

Chapitre 7 : fonctions numériques

Dérivabilité, accroissements finis

L1 MATH103_MISPI

Sommaire

- 1 Dérivation : définitions
- 2 Théorèmes généraux
- 3 Dérivation et extrema d'une fonction
- 4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis
- 5 Dérivées successives

Sommaire

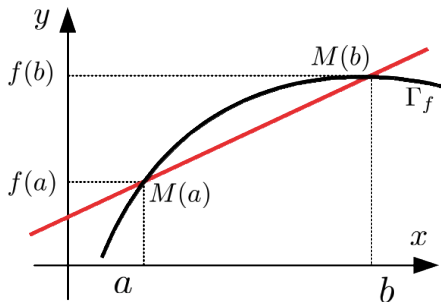
- 1 Dérivation : définitions
- 2 Théorèmes généraux
- 3 Dérivation et extrema d'une fonction
- 4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis
- 5 Dérivées successives

Taux de variation

Définition

Soient $a, b \in I$ avec $a \neq b$. On appelle *taux de variation* (ou *taux d'accroissement*) de f entre a et b le réel $\tau(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\tau(a, b)$: coefficient directeur de la sécante $(M(a)M(b))$



Taux de variation

Exemples : on peut illustrer cette notion dans deux situations différentes :

- La variable x est une distance horizontale sur une carte topographique et y est l'altitude. Alors $\tau(a, b)$ est la pente moyenne sur le parcours entre $M(a)$ et $M(b)$. Cette valeur est parfois affichée à l'attention des cyclistes (en %)
- La variable x est le temps et y la position d'un point mobile sur un axe (ici celui des ordonnées) : $\tau(a, b)$ est la vitesse moyenne du point entre les instants a et b

Taux de variation

Exemples : on peut illustrer cette notion dans deux situations différentes :

- La variable x est une distance horizontale sur une carte topographique et y est l'altitude. Alors $\tau(a, b)$ est la pente moyenne sur le parcours entre $M(a)$ et $M(b)$. Cette valeur est parfois affichée à l'attention des cyclistes (en %)
- La variable x est le temps et y la position d'un point mobile sur un axe (ici celui des ordonnées) : $\tau(a, b)$ est la vitesse moyenne du point entre les instants a et b

Taux de variation

Dans chacun de ces deux exemples, on peut être intéressé par une information plus précise :

- dans le premier, la pente à l'endroit où on se trouve (c'est ce que ressentent les mollets du cycliste),

Taux de variation

Dans chacun de ces deux exemples, on peut être intéressé par une information plus précise :

- dans le second, la vitesse instantanée (celle, plus ou moins, qu'indique le compteur)

Taux de variation

Il s'agit dans les deux cas de considérer des points a et b « très voisins »

Mathématiquement parlant, il s'agit de passer à la limite quand b tend vers a : on aura alors ces informations en $x = a$

Dérivabilité en un point

Définition

On dit que f est *dérivable en* $a \in I$ si le taux de variation $\tau(a, a+h)$ a une limite *finie* quand $h \rightarrow 0$, c'est-à-dire si

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe (et est finie).}$$

On note alors $f'(a)$ cette limite, appelée *nombre dérivé* de f en a .

On a aussi

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

en ayant posé $x = a + h$.

Dérivabilité en un point

Il existe une caractérisation équivalente de la dérivabilité :

Proposition

f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si il existe une fonction ε de limite nulle en zéro telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$$

(développement limité à l'ordre un de f en a)

Ou encore, en posant $x = a + h$:

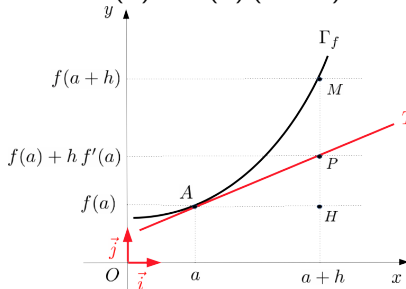
$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Interprétation graphique

Position limite des sécantes (AM) : tangente T à Γ_f au point A .
La droite tangente T a pour coefficient directeur $f'(a)$ et pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$: fonction affine tangente à f en a .

 $\overline{AH} = h$: accroissement en x

$\overline{HP} = hf'(a)$: accroissement de la fonction affine tangente

$$\overline{HM} = f(a + h) - f(a) : \text{accroissement de } f$$
$$\overline{PM} = h \epsilon(h) : \text{écart courbe - tangente}$$

$$\overline{HM} = \overline{HP} + \overline{PM}$$

Dérivée à gauche et à droite

Définition

f est dérivable à gauche en a si $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, on note $f'_g(a)$ cette limite

f est dérivable à droite en a si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, on note $f'_d(a)$ cette limite

Exemple

$$f(x) = |x^2 - x| \text{ en } a = 1$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{|(1+h)^2 - (1+h)|}{h} = \frac{|h(1+h)|}{h}$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} 1 + h = 1$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} -(1+h) = -1$$

Exemple

$$f(x) = |x^2 - x| \text{ en } a = 1$$

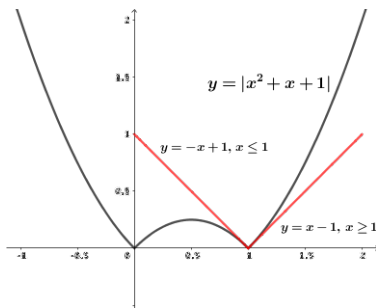
$$f'_d(1) = 1 \text{ et } f'_g(1) = -1$$

f est-elle dérivable en $a = 1$?

Exemple

$$f(x) = |x^2 - x| \text{ en } a = 1$$

NON ! La limite du taux d'accroissement en $a = 1$ existe si et seulement si $f'_a(1)$ et $f'_g(1)$ existent et sont égales ; ce n'est pas le cas ici.



On a un « point anguleux » en $a = 1$

Dérivabilité sur un intervalle

Définition

On dit que f est *dérivable sur un intervalle ouvert* I si f est dérivable en chaque point de I

On définit alors la fonction dérivée de f , notée f' , qui associe à tout $x \in I$ le nombre dérivé de f au point x :

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f est dérivable sur $[a, b]$ si f est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à gauche en b et dérivable à droite en a

Sommaire

- 1 Dérivation : définitions
- 2 Théorèmes généraux**
- 3 Dérivation et extrema d'une fonction
- 4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis
- 5 Dérivées successives

Dérivabilité et continuité

Proposition

Si f dérivable en a alors f est continue en a

Attention : la réciproque est fausse

Une fonction continue en a n'est pas nécessairement dérivable en a : voir l'exemple précédent ou la valeur absolue en 0

Dérivabilité et continuité

Proposition

Si f dérivable en a alors f est continue en a

Fonction de Bolzano : continue sur $[0, 1]$... mais dérivable **en aucun point** de cet intervalle



Dérivabilité et continuité

Proposition

Si f dérivable en a alors f est continue en a

On dit qu'une fonction dérivable est « plus régulière » qu'une fonction seulement continue.

Dérivabilité et opérations

Proposition

*Soient u, v définies sur I et dérivables en $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $u + v, \lambda u$ et uv sont dérivables en a et*

$$(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a), \quad (\lambda u)'(a) = \lambda u'(a),$$

$$(uv)'(a) = u'(a) v(a) + u(a) v'(a)$$

Si de plus v ne s'annule pas en a alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a) v(a) - u(a) v'(a)}{v(a)^2}$$

Dérivée d'une composée de fonctions

Proposition

Soit u dérivable en $a \in I$, f définie sur un intervalle J contenant $u(I)$ et dérivable en $b = u(a)$. Alors $f \circ u$ est dérivable en a et

$$(f \circ u)'(a) = f'(u(a)) u'(a) = f'(b) u'(a)$$

Dérivée d'une composée de fonctions : exemple

$$(f \circ u)'(a) = f'(u(a)) u'(a) = f'(b) u'(a)$$

Exemple : $F(x) = (x^2 + x)^3$

$$F(x) = f(u(x)) \text{ avec } u(x) = x^2 + x \text{ et } f(y) = y^3$$

$$u'(x) = 2x + 1, f'(y) = 3y^2$$

$$F'(x) = f'(u(x)) u'(x) = 3(x^2 + x)^2(2x + 1)$$

Dérivées particulières

- **Dérivée de u^n :**

soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{Z}$, alors u^n est dérivable :

- en tout point de I lorsque $n \geq 0$,
- en tout point de I où u ne s'annule pas, si $n \leq -1$,

et, dans les deux cas,

$$(u^n(x))' = n u(x)^{n-1} u'(x)$$

Dérivées particulières

- **Plus généralement**, si $u > 0$ sur I alors pour tout réel α la fonction u^α est dérivable sur I et on a :

$$(u^\alpha(x))' = \alpha u(x)^{\alpha-1} u'(x)$$

- **Dérivée de $\sqrt{u}$** : soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et :

$$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Exemples

$$f(x) = \frac{1}{(2x^2 + 1)^3} = [u(x)]^{-3}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$n = -3, \quad u(x) = 2x^2 + 1, \quad u'(x) = 4x$$

$$\text{donc } f'(x) = -3u'(x)[u(x)]^{-4} = \dots \text{ (compléter)}$$

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{u(x)}, \quad \mathcal{D}_f = [-1, +\infty[$$

$$u(x) = x^3 + 1, \quad u'(x) = 3x^2$$

$$\text{donc } f \text{ est dérivable sur }]-1, +\infty[\text{ et } f'(x) = \dots \text{ (compléter)}$$

Sommaire

- 1 Dérivation : définitions
- 2 Théorèmes généraux
- 3 Dérivation et extrema d'une fonction**
- 4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis
- 5 Dérivées successives

Extrema

Définition (Extremum local, extremum global)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in \mathcal{D}_f$

- On dit que f présente un *maximum local* (ou *relatif*) en c , si et seulement si, il existe un intervalle ouvert $] \alpha, \beta[$, contenant c , tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in] \alpha, \beta[\cap \mathcal{D}_f$
- On dit que f présente un *minimum local* en c , si et seulement si, il existe un intervalle ouvert $] \alpha, \beta[$, contenant c , tel que $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in] \alpha, \beta[\cap \mathcal{D}_f$
- On appelle *extremum local* un maximum local ou un minimum local

On parle d'*extremum global* (ou *absolu*) quand les inégalités sont valables pour tout $x \in \mathcal{D}_f$

Extrema

Définition (Extremum local, extremum global)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in \mathcal{D}_f$

- On dit que f présente un *maximum local* (ou *relatif*) en c , si et seulement si, il existe un intervalle ouvert $] \alpha, \beta[$, contenant c , tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in] \alpha, \beta[\cap \mathcal{D}_f$
- On dit que f présente un *minimum local* en c , si et seulement si, il existe un intervalle ouvert $] \alpha, \beta[$, contenant c , tel que $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in] \alpha, \beta[\cap \mathcal{D}_f$
- On appelle *extremum local* un maximum local ou un minimum local

On parle d'*extremum global* (ou *absolu*) quand les inégalités sont valables pour tout $x \in \mathcal{D}_f$

Extrema

Définition (Extremum local, extremum global)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in \mathcal{D}_f$

- On dit que f présente un *maximum local* (ou *relatif*) en c , si et seulement si, il existe un intervalle ouvert $] \alpha, \beta[$, contenant c , tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in] \alpha, \beta[\cap \mathcal{D}_f$
- On dit que f présente un *minimum local* en c , si et seulement si, il existe un intervalle ouvert $] \alpha, \beta[$, contenant c , tel que $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in] \alpha, \beta[\cap \mathcal{D}_f$
- On appelle *extremum local* un maximum local ou un minimum local

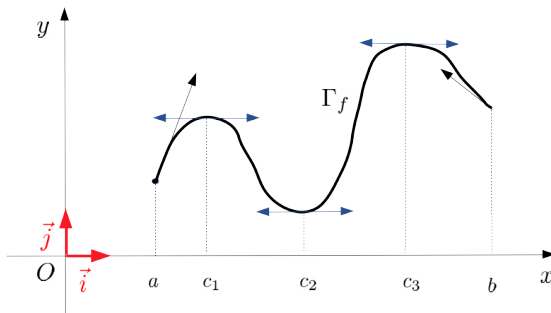
On parle d'*extremum global* (ou *absolu*) quand les inégalités sont valables pour tout $x \in \mathcal{D}_f$

Résultat fondamental

Proposition

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $c \in]a, b[$. Si f présente un extremum local en un point $c \in]a, b[$ alors $f'(c) = 0$

La tangente à la courbe de Γ_f au point $(c, f(c))$ est alors horizontale : cas de $x = c_1, c_2, c_3$.



Preuve

Supposons par exemple que c soit un maximum local et soit $] \alpha, \beta[$ un intervalle ouvert inclus dans $] a, b[$, sur lequel on a $f(x) \leq f(c)$.

Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $c + h \in] \alpha, \beta[$:

- si $h > 0$ alors $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$, donc

$$f'_d(c) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

- si au contraire $h < 0$ alors $f'_g(c) \geq 0$.

Comme f est dérivable en c on a $0 \leq f'_g(c) = f'(c) = f'_d(c) \leq 0$,
ce qui entraîne $f'(c) = 0$

Attention -1-

Si $f'(c) = 0$, c n'est pas nécessairement un point d'extremum.
On dit que c est un point *critique* de f

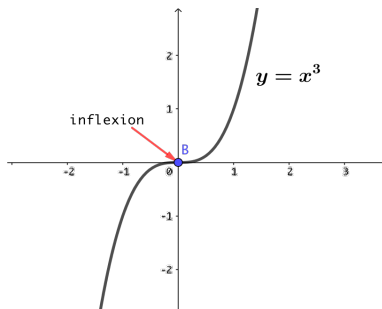
Pour un extremum, **la dérivée doit s'annuler et changer de signe, ou bien rester nulle sur un intervalle ouvert de centre c (elle est alors constante sur cet intervalle)**

Attention -1-

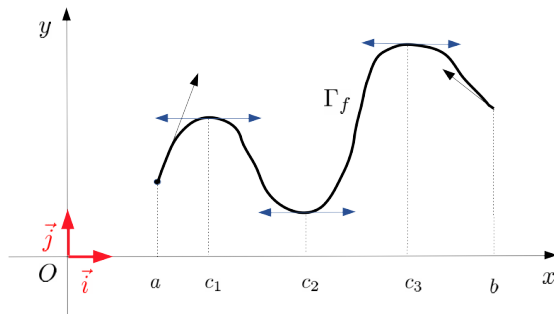
Si $f'(c) = 0$, c n'est pas nécessairement un point d'extremum.
On dit que c est un point *critique* de f

Exemple : $f(x) = x^3$, $c = 0$, $f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$ et 0 est un point critique de f , mais pas un extremum de f



Attention -2-



Si f est définie en une extrémité de l'intervalle, on peut avoir un extremum sans que la dérivée s'annule...

Observer ce qui se passe aux points a et b

Attention -3-

Si f n'est pas dérivable en c , on peut quand même avoir un extremum local en c ...

mais dans ce cas, on n'a pas de tangente horizontale : pour la fonction valeur absolue, $c = 0$ est minimum absolu strict

Sommaire

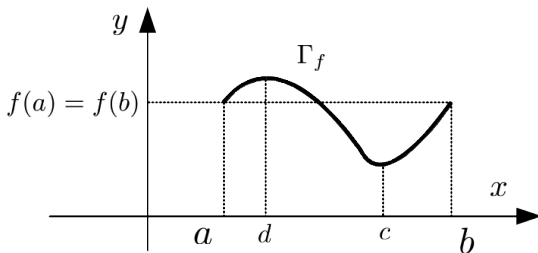
- 1 Dérivation : définitions
- 2 Théorèmes généraux
- 3 Dérivation et extrema d'une fonction
- 4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis**
- 5 Dérivées successives

Théorème de Rolle

Théorème

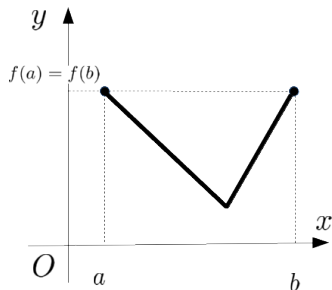
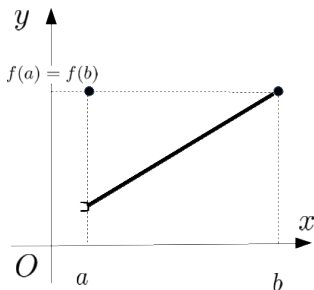
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.



Attention

Il ne faut pas retenir seulement l'hypothèse $f(a) = f(b)$. Dans les deux figures ci-dessous, où elle est vérifiée mais pas la conclusion, on cherchera quelle est l'hypothèse manquante.



Preuve

D'après le théorème sur l'image d'un segment par une fonction continue, il existe des points α et β de $[a, b]$ tels que $f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$ donc $\forall x \in [a, b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$.

- Si α et β sont les bornes de $[a, b]$, la condition $f(a) = f(b)$ entraîne que $f([a, b])$ est réduit à un point : f est constante sur $[a, b]$.

Sa dérivée est alors nulle partout et n'importe quel point c de $]a, b[$ convient (par exemple $c := \frac{a+b}{2}$).

Preuve

D'après le théorème sur l'image d'un segment par une fonction continue, il existe des points α et β de $[a, b]$ tels que $f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$ donc $\forall x \in [a, b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$.

- Si au contraire l'un des points au moins α ou β est un point de $]a, b[$ alors désignons-le par c :

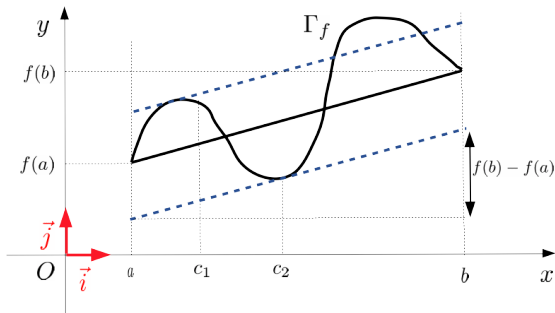
c'est un extremum absolu (minimum absolu pour α , maximum absolu pour β) et on a donc $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

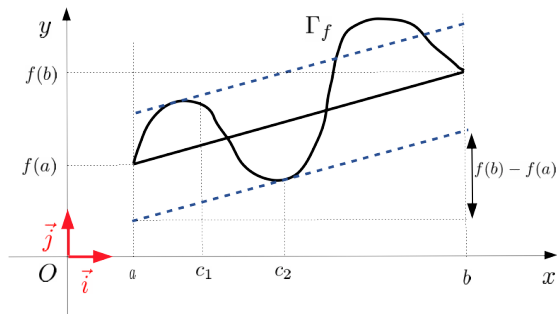
Théorème (AF)

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors $\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.



Théorème des accroissements finis



Sur la figure il y a trois réels c qui conviennent, dont c_1 et c_2 .
 En c_2 , par exemple, le cycliste ressent exactement la pente qui, si elle était partout la même, réaliserait le même dénivelé $f(b) - f(a)$...

Preuve

La sécante qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ a pour équation $y = g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

La fonction définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$ vérifie $h(a) = h(b) = 0$, de plus elle est continue sur $[a, b]$ (f et g le sont) et dérivable sur $]a, b[$ (c'est le cas pour f , par hypothèse, et g est dérivable sur $\mathbb{R}$).

D'après le théorème de Rolle : $\exists c \in]a, b[, h'(c) = 0$.

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

et

$$h'(c) = 0 \iff \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Inégalité des accroissements finis

Corollaire (IAF)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I .

- ❶ *S'il existe des réels m et M tels que $\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$, alors pour tout couple $(a, b) \in I \times I$ tel que $a \leq b$ on a*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

- ❷ *S'il existe un réel $k \geq 0$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$, alors*

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

Exemple

Votre vitesse reste comprise entre 30km/h et 90 km/h...

En 20 min vous parcourez une distance comprise entre 10 km et 30 km

Ce n'est pas plus compliqué que cela !

Attention tout de même aux hypothèses...

Application : sens de variation

Un résultat intuitif, admis dans les classes antérieures :

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si la dérivée est nulle sur I ($\forall x \in I, f'(x) = 0$), alors f est constante sur I .

Preuve : l'inégalité $|f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ est vérifiée pour tout $x, y \in I$ avec $k = 0$, donc : $\forall (x, y) \in I, |f(y) - f(x)| = 0$ i. e. $f(x) = f(y)$ ■

Croissance et dérivée

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors

f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

Croissance et dérivée

f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$

Preuve :

($\Rightarrow$) si f est croissante sur I et si $a \in I$, alors pour tout x dans $I \setminus \{a\}$ les quantités $f(x) - f(a)$ et $x - a$ sont de même signe, donc $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. Ainsi

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

($\Leftarrow$) supposons $f'(x) \geq 0$ sur I et soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$. L'inégalité des accroissements finis, côté gauche, avec $m = 0$ donne $0 \leq f(y) - f(x)$, ce qui prouve la croissance de

Croissance stricte et dérivée

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I .

Remarque : on ne peut pas utiliser l'IAF dans ce cas, car on ne peut pas garantir que $m > 0$. En effet la borne inférieure d'un ensemble de nombres strictement positifs (ici, les dérivées) peut être nulle (par exemple $\inf \mathbb{R}_+^* = 0$)

Croissance stricte et dérivée

si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I

Preuve : supposons $f' > 0$ sur I et soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c tel que $x < c < y$ et $f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{>0} \underbrace{(y - x)}_{>0}$, donc $f(y) > f(x)$



Croissance stricte et dérivée

si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I

Remarque : si $f'(x) \geq 0$ sur I et si cette dérivée ne s'annule qu'en un nombre fini de points, on a le même résultat

En effet, si $x < a$ avec $f'(a) = 0$ « isolé » alors

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) \text{ avec } c \in]x, a[\text{ d'où } f(x) < f(a).$$

De manière analogue,

$$a < x \Rightarrow f(a) < f(x).$$

Exemple : $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$

Bijections strictement monotones

Corollaire

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$* et telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est une *bijection strictement croissante de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$*
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$* et telle que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est une *bijection strictement décroissante de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.*

Bijections strictement monotones

Corollaire

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$* et telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est une *bijection strictement croissante de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$*
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$* et telle que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est une *bijection strictement décroissante de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$* .

Limite d'une dérivée en un point et dérivabilité

Étudions un exemple : considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 3 & \text{si } x < 4, \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Limite d'une dérivée en un point et dérivabilité

Étudions un exemple : considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 3 & \text{si } x < 4, \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Cette fonction est continue et dérivable pour $x < 4$ et $x > 4$ par simple application des théorèmes généraux. On trouve sans difficulté que les limites de f à gauche et à droite en $a = 4$ sont égales à 1 : elle est donc continue... mais est-elle dérivable en ce point ?

Limite d'une dérivée en un point et dérivabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 3 & \text{si } x < 4, \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Pour $x < 4$ on a $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ et ainsi $\lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \frac{1}{2}$

Pour $x > 4$ on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$ et donc $\lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = \frac{1}{2}$

Les tangentes de part et d'autre du point d'abscisse a on la même position limite en ce point et l'intuition nous dit que f est dérivable en $a = 4$ avec $f'(4) = \frac{1}{2}$

Est-ce correct ?

Limite d'une dérivée en un point et dérivabilité

La réponse est ici :

Proposition

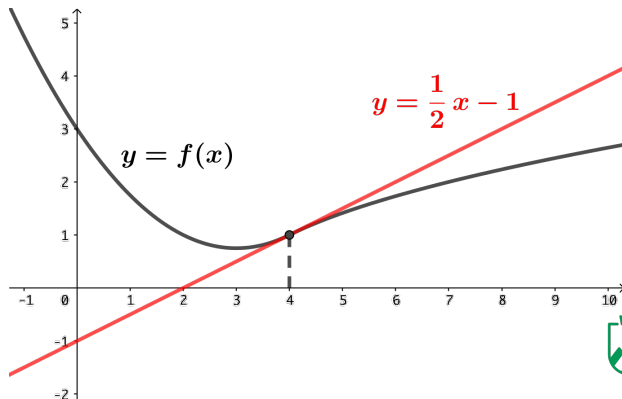
*Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $a \in I$ et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si la dérivée f' admet une limite finie ℓ en a (resp. à droite, à gauche en a) alors f est dérivable en a (resp. à droite, à gauche en a) et $f'(a) = \ell$ (resp. $f'_d(a) = \ell$, $f'_g(a) = \ell$)*

Limite d'une dérivée en un point et dérivabilité

C'est ce résultat que l'on applique : on conclut

successivement que $f'_g(4) = \frac{1}{2}$, $f'_d(4) = \frac{1}{2}$ et donc, en effet, que

f est dérivable en $a = 4$ avec $f'(4) = \frac{1}{2}$



Limite d'une dérivée en un point et dérivabilité

Remarque : on montre en fait que si f' a une limite en un point, alors le taux d'accroissement a la même limite

Cela reste valable avec une limite infinie : il n'y a alors pas dérivabilité mais existence d'une tangente verticale

Attention : la réciproque est fausse

Il se peut que le taux d'accroissement ait une limite (donc qu'il y ait dérivabilité) sans que f' ait une limite en a

Autrement dit, une dérivée n'est pas nécessairement continue !

Limite d'une dérivée en un point et dérivabilité

Exemple : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et si } x \neq 0, f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Le taux d'accroissement entre 0 et $x \neq 0$ est

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

f est donc dérivable en zéro et $f'(0) = 0$

En revanche, pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ qui n'a pas de limite en zéro (pourquoi ?)

Règles de l'Hôpital

Pour une limite de la forme $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)}$ supposée indéterminée :

Proposition (règle de l'Hôpital-1)

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

Si $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$ alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Preuve : pour $x \neq a$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \dots$

Règles de l'Hôpital

Pour une limite de la forme $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)}$ supposée indéterminée :

Proposition (règle de l'Hôpital-2)

Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, f et g deux fonctions continues sur I et dérivables sur $I \setminus \{a\}$.

Supposons $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{a\}$ (donc $g \neq 0$ au voisinage de a). Si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow a$ alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Preuve : voir le polycopié...

Remarques

- ❶ Le deuxième résultat est également valable pour $\ell = \pm\infty$, ou si f et g tendent vers l'infini en a ou encore si $a = \pm\infty$; c'est donc une règle très souple.
- ❷ On peut aussi écrire les mêmes résultats en termes de limites à droite ou à gauche.
- ❸ On peut si besoin appliquer ces règles plusieurs fois de suite jusqu'à lever l'indétermination (voir l'exemple).
- ❹ On notera qu'on énonce des conditions suffisantes (si la limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors...) Les réciproques sont fausses !

Remarques

- 1 Le deuxième résultat est également valable pour $\ell = \pm\infty$, ou si f et g tendent vers l'infini en a ou encore si $a = \pm\infty$; c'est donc une règle très souple.
- 2 On peut aussi écrire les mêmes résultats en termes de limites à droite ou à gauche.
- 3 On peut si besoin appliquer ces règles plusieurs fois de suite jusqu'à lever l'indétermination (voir l'exemple).
- 4 On notera qu'on énonce des conditions suffisantes (si la limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors...) Les réciproques sont fausses !

Remarques

- 1 Le deuxième résultat est également valable pour $\ell = \pm\infty$, ou si f et g tendent vers l'infini en a ou encore si $a = \pm\infty$; c'est donc une règle très souple.
- 2 On peut aussi écrire les mêmes résultats en termes de limites à droite ou à gauche.
- 3 On peut si besoin appliquer ces règles plusieurs fois de suite jusqu'à lever l'indétermination (voir l'exemple).
- 4 On notera qu'on énonce des conditions suffisantes (si la limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors...) Les réciproques sont fausses !

Remarques

- ❶ Le deuxième résultat est également valable pour $\ell = \pm\infty$, ou si f et g tendent vers l'infini en a ou encore si $a = \pm\infty$; c'est donc une règle très souple.
- ❷ On peut aussi écrire les mêmes résultats en termes de limites à droite ou à gauche.
- ❸ On peut si besoin appliquer ces règles plusieurs fois de suite jusqu'à lever l'indétermination (voir l'exemple).
- ❹ On notera qu'on énonce des conditions suffisantes (si la limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors...) Les réciproques sont fausses !

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} ?$

Ici, $f(x) = \sin x - x$, $g(x) = x^3$.

On a $f(0) = g(0) = 0$, $f'(x) = \cos x - 1$ et $g'(x) = 3x^2$

Hélas, $\frac{\cos x - 1}{3x^2}$ conduit encore à une indétermination « $\frac{0}{0}$ »

On recommence donc avec les dérivées de ces fonctions, c'est à dire $-\sin x$ et $6x$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$, donc finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

Sommaire

- 1 Dérivation : définitions
- 2 Théorèmes généraux
- 3 Dérivation et extrema d'une fonction
- 4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis
- 5 Dérivées successives

Dérivées successives

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Par convention : $f^{(0)} = f$ et

- si f est dérivable sur I on note $f^{(1)} = f'$ sa dérivée ,
- si de plus f' est dérivable, on pose $f^{(2)} = (f')' = f''$: dérivée seconde de f (ou dérivée d'ordre deux),
- de proche en proche, si f admet une dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ qui est elle-même dérivable, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Exemple : $f(x) = x^3 + 2x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \quad f''(x) = 6x$$

$$f^{(3)}(x) = 6 \quad f^{(4)}(x) = 0$$

Régularité des fonctions

Définition

- Par convention une fonction f continue sur I est dite de classe $\mathcal{C}^0$ sur I . On écrit $f \in \mathcal{C}^0(I)$
- Une fonction n fois dérivable et de dérivée n -ième continue est dite de classe $\mathcal{C}^n : f \in \mathcal{C}^n(I)$
- Une fonction qui est de classe $\mathcal{C}^n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$

Exemples : les fonctions polynômes, les fonction cosinus, sinus, exponentielle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; les fonctions rationnelles sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition ; la fonction $\sqrt{\cdot}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Formule de Leibniz

Proposition

*Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions n fois dérivables sur I . Alors le produit $f \cdot g$ est n fois dérivables sur I et sa dérivée d'ordre n est donnée par la **formule de Leibniz** :*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Ce résultat se démontre par récurrence sur n

Noter l'analogie avec la formule du binôme de Newton.

Formule de Leibniz

Proposition

*Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions n fois dérivables sur I . Alors le produit $f \cdot g$ est n fois dérivables sur I et sa dérivée d'ordre n est donnée par la **formule de Leibniz** :*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Exemple :

$$(f \cdot g)^{(4)} = f^{(4)} \cdot g + 4 f^{(3)} \cdot g' + 6 f'' \cdot g'' + 4 f' \cdot g^{(3)} + f \cdot g^{(4)}$$