# Chapitre 3 : polynômes

L1 MATH103_MISPI

# Sommaire

1. Introduction
2. Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$
3. Fonctions polynomiales, racines
4. Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

# Sommaire

1 Introduction

2 Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$

3 Fonctions polynomiales, racines

4 Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

# Objectifs

On ne fera pas de théorie générale : voir le polycopié (introduction) pour une explication concernant la définition mathématique et la notion d'*indéterminée*.

**Les objectifs sont :**

1. la division euclidienne des polynômes : principe et pratique
2. les notions de racine et de racine multiple
3. factorisation, polynômes irréductibles

# Terminologie

Considérons le polynôme $P = 5X^4 - 3X^2 + X + 7$

$P$ est de degré 4

Le terme de plus haut degré est $5X^4$

Le terme de plus bas degré est 7 (degré $= 0$)

$5X^4$, $-3X^2$, $X$ et 7 sont les monômes de $P$

Le coefficient du monôme de degré 2 est $-3$

# Sommaire

1 Introduction

2 Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$

3 Fonctions polynomiales, racines

4 Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

# Division euclidienne (ou suivant les puissances décroissantes) dans $\mathbf{R}[X]$

On note $\mathbf{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ d'indéterminée $X$.

Un résultat à rapprocher de la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$ :

**Proposition**

*Soient $A$ et $B$ deux polynômes à coefficients réels avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple $(Q, R)$ de polynômes tels que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.*

*$Q$ et $R$ s'appellent respectivement quotient et reste de la division euclidienne de $A$ par $B$.*

**Attention :** ne pas oublier la contrainte $\deg(R) < \deg(B)$ : elle assure l'unicité du couple $(Q, R)$.
Le degré du polynôme *nul* 0 (*i. e.* dont tous les coefficients sont nuls) est $-\infty$.

# Exemple

$A = X^3 + X^2 - 1 \qquad B = X - 1 \qquad Q = ? \quad R = ?$

$$\begin{array}{l|l} X^3 \quad +X^2 \quad -1 & X \quad -1 \\ \hline \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

# Exemple

$A = X^3 + X^2 - 1$ $B = X - 1$ $Q = ?$ $R = ?$

$$\begin{array}{l|l} \boxed{X^3} + X^2 - 1 & \boxed{X} - 1 \\ \hline & X^2 \end{array}$$

# Exemple

$A = X^3 + X^2 - 1 \qquad B = X - 1 \qquad Q = ? \quad R = ?$

$$\begin{array}{rr|l} X^3 & +X^2 & -1 \quad X \quad -1 \\ \cline{3-3} -(X^3 & -X^2) & X^2 \\ \cline{1-2} & 2X^2 & -1 \end{array}$$

# Exemple

$A = X^3 + X^2 - 1 \qquad B = X - 1 \qquad Q = ? \quad R = ?$

$$
\begin{array}{rr|l}
X^3 + X^2 & & -1 \\
-(X^3 - X^2) & & \\
\hline
\boxed{2X^2} & & -1 \\
-(2X^2 - 2X) & & \\
\hline
2X & & -1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
\hline
\boxed{X} \quad -1 \\
\hline
X^2 + 2X \\
\\
\\
\\
\\
\end{array}
$$

# Exemple

$A = X^3 + X^2 - 1$ $B = X - 1$ $Q = ?$ $R = ?$

$$
\begin{array}{rrr|l}
X^3 & +X^2 & -1 & \boxed{X} \quad -1 \\
\cline{4-4}
-(X^3 & -X^2) & & X^2 \quad +2X \quad +2 \\
\cline{1-2}
2X^2 & & -1 & \\
-(2X^2 & -2X) & & \\
\cline{1-2}
\multicolumn{2}{r}{\boxed{2X}} & -1 & \\
\multicolumn{2}{r}{-(2X} & -2) & \\
\cline{2-3}
\multicolumn{3}{r}{+1} &
\end{array}
$$

# Exemple

$A = X^3 + X^2 - 1$ $B = X - 1$ $Q = ?$ $R = ?$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +X^2 & & -1 & X \quad -1 \\
\cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2 \quad +2X \quad +2 \\
\cline{1-2}
 & 2X^2 & & -1 & \\
 & -2X^2 & +2X & & \\
\cline{2-3}
 & & 2X & -1 & \\
 & & -2X & +2 & \\
\cline{3-4}
 & & & +1 &
\end{array}
$$

$Q = X^2 + 2X + 2$ $R = 1$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

**Consigne de rédaction :**

à l'issue du calcul on doit écrire la conclusion, ce n'est pas au lecteur de le faire. Par exemple :

Le quotient de la division euclidienne de $A$ par $B$ est $X^2 + 2X + 2$ et le reste est 1 :

$$A = B(X^2 + 2X + 2) + 1$$

# Sommaire

1 Introduction

2 Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$

3 Fonctions polynomiales, racines

4 Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

# Fonctions polynomiales

À tout polynôme à coefficients réels $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on associe la fonction *polynomiale* réelle $\tilde{P}$ définie sur $\mathbf{R}$ par $\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

# Fonctions polynomiales

À tout polynôme à coefficients réels $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on associe la

fonction *polynomiale* réelle $\tilde{P}$ définie sur $\mathbf{R}$ par $\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

On a simplement remplacé l'indéterminée $X$ par la variable réelle $x$

On dit que $\tilde{P}$ est la fonction polynomiale associée à $P$

En pratique, pour simplifier, on notera encore $P$ cette fonction

# Racines

**Définition**

Le réel $a$ est *racine* du polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ si $P(a) = 0$.

# Racines

Le résultat principal est celui-ci :

**Proposition**

*Soient $P$ un polynôme et $a$ un réel. Alors*

*$a$ est une racine de $P$ si et seulement si $X - a$ divise $P$*

**Démonstration.**

($\Rightarrow$) On a $P = (X - a)Q + R$ avec $\deg(R) < 1$ donc $R = r_0$ avec $r_0 \in \mathbf{R}$. De plus, $P(a) = 0 \Rightarrow (a - a)Q(a) + r_0 = r_0 = 0$ *i. e.* $P = (X - a)Q$ ou encore $X - a$ divise $P$.

□

# Racines

Le résultat principal est celui-ci :

**Proposition**

*Soient $P$ un polynôme et $a$ un réel. Alors*

*$a$ est une racine de $P$ si et seulement si $X - a$ divise $P$*

**Démonstration.**

($\Leftarrow$) Si $X - a$ divise $P$ alors $P = (X - a)Q$ avec $Q \in \mathbf{R}[X]$. Donc $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$ et $a$ est une racine de $P$.

□

# Factorisation

**Conséquence pratique :** si on observe que $P(a) = 0$ alors on sait que l'on peut factoriser $P$ par $X - a$. Pour ce faire on dispose de deux méthodes :

- **la division euclidienne :** elle aboutira à $P = (X - a)B$ (reste nul)
- **coefficients indéterminés** : méthode basée sur le fait que deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des monomes de même degré sont égaux.

# Coefficients indéterminés : exemple

## Exemple

$$P = X^3 - 4X^2 + X + 2$$

On observe que $P(1) = 0$ : on pourra donc écrire $P$ sous la forme

$$P = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$$

# Coefficients indéterminés : exemple

## Exemple

$$P = X^3 - 4X^2 + X + 2$$

On observe que $P(1) = 0$ : on pourra donc écrire $P$ sous la forme

$$P = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$$

On voit immédiatement que $a = 1$ et $c = -2$ : on les remplace

$$P = (X - 1)(X^2 + bX - 2)$$

puis on développe :

# Coefficients indéterminés : exemple

## Exemple

$$P = X^3 - 4X^2 + X + 2 = X^3 + (b-1)X^2 + (-2-b)X + 2$$

On a donc $b - 1 = -4$ et $-2 - b = 1$ (une seule égalité suffit)

$$\boxed{b = -3 \text{ et } X^3 - 4X^2 + X + 2 = (X-1)(X^2 - 3X - 2)}$$

# Coefficients indéterminés : exemple

**Exemple**

On pourra retrouver ce résultat en effectuant la division euclidienne de $X^3 - 4X^2 + X + 2$ par $X - 1$.

# Conséquences

**Corollaire**

*Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbf{N}$ possède au plus $n$ racine(s) distincte(s).*

**Corollaire**

*Soient $P$ et $Q$ des polynômes. Alors $\tilde{P} = \tilde{Q} \iff P = Q$.*

# Conséquences

Il en résulte que deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

# Racines multiples

**Définition**

L'*ordre de multiplicité* d'une racine $a$ d'un polynôme $P$ est le plus grand entier $m$ tel que $(X-a)^m$ divise $P$.

# Racines multiples

**Définition**

L'*ordre de multiplicité* d'une racine $a$ d'un polynôme $P$ est le plus grand entier $m$ tel que $(X-a)^m$ divise $P$.

$a$ est racine *double* si $m=2$ ou *triple* si $m=3$.

# Racines multiples

## Définition

L'*ordre de multiplicité* d'une racine $a$ d'un polynôme $P$ est le plus grand entier $m$ tel que $(X-a)^m$ divise $P$.

## Exemple

2 est une racine double de $P = X^3 - X^2 - 8X + 12$ (comment le vérifier ?)

# Racines multiples

**Définition**

L'*ordre de multiplicité* d'une racine $a$ d'un polynôme $P$ est le plus grand entier $m$ tel que $(X-a)^m$ divise $P$.

Il existe une relation entre l'ordre de multiplicité d'une racine et les racines des dérivées successives d'un polynôme (détails dans le polycopié à titre de complément).

# Sommaire

1 Introduction

2 Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$

3 Fonctions polynomiales, racines

4 Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

# Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

## Définition

Un polynôme $P$ de $\mathbf{R}[X]$ est *irréductible* s'il est non constant et si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme $\lambda P$ avec $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

Ces polynômes *multiples* de $P$ sont *associés à* $P$.

**Attention :** il ne faut pas confondre irréductibilité et absence de racine.

## Exemple

Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ n'a pas de racine (dans $\mathbf{R}$) mais n'est pas irréductible, comme on le verra plus tard en TD.

# Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ : un premier résultat –admis

**Théorème**

*Tout polynôme non constant est un produit (fini !) de facteurs irréductibles.*

*La décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs, sauf à changer certains facteurs en facteurs associés.*

# Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ : un second résultat –admis

**Théorème**

*Les polynômes irréductibles de* $\mathbf{R}[X]$ *sont les polynômes de degré* 1 *et les polynômes de degré* 2 *à discriminant strictement négatif.*

**Exemple**

- $X + 1$, $X^2 + X + 1$ sont irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.
- $X^4 + X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbf{R}[X]$.

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC