

Corrigé de la feuille 5 - Fonctions usuelles

Exercice 1. Questions de cours

1. Définition des fonctions puissances. Qu'est-ce que $\pi^{\sqrt{2}}$? $(-2)^{\sqrt{2}}$? Définition de $\sqrt[n]{x}$ pour $n \geq 3$?
2. Donner la définition d'une fonction périodique. Exemples ?
3. Définition et dérivée de la fonction tangente (sous deux formes).
4. (Trigo) Retrouver rapidement les formules de transformation de produit en somme et de somme en produit.

Solution. Noter que $(-2)^{\sqrt{2}}$ n'est pas défini. Pour le reste, se reporter au polycopié.

Exercice 2. Soient les fonctions $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[3]{x} \end{cases}$ et $g : \begin{cases} [-\pi, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{cases}$.

On note $h = f \circ g$ et $k = g \circ f$. Préciser les domaines de définition de f , g , h , k ainsi que les expressions de $h(x)$ et $k(x)$.

Solution. $\mathcal{D}_f = [0, +\infty[$, $\mathcal{D}_g = [-\pi, \pi]$,
 $\mathcal{D}_h = \{x \in [-\pi, \pi] ; \cos x \geq 0\} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $h(x) = \sqrt[3]{\cos x}$
 $\mathcal{D}_k = \{x \in [0, +\infty[; \sqrt[3]{x} \in [-\pi, \pi]\} = [0, \pi^3]$, $k(x) = \cos \sqrt[3]{x}$.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions réelles impaires définies sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de $g \circ f$ et de fg .

Solution. Les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}$, donc ont un domaine symétrique par rapport à 0. De plus :

$\forall x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -(g \circ f)(x)$ donc $g \circ f$ est impaire.

$\forall x \in \mathbb{R}, (fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (fg)(x)$ donc fg est paire.

Exercice 4. Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2|-x+3| - \sqrt{x^2-2x+1} \end{cases}$.

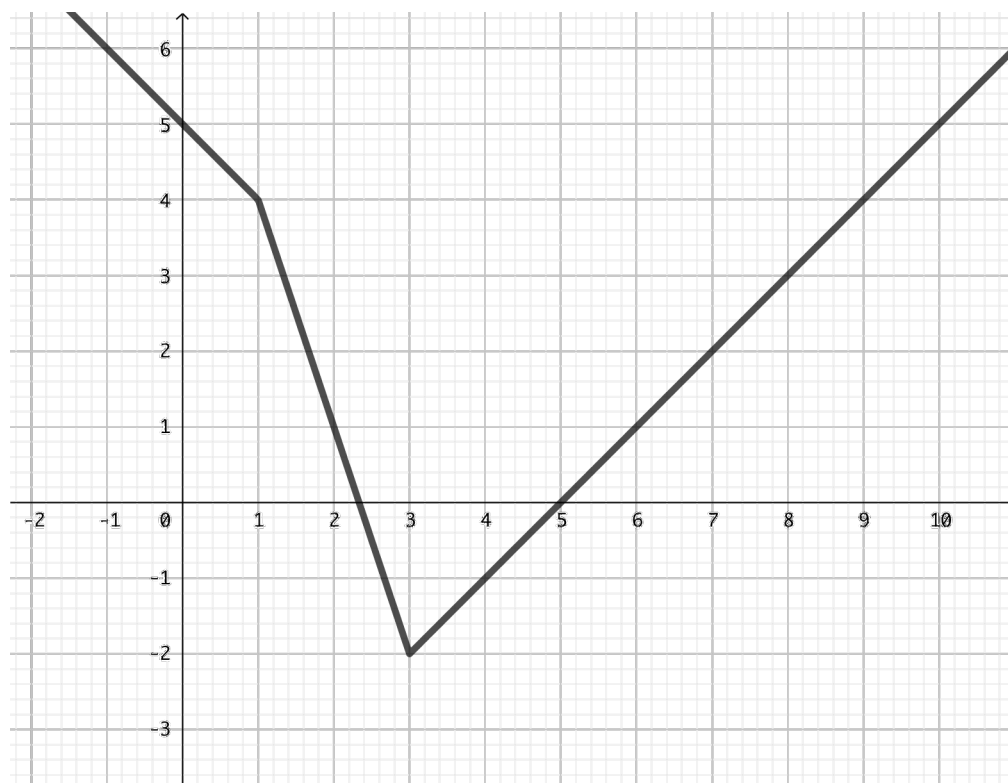
1. Quel est le domaine de cette fonction ? Étudier sa continuité.
2. Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue ni radical, suivant les valeurs de x . Tracer la courbe représentative de f .

Solution.

1. On remarque que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
 Les fonctions racine carrée et valeur absolue sont continues sur leur domaine, les fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$, donc par les théorèmes usuels on conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Grâce à la remarque précédente on a $f(x) = 2|-x+3| - |x-1|$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x+3$		+	2	+	0	-	
$x-1$		-	0	+	2	+	
$ -x+3 $		$-x+3$	2	$-x+3$	0	$x-3$	
$ x-1 $		$-x+1$	0	$x-1$	2	$x-1$	
$f(x)$		$-x+5$	4	$-3x+7$	-2	$x-5$	

On obtient donc une fonction affine par morceaux dont voici la représentation graphique :

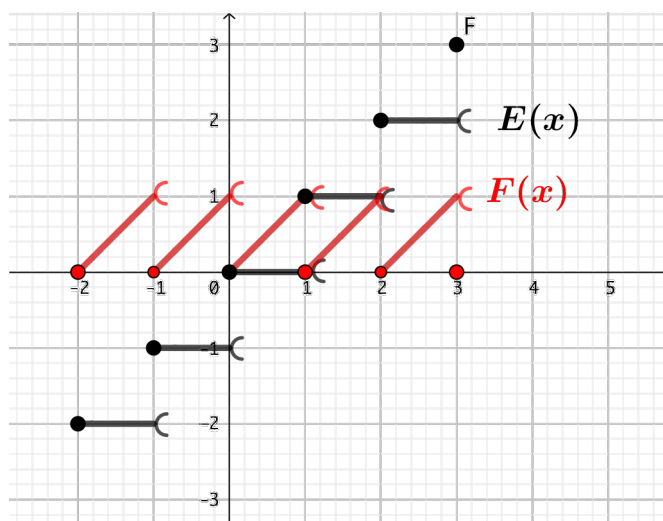


Exercice 5. Pour tout réel x on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, définie par :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Représenter graphiquement, sur l'intervalle $[-2, 3]$, les fonctions E et F définies sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = \lfloor x \rfloor$ et $F(x) = x - \lfloor x \rfloor$ (partie fractionnaire de x). Montrer que F est 1-périodique.

Solution. La fonction E a été représentée dans le cours. Pour la fonction F (partie fractionnaire d'un réel) il suffit de remarquer que sur tout intervalle $[n, n + 1[$ où $n \in \mathbb{Z}$, $F(x) = x - n \in [0, 1[$.



Rappelons que la partie entière de x , notée ici $E(x)$, est caractérisé par :

$$E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad E(x) \leq x < E(x) + 1$$

on a donc immédiatement $E(x) + 1 \in \mathbb{Z}$ et $E(x) + 1 \leq x + 1 < (E(x) + 1) + 1$, ce qui prouve que $E(x + 1) = E(x) + 1$.

F vérifie donc : $F(x + 1) = (x + 1) - E(x + 1) = (x + 1) - (E(x) + 1) = x - E(x) = F(x)$. Elle est donc 1-périodique.

Exercice 6. Donner, sans calculs (ni calculatrice), l'allure des représentations graphiques des fonctions a, b, c, d, e, f, g, h définies par :

$$\begin{aligned} a(x) &= x|x| & b(x) &= -(x-1)^2 & c(x) &= x^2|x| & d(x) &= \sqrt{x+2} + 1 \\ e(x) &= \frac{1}{x-2} & f(x) &= e^{-x} & g(x) &= \ln(|x|) & h(x) &= |\sin x| \end{aligned}$$

Solution. Le principe est de se ramener à des fonctions usuelles simples.

La fonction $a : a(x) = x^2$ si $x \geq 0$ et $a(x) = -x^2$ sinon,

La fonction $c : c(x) = x^3$ si $x \geq 0$ et $a(x) = -x^3$ sinon. En fait $a(x) = |x^3|$,

La fonction $f : c$ 'est une fonction usuelle.

Pour les autres, on utilise les principes suivants :

Si f a pour courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors

— $\varphi : \varphi(x) = f(x-a)$ admet pour courbe représentative le translaté de $\mathcal{C}$ par le vecteur $a\vec{i}$,

— $\psi : \psi(x) = f(x) + b$ admet pour courbe représentative le translaté de $\mathcal{C}$ par le vecteur $b\vec{j}$

On peut bien sûr combiner les deux. Ceci s'applique aux fonctions b, d et e . D'autre part, avec un repère orthogonal :

— si le domaine de f est inclus dans $\mathbb{R}_+$ ou dans $\mathbb{R}_-$, $\varphi : \varphi(x) = f(|x|)$ admet pour courbe représentative la réunion de $\mathcal{C}$ avec son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,

— $\psi : \psi(x) = |f(x)|$ admet pour courbe représentative la réunion de $\mathcal{C} \cap \{y \geq 0\}$ avec le symétrique de $\mathcal{C} \cap \{y \leq 0\}$ par rapport à l'axe des abscisses.

Ceci s'applique aux fonctions a, g et h .

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Simplifier $A = \frac{a^3}{\sqrt{a}}$, $B = \frac{a^{2/3}}{\sqrt[3]{a}}$, $C = (a^2)^{2/3} \times (a^4)^{2/3} \times (\sqrt[3]{a})^2$.

Solution. $A = a^2\sqrt{a}$, $B = \frac{a^{2/3}}{a^{1/3}} = a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$, $C = a^{4/3} \times a^{8/3} \times a^{2/3} = a^{14/3}$ ou, si on préfère, $C = a^4\sqrt[3]{a^2}$.

Exercice 8.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$ et $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-3x} = 49$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $(2^x - 3)(3^x - 2) \leq 0$ et $5^x - 3 \times 5^{-x} \geq -2$.

Solution.

1. Pour la première équation on pose $X = 8^{3x}$ et on résout $X^2 - 3X - 4 = 0 : X = -1$ ou $X = 4$. Comme $8^{3x} = e^{3x \ln 8} > 0$ l'équation équivaut à $8^{3x} = 4$ soit $3x \ln 8 = 2 \ln 2$. Donc

$$x = \frac{2 \ln 2}{3 \ln 8} = \frac{2 \ln 2}{9 \ln 2} = \frac{2}{9}.$$

La deuxième équation équivaut à $(x^2 - 3x) \ln \frac{1}{7} = \ln(49) (= 2 \ln 7)$, soit $x^2 - 3x + 2 = 0$ car $\ln \frac{1}{7} = -\ln 7$. L'ensemble des solutions est donc $\{1, 2\}$.

2. Première inéquation :

$$(2^x - 3)(3^x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 3 \geq 0 \\ \text{et} \\ 3^x - 2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2^x - 3 \leq 0 \\ \text{et} \\ 3^x - 2 \geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Donc il faut résoudre } \begin{cases} 2^x \geq 3 \\ \text{et} \\ 3^x \leq 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2^x \leq 3 \\ \text{et} \\ 3^x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{L'inéquation est donc équivalente à } \begin{cases} x \geq \frac{\ln 3}{\ln 2} \\ \text{et} \\ x \leq \frac{\ln 2}{\ln 3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leq \frac{\ln 3}{\ln 2} \\ \text{et} \\ x \geq \frac{\ln 2}{\ln 3} \end{cases}$$

Or la fonction $\ln$ est croissante, donc $\ln 2 \leq \ln 3$ et donc $\frac{\ln 2}{\ln 3} \leq \frac{\ln 3}{\ln 2}$

Il n'y a donc pas de solution pour $\begin{cases} x \geq \frac{\ln 3}{\ln 2} \\ \text{et} \\ x \leq \frac{\ln 2}{\ln 3} \end{cases}$ et finalement on trouve $S = \left[\frac{\ln 2}{\ln 3}, \frac{\ln 3}{\ln 2} \right]$.

Deuxième inéquation : on pose $X = 5^x$ et on est ramené à résoudre $X - \frac{3}{X} \geq -2$, soit $X^2 + 2X - 3 \geq 0$ car $X > 0$. On obtient $X \leq -3$ ou $X \geq 1$ et on ne retient que $X \geq 1$. Finalement l'inéquation équivaut à $5^x \geq 1$ c'est à dire $x \geq 0$ (prendre le logarithme de chaque membre).

Exercice 9.

1. Trouver le domaine de définition et la période de la fonction $f : x \mapsto \tan(2x + 1)$.
2. Mêmes questions avec la fonction $f : x \mapsto \tan(\omega x + \frac{\pi}{4})$ avec $\omega \neq 0$.
3. Montrer que la droite d'équation $x = \pi$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction cosinus dans un repère orthonormal du plan.

Solution.

1. f est définie pour $2x + 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi - 2}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \}$. Si $T > 0$ est une période on a $f(x + T) = \tan(2x + 1 + 2T) = f(x) = \tan(2x + 1)$. La fonction tangente étant périodique de période π on obtient donc une période T telle que $2T = \pi$ soit $T = \frac{\pi}{2}$.
2. Le même raisonnement donne $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{4\omega} + k\frac{\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z} \}$ et $T = \frac{\pi}{\omega}$.
3. Il suffit de remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi + x) = \cos(\pi - x) (= -\cos x)$.

Exercice 10.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos x = \cos a$ et $\cos x = \sin a$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Solution.

1. $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Comme $\sin a = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$ on peut se ramener au cas précédent :
 $\cos x = \sin a \iff \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - a) \iff x = \frac{\pi}{2} - a + 2k\pi$ ou $x = a - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. On pose $X = \cos x$. Alors $2X^2 - 5X + 2 = 0 \iff X = \frac{1}{2}$ ou $X = 2$.
 $\cos x = 2$ n'a pas de solution et $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. L'ensemble des solutions est donc $\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \}$.

Exercice 11. Soient a, b, ω des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $\omega \neq 0$. On pose $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1. Montrer qu'il existe au moins un réel φ tel que $\cos \varphi = \frac{a}{A}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{A}$.

Indication : montrer que le point de coordonnées $(\frac{a}{A}, \frac{b}{A})$ appartient au cercle trigonométrique.

2. En déduire qu'il existe toujours un couple (A, φ) de réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) = A \cos(\omega x - \varphi).$$

3. Appliquer ce qui précède à $\cos x - \sqrt{3} \sin x$ et résoudre l'équation $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$.
4. Résoudre l'équation $\cos x + \sin x = 0$ de deux manières différentes.

Solution.

1. On a $\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{b}{A}\right)^2 = 1$ donc le point de coordonnées $\left(\frac{a}{A}, \frac{b}{A}\right)$ est sur le cercle trigonométrique et il existe un réel φ tel que $\cos \varphi = \frac{a}{A}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{A}$.

2. $a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) = A\left(\frac{a}{A} \cos(\omega x) + \frac{b}{A} \sin(\omega x)\right) = A(\cos \varphi \cos(\omega x) + \sin \varphi \sin(\omega x)) = A \cos(\omega x - \varphi)$.

3. On a ici $A = 2$, $\omega = 1$ et $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\varphi = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$:

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 \iff \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \iff x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4. **Première méthode :** $\cos x + \sin x = 0 \iff \cos x = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et donc

$$\cos x + \sin x = 0 \iff x = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

La première équation n'a pas de solution et l'autre donne : $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Deuxième méthode : on transforme le premier membre selon la méthode vue en première question. On vérifiera que $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Alors :

$$\cos x + \sin x = 0 \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Il s'agit bien du même ensemble de solutions (placer les points images sur le cercle unité).

Exercice 12. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \end{cases}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f (on pourra utiliser le résultat de la question 4 de l'exercice 11), étudier la parité de f et montrer qu'elle est périodique de période π . En déduire un intervalle d'étude.
2. Faire l'étude des variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.

Solution.

1. D'après la question 4 de l'exercice 11, le domaine de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. On constate facilement que f n'est ni paire ni impaire et que $f(x + \pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x - \sin x} = f(x)$ donc π est une période pour f : compte tenu du domaine, un intervalle d'étude pour f est par exemple $]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$. À partir du tracé de la courbe sur cet intervalle, on déduit le tracé global par des translations de vecteurs $k\pi \vec{i}$.

2. Pour $x \in \mathcal{D}_f$ on a $f'(x) = \frac{\cos x (\cos x + \sin x) - \sin x (-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2} = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur chaque intervalle de son domaine. À partir des limites suivantes :

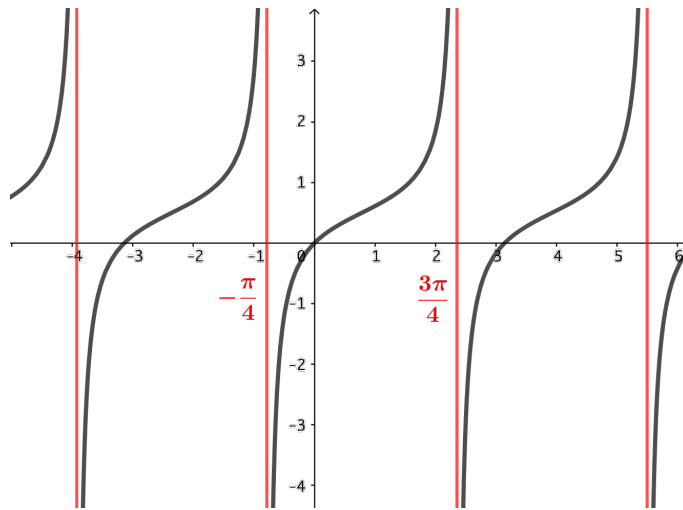
$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} (\cos x + \sin x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{u \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \sqrt{2} \cos u = 0^+,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} (\cos x + \sin x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{2} \cos u = 0^+,$$

on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = +\infty.$$

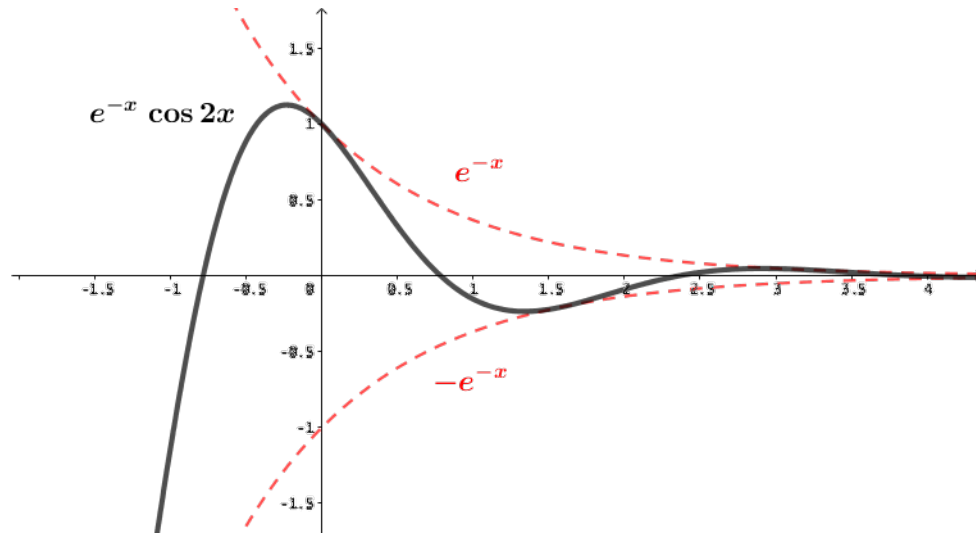


Pour travailler en autonomie

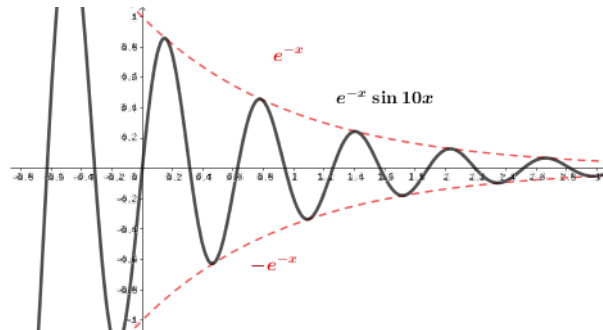
Exercice 13. Donner sans calcul l'allure de la courbe représentative de la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} \cos(2x)$.

Indication : encadrer f par deux fonctions plus simples et donner la période de la fonction $x \mapsto \cos 2x$. Même question avec $g(x) = e^{-x} \sin(10x)$.

Solution. On a les inégalités $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ avec égalité à gauche quand $\cos(2x) = -1$ ($x = \pm\pi + 2k\pi$) et à droite quand $\cos(2x) = 1$ ($x = 2k\pi$). Enfin $x \mapsto \cos 2x$ est périodique de période π .



Raisonnement similaire avec g .



Exercice 14. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{\cos(2x)} \end{cases}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f étudier la parité et la périodicité.

Vérifier que $f(\pi - x) = f(x)$ et déduire de l'étude précédente que l'on peut prendre $[0, \frac{\pi}{2}]$ comme intervalle d'étude. Comment obtenir alors toute la courbe ?

2. Étudier les variations de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et tracer la courbe représentative de f .