

Chapitre 3 : polynômes

L1 MATH103_MISPI

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$
- 3 Fonctions polynomiales, racines
- 4 Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$
- 3 Fonctions polynomiales, racines
- 4 Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

Objectifs

On ne fera pas de théorie générale : voir le polycopié (introduction) pour une explication concernant la définition mathématique et la notion d'*indéterminée*.

Les objectifs sont :

- 1 la division euclidienne des polynômes : principe et pratique
- 2 les notions de racine et de racine multiple
- 3 factorisation, polynômes irréductibles

Terminologie

Considérons le polynôme $P = 5X^4 - 3X^2 + X + 7$

P est de degré 4

Le terme de plus haut degré est $5X^4$

Le terme de plus bas degré est 7 (degré = 0)

$5X^4$, $-3X^2$, X et 7 sont les monômes de P

Le coefficient du monôme de degré 2 est -3

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$
- 3 Fonctions polynomiales, racines
- 4 Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

Division euclidienne (ou suivant les puissances décroissantes) dans $\mathbf{R}[X]$

On note $\mathbf{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ d'indéterminée X .

Un résultat à rapprocher de la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$:

Proposition

Soient A et B deux polynômes à coefficients réels avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

*Q et R s'appellent respectivement **quotient** et **reste** de la division euclidienne de A par B .*

Attention : ne pas oublier la contrainte $\deg(R) < \deg(B)$: elle assure l'unicité du couple (Q, R) .

Le degré du polynôme *nul* 0 (*i. e.* dont tous les coefficients sont nuls) est $-\infty$.

Exemple

$$A = X^3 + X^2 - 1 \quad B = X - 1 \quad Q = ? \quad R = ?$$

$$\begin{array}{r|l} X^3 & X \\ +X^2 & -1 \\ -1 & \end{array}$$

Exemple

$$A = X^3 + X^2 - 1 \quad B = X - 1 \quad Q = ? \quad R = ?$$

$$\begin{array}{r|l} \boxed{X^3} & +X^2 - 1 \\ \boxed{X} & - 1 \\ \hline & X^2 \end{array}$$

Exemple

$$A = X^3 + X^2 - 1 \quad B = X - 1 \quad Q = ? \quad R = ?$$

$$\begin{array}{r|rr}
 X^3 & +X^2 & -1 & X & -1 \\
 -(X^3 & -X^2) & & X^2 & \\
 \hline
 & 2X^2 & -1 & &
 \end{array}$$

Exemple

$$A = X^3 + X^2 - 1 \quad B = X - 1 \quad Q = ? \quad R = ?$$

$$\begin{array}{r}
 X^3 \quad + X^2 \quad - 1 \\
 -(X^3 \quad - X^2) \\
 \hline
 \boxed{2X^2} \quad - 1 \\
 -(2X^2 \quad - 2X) \\
 \hline
 2X \quad - 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \boxed{X} \quad - 1 \\
 \hline
 X^2 \quad + 2X \\
 \hline
 \boxed{X} \quad - 1 \\
 \hline
 X^2 \quad + 2X \\
 \hline
 2X \quad - 1
 \end{array}$$

$$A = X^3 + X^2 - 1 \quad B = X - 1 \quad Q = ? \quad R = ?$$

$$\begin{array}{r}
 X^3 + X^2 - 1 \\
 -(X^3 - X^2) \\
 \hline
 2X^2 - 1 \\
 -(2X^2 - 2X) \\
 \hline
 2X - 1 \\
 -(2X - 2) \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

Exemple

$$A = X^3 + X^2 - 1 \quad B = X - 1 \quad Q = ? \quad R = ?$$

X^3	$+X^2$	-1	X	-1
$-X^3$	$+X^2$		X^2	$+2X$
$2X^2$	-1		$+2$	
$-2X^2$	$+2X$			
$2X$	-1			
$-2X$	$+2$			
$+1$				

$$Q = X^2 + 2X + 2 \quad R = 1$$

Consigne de rédaction :

à l'issue du calcul on doit écrire la conclusion, ce n'est pas au lecteur de le faire. Par exemple :

Le quotient de la division euclidienne de A par B est $X^2 + 2X + 2$ et le reste est 1 :

$$A = B(X^2 + 2X + 2) + 1$$

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$
- 3 Fonctions polynomiales, racines
- 4 Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

Fonctions polynomiales

À tout polynôme à coefficients réels $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ on associe la fonction *polynomiale* réelle $\tilde{P}$ définie sur $\mathbf{R}$ par $\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

Fonctions polynomiales

À tout polynôme à coefficients réels $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ on associe la

fonction *polynomiale* réelle $\tilde{P}$ définie sur $\mathbf{R}$ par $\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

On a simplement remplacé l'indéterminée X par la variable réelle x

On dit que $\tilde{P}$ est la fonction polynomiale associée à P

En pratique, pour simplifier, on notera encore P cette fonction

Racines

Définition

Le réel a est *racine* du polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ si $P(a) = 0$.

Racines

Le résultat principal est celui-ci :

Proposition

Soient P un polynôme et a un réel. Alors

a est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P

Démonstration.

$(\Rightarrow)$ On a $P = (X - a)Q + R$ avec $\deg(R) < 1$ donc $R = r_0$ avec $r_0 \in \mathbf{R}$. De plus, $P(a) = 0 \Rightarrow (a - a)Q(a) + r_0 = r_0 = 0$ i. e. $P = (X - a)Q$ ou encore $X - a$ divise P .



Racines

Le résultat principal est celui-ci :

Proposition

Soient P un polynôme et a un réel. Alors

a est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P

Démonstration.

($\Leftarrow$) Si $X - a$ divise P alors $P = (X - a)Q$ avec $Q \in \mathbf{R}[X]$. Donc $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$ et a est une racine de P .



Factorisation

Conséquence pratique : si on observe que $P(a) = 0$ alors on sait que l'on peut factoriser P par $X - a$. Pour ce faire on dispose de deux méthodes :

- **la division euclidienne :** elle aboutira à $P = (X - a)B$
(reste nul)
- **coefficients indéterminés :** méthode basée sur le fait que deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des monomes de même degré sont égaux.

Coefficients indéterminés : exemple

Exemple

$$P = X^3 - 4X^2 + X + 2$$

On observe que $P(1) = 0$: on pourra donc écrire P sous la forme

$$P = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$$

Coefficients indéterminés : exemple

Exemple

$$P = X^3 - 4X^2 + X + 2$$

On observe que $P(1) = 0$: on pourra donc écrire P sous la forme

$$P = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$$

On voit immédiatement que $a = 1$ et $c = -2$: on les remplace

$$P = (X - 1)(X^2 + bX - 2)$$

puis on développe :

Coefficients indéterminés : exemple

Exemple

$$P = X^3 - 4X^2 + X + 2 = X^3 + (b - 1)X^2 + (-2 - b)X + 2$$

On a donc $b - 1 = -4$ et $-2 - b = 1$ (une seule égalité suffit)

$$b = -3 \text{ et } X^3 - 4X^2 + X + 2 = (X - 1)(X^2 - 3X - 2)$$

Coefficients indéterminés : exemple

Exemple

On pourra retrouver ce résultat en effectuant la division euclidienne de $X^3 - 4X^2 + X + 2$ par $X - 1$.

Conséquences

Corollaire

Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbf{N}$ possède au plus n racine(s) distincte(s).

Corollaire

Soient P et Q des polynômes. Alors $\tilde{P} = \tilde{Q} \iff P = Q$.

Conséquences

Il en résulte que deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Racines multiples

Définition

L'*ordre de multiplicité* d'une racine a d'un polynôme P est le plus grand entier m tel que $(X - a)^m$ divise P .

Racines multiples

Définition

L'*ordre de multiplicité* d'une racine a d'un polynôme P est le plus grand entier m tel que $(X - a)^m$ divise P .

a est racine *double* si $m = 2$ ou *triple* si $m = 3$.

Racines multiples

Définition

L'*ordre de multiplicité* d'une racine a d'un polynôme P est le plus grand entier m tel que $(X - a)^m$ divise P .

Exemple

2 est une racine double de $P = X^3 - X^2 - 8X + 12$ (comment le vérifier ?)

Racines multiples

Définition

L'*ordre de multiplicité* d'une racine a d'un polynôme P est le plus grand entier m tel que $(X - a)^m$ divise P .

Il existe une relation entre l'ordre de multiplicité d'une racine et les racines des dérivées successives d'un polynôme (détails dans le polycopié à titre de complément).

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$
- 3 Fonctions polynomiales, racines
- 4 Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$**

Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$

Définition

Un polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ est *irréductible* s'il est non constant et si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

Ces polynômes *multiples* de P sont *associés* à P .

Attention : il ne faut pas confondre irréductibilité et absence de racine.

Exemple

Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ n'a pas de racine (dans $\mathbf{R}$) mais n'est pas irréductible, comme on le verra plus tard en TD.

Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$: un premier résultat – admis

Théorème

Tout polynôme non constant est un produit (fini !) de facteurs irréductibles.

La décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs, sauf à changer certains facteurs en facteurs associés.

Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$: un second résultat – admis

Théorème

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Exemple

- $X + 1$, $X^2 + X + 1$ sont irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.
- $X^4 + X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbf{R}[X]$.