

Chapitre 9 : systèmes linéaires, matrices

L1 MATH103_MISPI

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss
- 3 Matrices
- 4 Matrices et systèmes d'équations linéaires
- 5 Matrices et systèmes 2×2

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss
- 3 Matrices
- 4 Matrices et systèmes d'équations linéaires
- 5 Matrices et systèmes 2×2

Introduction

On va étudier des systèmes d'équations du type :

$$(S1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$(S2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(S_1) : l'inconnue est $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

(S_2) : l'inconnue est $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

On les qualifie de « **systèmes linéaires** » : pourquoi ?

Définition

On dit qu'une application

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^n \\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{matrix} \begin{matrix} \mathbb{R} \\ F(X) \end{matrix} \text{ est linéaire si}$$

- $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad F(X + Y) = F(X) + F(Y),$
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad F(\lambda X) = \lambda F(X).$

Rappel :

si $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\begin{aligned} X + Y &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda \cdot X &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Reprenons le premier système :

$$(S1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

posons $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et

$$F(X) = x + y + z, \quad G(X) = 2x + z, \quad H(X) = -x - y + 3z$$

Chacune des applications $F, G, H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire :
ceci caractérise précisément les systèmes linéaires

Chacune des lignes prise isolément est une équation linéaire

Reprenons le premier système :

$$(S1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x \quad \quad + z = 2 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Ensemble des solutions : ensemble des triplets $X = (x, y, z)$ qui satisfont les trois équations

On dit que X est l'*inconnue vectorielle* dans $\mathbb{R}^3$

On écrit les inconnues dans le même ordre et les unes au-dessous des autres, précaution indispensable pour éviter les erreurs :

$$\begin{cases} x + z + 3y = 1 \\ y - z + x = 8 \\ z - x - y = 3 \end{cases}$$

doit être écrit

$$\begin{cases} x & + & z & + & 3y & = & 1 \\ x & - & z & + & y & = & 8 \\ -x & + & z & - & y & = & 3 \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 8 \\ x & + & y & - & z & = & -3 \end{cases}$$

Un système d'équations linéaires ne comporte pas nécessairement le même nombre d'équations que d'inconnues

Exemple :

$$(S2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(S2) est un système linéaire avec second membre de trois équations à quatre inconnues.

Tous les systèmes (d'équations) ne sont pas linéaires !

Exemple :

$$\begin{cases} x^3 + xy + z = 1 \\ xyz + y + z^2 = 2 \end{cases}$$

Le plus simple des systèmes d'équations linéaires est l'équation $ax = b$: une équation, une inconnue

Cette équation a :

- une et une seule solution si $a \neq 0$: $S = \{b/a\}$
- aucune solution si $a = 0$ et $b \neq 0$: $S = \emptyset$
- une infinité de solution si $a = b = 0$: $S = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

On retrouve également cette même variété de cas dans l'étude générale ...

Deux systèmes d'équations linéaires sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions (éventuellement vide ou infini)

Les deux systèmes suivants sont équivalents... et n'ont pas de solution :

$$\begin{cases} x + z + 3y = 1 \\ x - z + y = 8 \\ -x + z - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 6y + 2z = 2 \\ x + y - z = 8 \\ x + y - z = -3 \end{cases}$$

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss
- 3 Matrices
- 4 Matrices et systèmes d'équations linéaires
- 5 Matrices et systèmes 2×2

Systèmes triangulaires

Considérons le système suivant, dans lequel on a numéroté les lignes :

$$(T) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 & L_1 \\ 2y + z = -1 & L_2 \\ -z = 4 & L_3 \end{cases}$$

Ce système est d'un type particulier qu'on appelle **triangulaire supérieur**. Il est résolu très simplement ***par remontée***

La méthode de Gauss décrit un algorithme pour transformer le système de départ en un système triangulaire équivalent

La remontée, exemple :

$$(T) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 & L_1 \\ 2y + z = -1 & L_2 \\ -z = 4 & L_3 \end{cases}$$

On prend les équations à partir de la dernière et « **on remonte** » :

on calcule z , puis y , puis x par substitution des inconnues déjà calculées ...

La remontée, exemple :

$$(T) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 & L_1 \\ 2y + z = -1 & L_2 \\ -z = 4 & L_3 \end{cases}$$

dans $L_3 : z = -4$

dans $L_2 : 2y = -1 - z = -1 + 4 = 3 \implies y = \frac{3}{2}$

enfin, dans $L_1, x = 1 - y - z = 1 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{7}{2}$

Il y a donc une unique solution : $S = \left\{ \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, -4 \right) \right\}$

Méthode de Gauss

Transformations permises dans la méthode de Gauss pour transformer un système en un système triangulaire équivalent :

- changer l'ordre des équations
- changer l'ordre des inconnues (dans toutes les équations à la fois)
- multiplier une équation par un réel non nul
- conserver toutes les lignes sauf une et ajouter à **cette** ligne une combinaison linéaires des autres

Ces transformations sont réversibles et donc **transforment un système en un système équivalent**

Méthode de Gauss

Une fois fixé l'ordre des équations et des inconnues, pour obtenir un système triangulaire à partir d'un système de n lignes notées de haut en bas $L_1, \dots, L_n$, le principe général de l'algorithme de Gauss est le suivant :

- utiliser la première ligne (L_1) pour éliminer la première inconnue de toutes les autres lignes
- recommencer avec le sous-système formé des nouvelles lignes $L_2, \dots, L_n$ et avec la seconde inconnue

et ainsi de suite. On précise tout cela sur quelques exemples ...

Méthode de Gauss, exemple 1 :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 & L_1 \\ x - y = 1 & L_2 \end{cases}$$

L'inconnu est (x, y)

Pour éliminer x dans L_2 , il faut lui soustraire $\frac{1}{3}L_1$:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 & L_1 \\ -\frac{5}{3}y = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1$ signifie que la nouvelle ligne 2 s'obtient par l'opération $L_2 - \frac{1}{3}L_1$ sur les lignes initiales

Méthode de Gauss, exemple 1 :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 & L_1 \\ -\frac{5}{3}y = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \end{cases}$$

En pratique, on peut se contenter de noter cette étape ainsi :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 & L_1 \\ -\frac{5}{3}y = 1 & L_2 - \frac{1}{3}L_1 \end{cases}$$

La re-numérotation des nouvelles lignes par $L_1, L_2, \dots$ est implicite, pour alléger

Méthode de Gauss, exemple 1 :

Attention : il faut décrire l'opération effectuée, ici $L_2 - \frac{1}{3}L_1$,
en face la ligne obtenue et non pas par anticipation au niveau
du système de départ

Méthode de Gauss, exemple 1 :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -\frac{5}{3}y = 1 \end{cases}$$

On a obtenu le système triangulaire souhaité. On procède à la **remontée** :

L_2 donne $y = \frac{-3}{5}$ puis :

L_1 donne $x = -\frac{2}{3}y = \frac{2}{5}$

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{5}, \frac{-3}{5} \right) \right\}$$

on a une unique solution

Méthode de Gauss, exemple 1 : remarque

On pouvait simplifier un peu le calcul en commençant par une permutation de lignes :

$$\begin{cases} x - y = 1 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 3x + 2y = 0 & L_2 \leftarrow L_1 \end{cases}$$

Ensuite :

$$\begin{cases} x - y = 1 & L_1 \\ 5y = -3 & L_2 - 3L_1 \end{cases}$$

On trouve bien sûr le même résultat que précédemment

Méthode de Gauss, exemple 2

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3 & L_1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 & L_2 \\ -2x & - & y & + & 2z & = & -1 & L_3 \end{cases}$$

L'inconnue est (x, y, z)

On ne permute pas les lignes car le coefficient de x dans la première ligne est 1 et les calculs seront simples

Méthode de Gauss, exemple 2

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3 & L_1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 & L_2 \\ -2x & - & y & + & 2z & = & -1 & L_3 \end{cases}$$

élimination de x dans les lignes 2 et 3 :

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3 & L_1 \\ & & -y & - & 3z & = & -4 & L_2 - 2L_1 \\ & & y & + & 4z & = & 5 & L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

On ne travaille plus qu'avec les deux dernières lignes. . .

Méthode de Gauss, exemple 2

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y - 3z = -4 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$$

élimination de y dans la ligne 3 :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 & L_1 \\ -y - 3z = -4 & L_2 \\ z = 1 & L_3 + L_2 \end{cases}$$

Méthode de Gauss, exemple 2, la remontée :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y - 3z = -4 \\ z = 1 \end{cases}$$

L_3 donne $z = 1$

L_2 donne $y = 4 - 3z = 1$

L_1 donne $x = 3 - y - z = 1$

$$S = \{(1, 1, 1)\}$$

Méthode de Gauss, exemple 3

- Exemple 3 :**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 & L_1 \\ 2x + y + 3z = 11 & L_2 \\ -x - 3y + 2z = -7 & L_3 \end{cases}$$

élimination de x dans les lignes 2 et 3 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 & L_1 \\ -3y + z = -5 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y + 3z = 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

Méthode de Gauss, exemple 3

Pour profiter de coefficients plus simples on pourrait échanger les deux dernières lignes. À titre d'exemple on va plutôt permuter l'ordre des inconnues y et z :

$$\begin{cases} x + z + 2y = 8 & L_1 \\ z - 3y = -5 & L_2 \\ 3z - y = 1 & L_3 \end{cases}$$

élimination de z dans la ligne 3 :

$$\begin{cases} x + z + 2y = 8 & L_1 \\ z - 3y = -5 & L_2 \\ 8y = 16 & L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

Méthode de Gauss, exemple 3

$$\begin{cases} x + z + 2y = 8 \\ \quad z - 3y = -5 \\ \quad \quad 8y = 16 \end{cases}$$

Remontée :

L_3 donne $y = 2$

L_2 donne $z = -5 + 3y = 1$

L_1 donne $x = 8 - z - 2y = 3$.

Attention : on remet les valeurs dans l'ordre implicite (x, y, z) choisi au départ (c'est là le danger des permutations de variables) :

$$S = \{ (3, 2, 1) \}$$

Méthode de Gauss, exemple 4 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 & L_1 \\ 2x + y + 3z = 11 & L_2 \\ 3x + 3y + 4z = -7 & L_3 \end{cases}$$

élimination de x dans les lignes 2 et 3 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 & L_1 \\ -3y + z = -5 & L_2 - 2L_1 \\ -3y + z = -31 & L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

Méthode de Gauss, exemple 4 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3y + z = -5 \\ -3y + z = -31 \end{cases}$$

On observe immédiatement une incompatibilité entre L_2 et L_3 .
L'élimination de y ou de z dans la dernière ligne conduit à :

$$\begin{cases} x + z + 2y = 8 & L_1 \\ -3y + z = -5 & L_2 \\ 0 = -26 & L_3 - L_2 \end{cases}$$

En raison de la troisième ligne, on est dans un cas où il n'y a pas de solution :

$$S = \emptyset$$

Méthode de Gauss, exemple 5 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 & L_1 \\ 2x + y + 3z = 11 & L_2 \\ 3x + 3y + 4z = 19 & L_3 \end{cases}$$

élimination de x dans les lignes 2 et 3 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 & L_1 \\ -3y + z = -5 & L_2 - 2L_1 \\ -3y + z = -5 & L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

Il y a redondance !

Méthode de Gauss, exemple 5 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3y + z = -5 \\ -3y + z = -5 \end{cases}$$

l'élimination de y ou de z dans la dernière ligne conduit à

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 & L_1 \\ -3y + z = -5 & L_2 \\ 0 = 0 & L_3 - L_2 \end{cases}$$

La dernière ligne peut être enlevée. Il reste deux équations à trois inconnues : on dit que le système est sous-déterminé

Méthode de Gauss, exemple 5 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3y + z = -5 \end{cases}$$

On choisit l'une des inconnues que l'on « fait passer » dans le second membre (ce choix est *par exemple* dicté par la facilité des calculs ultérieurs) :

$$\begin{cases} x + z = 8 - 2y & L_1 \\ z = -5 + 3y & L_2 \end{cases}$$

On résout le système obtenu en considérant y comme un paramètre et les inconnues x et z sont alors exprimées en fonction de (du paramètre) y ...

Méthode de Gauss, exemple 5 :

$$\begin{cases} x + z = 8 - 2y \\ z = -5 + 3y \end{cases}$$

L_1 donne $x = 8 - z - 2y = 13 - 5y$ et on a finalement

$$S = \{(13 - 5y, y, -5 + 3y) : y \in \mathbb{R}\}$$

Une autre expression (*paramétrage*) du même ensemble de solutions serait obtenue en choisissant z comme paramètre plutôt que y

Remarques

On voit qu'il ne sert à rien de réécrire les inconnues $x, y \dots$

Il suffirait d'écrire les coefficients sous forme de tableau et de faire évoluer ce tableau à chaque opération d'élimination ou de permutation

Remarques

La méthode de Gauss s'appelle parfois

méthode du pivot de Gauss

Dans l'algorithme, et à chaque étape d'élimination, le pivot est le coefficient de l'inconnue dans la ligne qui va servir à éliminer cette même inconnue dans les lignes suivantes :

Dans l'exemple 2 et dans l'élimination de x dans les lignes 2 et 3, le pivot est le coefficient de x de la première ligne, c'est à dire 1

Dans l'élimination de y dans la troisième ligne, le pivot est le coefficient -1 car la deuxième ligne contient $-y$

Remarques

Pour l'implantation sur ordinateur, le choix du pivot est crucial : on choisit le plus grand coefficient en valeur absolue afin de minimiser les erreurs d'arrondis et on effectue les permutations de lignes en conséquence

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss
- 3 Matrices**
- 4 Matrices et systèmes d'équations linéaires
- 5 Matrices et systèmes 2×2

Matrices Définition

Une matrice à coefficients réels (ou complexes) est un tableau rectangulaire de nombres réels (ou complexes)

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices à coefficients réels comportant n lignes et p colonnes

Notation : $M = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ ou $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ quand $p = n$ ou simplement $(a_{i,j})$ s'il n'y a pas ambiguïté

On dit que M est une matrice réelle de taille $n \times p$

$a_{i,j}$ désigne le nombre qui figure en ligne i (numérotation de haut en bas) et en colonne j (de gauche à droite)

On dit que la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est :

- **carrée** si $n = p$
- **triangulaire supérieure** si elle est carrée et du type

$$M = \begin{pmatrix} \times & \times & .. & \times \\ 0 & \times & \times... & \times \\ 0 & 0 & \times... & \times \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ...0 & \times \end{pmatrix}$$

- **triangulaire inférieure** si tous les coefficients au dessus de la diagonale sont nuls

On dit que la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est :

- **diagonale** si elle est carrée et si tous les coefficients hors de la diagonale sont nuls :

$$M = \begin{pmatrix} \times & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \times & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \times & & \\ 0 & 0 & \dots & \times & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \times \end{pmatrix}$$

- **nulle** si tous les coefficients sont nuls. On la note 0

On dit que la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est :

- **la matrice identité de taille n** si elle est diagonale et ne comporte que des 1 sur la diagonale :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **une matrice** (ou vecteur) **ligne**, si elle est de type $1 \times p$
- **une matrice** (ou vecteur) **colonne**, si elle est de type $n \times 1$

Exemples

Exemples :

- $n = 2, p = 3$

$$M = \begin{pmatrix} \pi & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -\pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

- $n = p = 3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

Exemples

Exemples :

- vecteur ligne de taille 4 :

$$(\quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 5 \quad)$$

- vecteur colonne de taille 4 :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times p$. La matrice transposée de A , notée tA est la matrice $(b_{i,j})$ de taille $p \times n$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_{i,j} = a_{j,i}$$

La ligne i de A devient la colonne i de tA .

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \quad {}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Somme de deux matrices

$A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$: matrices **de même taille** $n \times p$

La somme de ces deux matrices est :

$$A + B \stackrel{\text{déf}}{=} (a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

On ajoute les coefficients de même position :

$$A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \Rightarrow A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$$

Il est immédiat que l'on a :

$$A + B = B + A \text{ (commutativité) et } A + 0 = A$$

Exemples

Exemple 1 :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, M + N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, M + N = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 :

$$M = (1 \quad 2 \quad 3), N = (-2 \quad 0 \quad -5), M + N = (-1 \quad 2 \quad -2)$$

Produit d'une matrice par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice produit de A par le scalaire λ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})$$

On a les propriétés suivantes, toutes très simple à établir :

$$1 A = A, 0 A = 0,$$

$$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$$

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 2, \quad 2M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Produit de deux matrices

La définition du produit de deux matrices ne semble pas naturelle, contrairement à la somme, car on ne fait pas les produits des termes de même position : elle sera éclairée par l'usage

Ce produit est soumis à une contrainte stricte sur les dimensions des matrices : **pour pouvoir effectuer le produit, noté AB , de deux matrices A et B , il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B**

On commence par un cas particulier...

Produit d'une ligne par une colonne

Le produit d'une matrice ligne $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p)$ de taille p et
d'une matrice colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ de taille p , dans cet ordre, est
donné par :

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p$$

Produit d'une ligne par une colonne

Exemples :

$$(1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 10$$

$$(1 \ -2 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 0 = -11$$

Par contre le produit $(1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas défini

Produit de deux matrices : cas général

Soient $A = (a_{i,j})$ de taille $\mathbf{n} \times \mathbf{p}$ et $B = (b_{i,j})$ de taille $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$

Le produit AB est la matrice $C = (c_{i,j})$ de taille $\mathbf{n} \times \mathbf{q}$ dont le terme général $c_{i,j}$ est donné par le produit de la i -ème ligne de A et de la j -ème colonne de B :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

Deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ donnent donc une troisième matrice $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}$

$$n \times \underbrace{p \cdot p}_{\text{}} \times q \longrightarrow n \times q$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

On a donc a priori $C = AB \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) : C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$$a = (2 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3, b = (2 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

... on fait les six calculs et on trouve

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Attention : le produit BA n'est pas défini

$B \in \mathcal{M}_{3,3}$ et $A \in \mathcal{M}_{2,3}$: le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A

Propriétés

On a les très importantes propriétés suivantes dans tous les cas où les dimensions des matrices rendent possibles les opérations :

associativité :

$$A(B C) = (A B) C$$

distributivité par rapport à l'addition

$$A(B + C) = A B + A C$$

$$(A + B) C = A C + B C,$$

et aussi, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors

$$A I_p = I_n A = A,$$

$$(\lambda A) B = A(\lambda B) = \lambda(A B)$$

Propriétés

Attention : la commutativité du produit matriciel ($AB = BA$) est fausse

Évident si les matrices ne sont pas carrées :

si A est une matrice $n \times p$ et B une matrice $p \times n$, AB est une matrice $n \times n$ tandis que BA est une matrice $p \times p$

C'est en général faux aussi lorsque les matrices sont carrées...

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ donne}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Produit matrice-vecteur :

Le produit d'une matrice $n \times n$ par un vecteur colonne de dimension n est un vecteur colonne de dimension n

Le produit d'un vecteur ligne de dimension n par une matrice $n \times n$ est un vecteur ligne de dimension n

Exemples :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ d + 2e + 3f \\ g + 2h + 3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2d + 3g & b + 2e + 3h & c + 2f + 3i \end{pmatrix}$$

Matrices inversibles

Définition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, si et seulement si :

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA = I_n$$

B s'appelle alors la matrice inverse de A et est notée $B = A^{-1}$

On a la même définition en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$

Matrices inversibles

On admet la proposition suivante :

Proposition

$A \in \mathcal{M}_n$ est inversible si et seulement si

$$\exists B \in \mathcal{M}_n, AB = I_n$$

Remarquons simplement que s'il existe $B \in \mathcal{M}_n$ et $C \in \mathcal{M}_n$ telles que $AB = I_n$ et $CA = I_n$ alors $B = C$. En effet :

$$AB = I_n \Rightarrow C(AB) = CI_n = C \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow I_n B = C \Rightarrow B = C$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

donc A est inversible et $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque

Toute matrice n'est pas inversible

Il est d'abord nécessaire que la matrice soit une matrice carrée, mais cela ne suffit pas.

En effet, s'il existe un vecteur colonne **non nul** X tel que

$A.X = 0$, A ne peut pas être inversible :

on aurait $A^{-1}.(AX) = 0$ et, grâce à la propriété d'associativité, on obtiendrait $(A^{-1}.A).X = 0$. D'où $I_n X = X = 0$:

contradiction

Exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

[prendre $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \dots$]

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss
- 3 Matrices
- 4 Matrices et systèmes d'équations linéaires**
- 5 Matrices et systèmes 2×2

Ecriture matricielle d'un système linéaire

Tout système d'équations linéaires comportant n équations portant sur p inconnues peut s'écrire $AX = B$ où :

X est un vecteur colonne de taille p constitué des inconnues

B est le vecteur colonne de taille n constitué des seconds membres

A une matrice $n \times p$ constituée des coefficients du système

C'est notamment pour avoir cette écriture qu'on a introduit le produit de matrice

Exemple 1

$$(S) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

En effet $AX = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \end{pmatrix}$ donc

$$(S) \iff AX = B$$

Exemple 2

$$(S) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$(S) \iff AX = B$$

Exemple 3

$$\text{Soient } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \iff \begin{cases} x + 2y & = a \\ 2x + y + z & = b \\ -x + y & = c \end{cases}$$

Résultat fondamental

Théorème

L'équation matricielle $AX = B$ admet une unique solution pour toute donnée B si et seulement si A est une matrice (carrée) inversible et dans ce cas

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Pour établir ce résultat, nous avons besoin de savoir transformer une équation matricielle à l'aide d'une matrice inversible

Proposition

Si C est une matrice carrée inversible alors

$$AX = B \Leftrightarrow (CA)X = CB,$$

Pour établir ce résultat, nous avons besoin de savoir transformer une équation matricielle à l'aide d'une matrice inversible

Proposition

Si C est une matrice carrée inversible alors

$$AX = B \Leftrightarrow (CA)X = CB,$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) La condition nécessaire s'obtient en multipliant par C à gauche dans les deux membres ; on obtient $C(AX) = CB$, l'associativité donne alors $(CA)X = CB$.

($\Leftarrow$) La condition suffisante s'obtient en multipliant à gauche par C^{-1} , on obtient $C^{-1}((CA)X) = C^{-1}(CB)$. L'associativité entraîne $(C^{-1}C).(AX) = (C^{-1}C).B = B$. D'où $AX = B$



La multiplication à gauche par une matrice inversible transforme donc automatiquement une équation matricielle en une équation matricielle équivalente.

La méthode de Gauss revient à chaque étape à une multiplication à gauche par une matrice (inversible !) convenable que vous pouvez chercher (ce qui garantit l'équivalence des différents systèmes).

Preuve du théorème

($\Rightarrow$) Si l'équation $AX = B$ admet une solution pour toute donnée B alors en particulier on peut résoudre les équations $AX_i = E_i$ où E_i est le vecteur colonne ne comportant que des 0 à l'exception d'un 1 sur la i -ème ligne.

La matrice carrée (d'ordre n) $C = (X_1 \cdots X_n)$ dont les colonnes sont les X_i vérifie

$$AC = I_n$$

par définition des (X_i) .

Donc A est inversible

Preuve du théorème

($\Leftrightarrow$) Si A est inversible, on peut prendre $C = A^{-1}$ dans la proposition précédente et on obtient

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

ce qui démontre l'existence et l'unicité de la solution

Méthode pratique de calcul de l'inverse d'une matrice

On écrit une équation de matrice A et de second membre B quelconque. Par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ on prend } B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et on résout le système}$$

linéaire associé par la méthode de Gauss (par exemple)

Si la matrice est inversible, la solution unique dépendra

linéairement des coefficients de B et pourra s'écrire sous la

forme $X = MB$ où M est une matrice de nombres réels (car A est réelle). Comme on a aussi $X = A^{-1}B$ et que B est quelconque on en déduit $A^{-1} = M$

Méthode pratique de calcul de l'inverse d'une matrice

On a utilisé ce fait :

$$(\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), MB = A^{-1}B) \implies M = A^{-1}$$

Ce dernier point se justifie ainsi :

en choisissant la matrice colonne B ne contenant que des zéros sauf à la ligne i , l'égalité $MB = A^{-1}B$ donne l'égalité des i -èmes colonnes de M et de A^{-1}

En faisant varier i on obtient l'égalité des deux matrices

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$AX = B \iff (S) \begin{cases} x + y + z = a \\ x \quad \quad + z = b \\ \quad y + z = c \end{cases}$$

et on résout ce système

Exemple

$$\begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ x & + z = b & L_2 \\ & y + z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & + z = b & L_2 \\ & y + z = c & L_3 \\ x + y + z = a & L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & + z = b & L_1 \\ & y + z = c & L_2 \\ & y & = a - b & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & + z = b & L_1 \\ & y & = a - b & L_2 \\ & y + z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = b & L_1 \\ y = a - b & L_2 \\ z = -a + b + c & L_3 - L_2 \end{cases}$$

Puis on effectue la remontée :

$$\begin{cases} x = a - c \\ y = a - b \\ z = -a + b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas d'une matrice non inversible

Que se passe-t-il si la matrice n'est pas inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \iff (S) \begin{cases} x + y + z = a \\ x - y + 2z = b \\ 2x + 3z = c \end{cases}$$

Cas d'une matrice non inversible

$$\begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ x - y + 2z = b & L_2 \\ 2x \quad \quad + 3z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ \quad -2y + z = b - a & L_2 - L_1 \\ \quad -2y + z = c - 2a & L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ \quad -2y + z = b - a & L_2 \\ \quad \quad 0 = -a - b + c & L_3 - L_2 \end{cases}$$

Cas d'une matrice non inversible

$$AX = B \iff \begin{cases} x + y + z = a \\ -2y + z = b - a \\ 0 = -a - b + c \end{cases}$$

Comme prévu, on trouve que le système n'a pas de solution pour tout *second membre* (a, b, c) : il faut pour cela que $-a - b + c = 0$

On conclut que **la matrice A n'est pas inversible.**

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss
- 3 Matrices
- 4 Matrices et systèmes d'équations linéaires
- 5 Matrices et systèmes 2×2**

Matrices et systèmes 2×2

Dans le cas particulier des systèmes 2×2 on se propose de donner un critère d'existence d'une solution unique et dans ce cas, de donner une formule générale de résolution

On obtient alors un critère d'inversibilité et l'expression explicite de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Systèmes 2×2

Considérons le système

$$(S) \begin{cases} ax + by = u & L_1 \\ cx + dy = v & L_2 \end{cases}$$

de matrice associée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Déterminant d'une matrice 2×2

On a les implications suivantes :

$$(S) \begin{cases} ax + by = u & L_1 \\ cx + dy = v & L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} acx + bcy = cu & cL_1 \\ cax + ady = av & aL_2 \\ adx + bdy = du & dL_1 \\ bcx + bdy = bv & bL_2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} (ad - bc)x = du - bv & L_3 - L_4 \\ (ad - bc)y = -cu + av & L_2 - L_1 \end{cases}$$

$ad - bc$ est le *déterminant* de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\text{On écrit : } \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

On remarque que $\det A = \det {}^tA$

Déterminant nul

Pour terminer les calculs, il faudrait que $\det A = ad - bc \neq 0$ afin de pouvoir diviser ...

Comment interpréter la nullité d'un déterminant ?

Proposition

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $\det A = 0$ si et seulement si les lignes $(a \ b)$ et $(c \ d)$ sont proportionnelles, ou encore, si et seulement si les colonnes $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sont proportionnelles.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $ad - bc = 0$

Si $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors on a fini.

Sinon on a par exemple $a \neq 0$:

on pose alors $k = \frac{c}{a}$ de sorte que $c = ka$, mais alors

$ad - bc = 0 \implies d = \frac{c}{a}b = kb$ et les lignes sont proportionnelles

Le raisonnement est analogue avec les colonnes mais on peut aussi utiliser le cas des lignes et l'égalité $\det A = \det {}^tA$



Démonstration.

($\Leftarrow$) Supposons les lignes proportionnelles.

Si $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors le déterminant est nul. Sinon il existe un réel k tel que $c = ka$ et $d = kb$, donc

$$\det A = ad - bc = akb - bka = 0$$



Résolution du système (S)

$$(S) \begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \implies \begin{cases} (ad - bc)x = du - bv \\ (ad - bc)y = -cu + av \end{cases}$$

Si $\boxed{\det A = 0 \text{ avec } a = b = c = d = 0}$ alors

- $u = v = 0$ et $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$
- ou bien $(u, v) \neq (0, 0)$ et $\mathcal{S} = \emptyset$

Résolution du système (S)

$$(S) \begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \implies \begin{cases} (ad - bc)x = du - bv \\ (ad - bc)y = -cu + av \end{cases}$$

Si $\boxed{\det A = 0 \text{ avec } a, b, c, d \text{ non tous nuls}}$ alors on doit nécessairement avoir $du - bv = 0$ et $-cu + av = 0$ (s'il existe une solution (x, y)) soit encore

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix} = 0$$

et donc (a, b, u) et (c, d, v) sont proportionnels *i. e.* les deux lignes du système linéaire sont proportionnelles, à condition qu'il existe au moins un couple (x, y) solution de (S) !

Résolution du système (S)

$$(S) \begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \implies \begin{cases} (ad - bc)x = du - bv \\ (ad - bc)y = -cu + av \end{cases}$$

- Si (a, b, u) et (c, d, v) ne sont pas proportionnels alors $S = \emptyset$
- Si (a, b, u) et (c, d, v) sont proportionnels alors le système (S) est équivalent à n'importe laquelle des deux lignes contenant un coefficient non nul

Par exemple, si $a \neq 0$ alors on a $(S) \iff L_1$ et

$$S = \left\{ \left(\frac{u - by}{a}, y \right) : y \in \mathbb{R} \right\}$$

Résolution du système (S)

$$(S) \begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \implies \begin{cases} (ad - bc)x = du - bv \\ (ad - bc)y = -cu + av \end{cases}$$

Enfin si $\boxed{\det A \neq 0}$ alors on a nécessairement

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{-cu + av}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

et on vérifie que ces valeurs conviennent ($\Rightarrow$ est une $\Leftrightarrow$).

Résolution du système (S) : conclusion

Proposition

- Si $\det A = 0$ avec $a = b = c = d = 0$ alors (S) admet des solutions ssi $u = v = 0$ et dans ce cas $S = \mathbb{R}^2$
- Si $\det A = 0$ avec a, b, c, d non tous nuls alors (S) admet une infinité de solutions ssi (a, b, u) et (c, d, v) sont proportionnels. Si par exemple $a \neq 0$ alors on a $(S) \iff L_1$ et dans ce cas $S = \{(\frac{u - by}{a}, y) : y \in \mathbb{R}\}$
- Si $\det A \neq 0$ alors (S) admet une unique solution donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Remarque

Formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Pour se souvenir de ces formules on notera que pour le numérateur de la 1^{re} inconnue x , on remplace la 1^{re} colonne du déterminant de A par la colonne du 2^e membre tandis que pour le numérateur de la 2^e inconnue y , on remplace la 2^e colonne du déterminant de A par la colonne du 2^e membre

Inverse d'une matrice 2×2

Ré-écrivons, sous l'hypothèse $\det A \neq 0$, les formules de Cramer sous la forme suivante

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\det A} (du - bv) \\ y = \frac{1}{\det A} (-cu + av) \end{cases}$$

On a prouvé que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, avec (u, v)

arbitraire donc $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Inverse d'une matrice 2×2

En résumé :

Proposition

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et dans ce cas son inverse s'obtient par la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

La matrice en facteur de $\frac{1}{\det A}$ s'obtient à partir de A en échangeant les termes de la diagonale (a et d) et en changeant les autres de signe