$. On obtient une *direction asymptotique* suivant la droite $y=x$.
On forme maintenant $f(x)-x$ pour déterminer l'ordonnée à l'origine de l'asymptote éventuelle. On a

$$f(x)-x = -2+\frac{x+1}{x-1}$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x = -1$. La droite d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. Pour connaître la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote, on étudie le signe de $f(x)-(x-1)$.
On a $f(x)-(x-1) = -1+\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{x-1} \leqslant 0$ en $-\infty$.
Donc le graphe de f est au-dessous de l'asymptote oblique d'équation $y=x-1$ en $-\infty$.

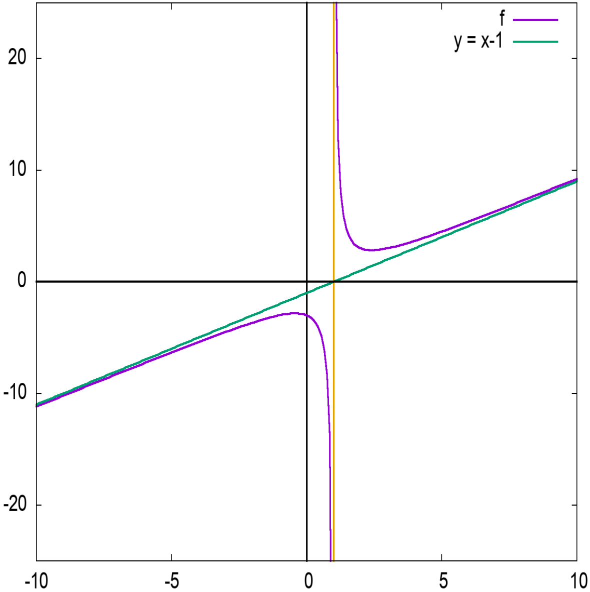
Exercice 4 suite

Méthode plus rapide : on peut remarquer que

$$f(x) = x - 2 + \frac{x-1+2}{x-1} = x - 2 + 1 + \frac{2}{x-1} = x - 1 + \varphi(x)$$

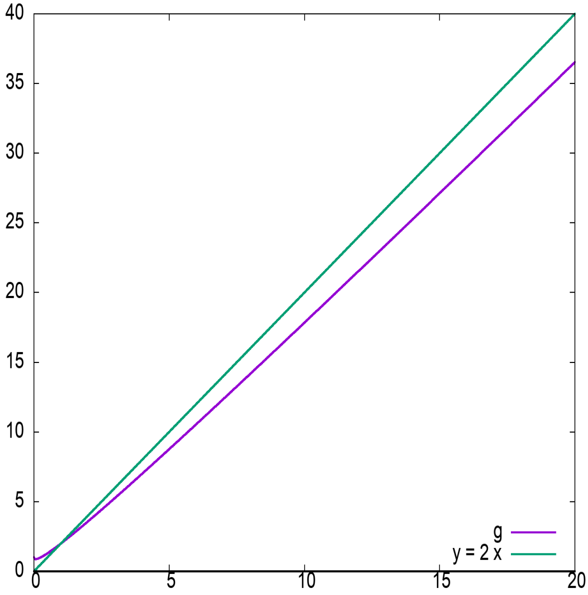
avec $\varphi(x) = \dfrac{2}{x-1} \to 0^{\pm}$ quand $x \to \pm\infty$ et appliquer la définition.

Exercice 4 suite



2. $\mathcal{D}_g = [0, +\infty[$.
On a
$$g(x) = x\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
On forme maintenant le quotient $g(x)/x$.
On a
$$\frac{g(x)}{x} = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$.
On forme maintenant $g(x) - 2x$ et on étudie la limite en $+\infty$.
On obtient
$$g(x) - 2x = 1 - \sqrt{x}$$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - 2x = -\infty$.
On conclut que $\mathcal{C}_g$ n'admet pas d'asymptote (oblique mais une *branche parabolique de direction* $y = 2x$ *en* $+\infty$).

Exercice 4 suite



Exercice 5

Étudier la limite de la fonction f aux points proposés :

1. $f(x) = x^{-4}(\ln x + e^x)$ en $+\infty$
2. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x^3}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$
4. $f(x) = \dfrac{2^x}{x^3}$ en $+\infty$
5. $f(x) = \dfrac{3^x + x^2}{\ln x + x^2}$ en $+\infty$

1. $f(x) = x^{-4}(\ln x + e^x)$ en $+\infty$.
   $x^{-4}(\ln x + e^x) = \dfrac{\ln x}{x^4} + \dfrac{e^x}{x^4}$ et d'après les limites comparées on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^4} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^4} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1. $f(x) = x^{-4}(\ln x + e^x)$ en $+\infty$.
$x^{-4}(\ln x + e^x) = \dfrac{\ln x}{x^4} + \dfrac{e^x}{x^4}$ et d'après les limites comparées on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^4} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^4} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x^3}$ en $+\infty$.
$x^3 = 8\left(\dfrac{x}{2}\right)^3$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x^3} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{e^u}{8u^3} = +\infty$.

1. $f(x) = x^{-4}(\ln x + e^x)$ en $+\infty$.
$x^{-4}(\ln x + e^x) = \dfrac{\ln x}{x^4} + \dfrac{e^x}{x^4}$ et d'après les limites comparées on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^4} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^4} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x^3}$ en $+\infty$.
$x^3 = 8\left(\dfrac{x}{2}\right)^3$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x^3} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{e^u}{8u^3} = +\infty$.
3. $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. $f(x) = \dfrac{2^x}{x^3}$ en $+\infty$.
Les résultats sur les croissances comparées sont valables en remplaçant e^x par a^x avec $a > 1$ mais on peut raisonner aussi de cette façon :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln 2}}{(x\ln 2)^3}(\ln 2)^3 = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u^3}(\ln 2)^3 = +\infty$$

d'après les limites comparées et sachant que $\ln 2 > 0$.

4. $f(x) = \dfrac{2^x}{x^3}$ en $+\infty$.
Les résultats sur les croissances comparées sont valables en remplaçant e^x par a^x avec $a > 1$ mais on peut raisonner aussi de cette façon :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln 2}}{(x\ln 2)^3}(\ln 2)^3 = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u^3}(\ln 2)^3 = +\infty$$

d'après les limites comparées et sachant que $\ln 2 > 0$.

5. $f(x) = \dfrac{3^x + x^2}{\ln x + x^2}$ en $+\infty$.
On factorise numérateur et dénominateur par le terme dominant :
$\dfrac{3^x + x^2}{\ln x + x^2} = \dfrac{3^x(1 + \frac{x^2}{3^x})}{x^2(1 + \frac{\ln x}{x^2})}$.
Chacune des parenthèses ayant pour limite 1 en $+\infty$ on a donc
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^x}{x^2} = +\infty$.

Exercice 6

1. Montrer que $\ln(2) < 1$ (On rappelle que $e \simeq 2,718$).
2. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x - x^2}{e^x - 5}$.
3. On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x + 2 + \frac{2^x - x^2}{e^x - 5}$. Montrer que la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une asymptote que l'on précisera.

1. La fonction ln est **strictement croissante** et $2 < e$ donc $\ln(2) < \ln(e) = 1$.
2. Commençons par factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme dominant.

$$\frac{2^x - x^2}{e^x - 5} = \frac{2^x(1 - \frac{x^2}{2^x})}{e^x(1 - \frac{5}{e^x})} = \frac{e^{x\ln 2}(1 - \frac{x^2}{2^x})}{e^x(1 - \frac{5}{e^x})} = e^{x(\ln 2 - 1)}\frac{(1 - \frac{x^2}{2^x})}{(1 - \frac{5}{e^x})}.$$

On a premièrement $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{e^x} = 0$.

Puis d'après les croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2^x} = 0$. On obtient donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(1 - \frac{x^2}{2^x})}{(1 - \frac{5}{e^x})} = 1$$

D'autre part, comme $\ln 2 - 1 < 0$ (première question), $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x(\ln 2 - 1)} = 0$.

Finalement, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x - x^2}{e^x - 5} = 0}$.

4. Posons $\varphi(x) = \dfrac{2^x - x^2}{e^x - 5}$. On a alors

$$f(x) = 3x + 2 + \varphi(x) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 \ .$$

Donc la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 3x + 2$.

De plus d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x - x^2 = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0_+$.

Finalement la courbe représentative de la fonction f est au dessus de l'asymptote.

Exercice 7

On considère la fonction définie par $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$. Déterminer son domaine de définition et étudier les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que la position relative de la courbe et de ses asymptotes.

Indication : on pourra utiliser, après l'avoir justifié, que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ x + \ln(1 + 2e^{-2x}) = -x + \ln(2) + \ln(1 + \frac{1}{2}e^{2x})$.

1. Comme $1 + 2e^{-2x} > 0$, f est définie sur $\mathbb{R}$ i.e. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

1. Comme $1 + 2e^{-2x} > 0$, f est définie sur $\mathbb{R}$ i.e. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Asymptote en $+\infty$.
   Posons $\varphi(x) = \ln(1 + 2e^{-2x})$. On a alors
   $$f(x) = x + \varphi(x) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0\ .$$
   Donc la droite D_1 d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   De plus $f(x) - x = \ln(1 + 2e^{-2x}) > 0$ car $1 + 2e^{-2x} > 1$.
   Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de D_1.

3. Asymptote en $-\infty$.

   On a :

$$f(x) = x + \ln(2e^{-2x}(e^{2x} + \frac{1}{2})) = x - 2x + \ln(2) + \ln(1 + \frac{1}{2}e^{2x})$$
$$= -x + \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{2x}\right) .$$

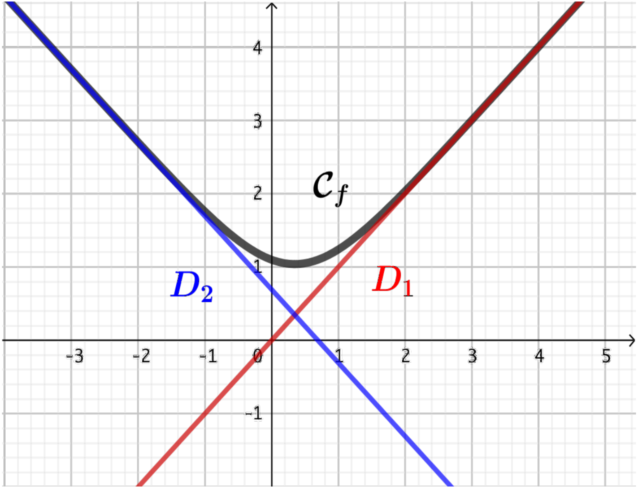
   En posant donc $\varphi(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{2x}\right)$, on a

$$f(x) = -x + \ln(2) + \varphi(x) \text{ avec } \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0 .$$

   Donc la droite D_2 d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

   De plus $f(x) - (-x + \ln(2)) = \ln(1 + \frac{1}{2}e^{2x}) > 0$.

   Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de D_2.



4
3
2
1
0
-1
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
$\mathcal{C}_f$
D_2
D_1

Exercice 7 : suite