Chapitre 2 : nombres entiers, rationnels, réels

L1 MATH103_MISPI

Sommaire

1. Entiers naturels, récurrence
2. Entiers relatifs, nombres rationnels
3. Formule du binôme
4. Nombres réels

Sommaire

1 Entiers naturels, récurrence

2 Entiers relatifs, nombres rationnels

3 Formule du binôme

4 Nombres réels

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Entiers naturels

Ensemble noté $\mathbf{N}$. Sa construction mathématique est hors programme.

On rappelle que $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

p et q étant deux entiers tels que $p \leqslant q$, on note $[\![p, q]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre p et q, extrémités comprises :

$$[\![p, q]\!] = \{n \in \mathbf{N} : p \leqslant n \leqslant q\}$$

Exemple

$[\![1, 5]\!] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Division euclidienne dans **N**

Proposition

Pour tout couple $(a, \mathbf{b})$ *d'entiers naturels tel que* $\mathbf{b} \neq 0$ *il existe un unique couple* (q, r) *d'entiers tel que* $a = \mathbf{b}\,q + r$ *et* $\boxed{r < \mathbf{b}}$

q et r : quotient et reste de la division euclidienne de a par **b**.

Si $r = 0$ alors $a = \mathbf{b}\,q$ et on dit que **b** divise a, ou que a est multiple de **b**. On écrit $\mathbf{b} \mid a$

Attention : l'**unicité** du couple (q, r) est assuré par la contrainte $r < b$: il ne faut donc pas oublier celle-ci dans l'énoncé

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Division euclidienne dans **N**

Proposition

Pour tout couple $(a, \boldsymbol{b})$ *d'entiers naturels tel que* $\boldsymbol{b} \neq 0$ *il existe un unique couple* (q, r) *d'entiers tel que* $a = \boldsymbol{b}\,q + r$ *et* $\boxed{r < \boldsymbol{b}}$

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
8 & 7 & 3 & 1 & 8 & \mathbf{1} & \mathbf{9} & & \\
\hline
7 & 6 & & & & 4 & 5 & 9 & 5 \\
\hline
1 & 1 & 3 & & & & & & \\
 & 9 & 5 & & & & & & \\
\hline
 & 1 & 8 & 1 & & & & & \\
 & 1 & 7 & 1 & & & & & \\
\hline
 & & 1 & 0 & 8 & & & & \\
 & & & 9 & 5 & & & & \\
\hline
 & & & 1 & 3 & & & &
\end{array}
$$

Décomposition en produit de facteurs premiers

On rappelle qu'un entier > 1 est premier si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même. Tout entier naturel > 1 possède au moins un diviseur premier et on a le résultat de décomposition suivant :

Proposition

Soit $n > 1$ un entier naturel. Il existe une unique séquence de nombres premiers $p_1 < \cdots < p_k$ et une unique séquence d'entiers naturels non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tels que $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

Exemple

$87318 = 2 \times 3^4 \times 7^2 \times 11$.
On a $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$ et $\alpha_4 = 1$.

Récurrence

On cherche à prouver une assertion de la forme

$$\forall n \in \mathbf{N},\ P(n)$$

où $P(n)$ est une propriété qui dépend de l'entier n, autrement dit à prouver que tous les entiers vérifient la propriété P.
On montre que :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie } (\textit{initialisation}) \\ \forall n \in \mathbf{N}, (P(n) \Longrightarrow P(n+1)) \ (\textit{hérédité}) \end{cases}$$

On conclut : $\forall n \in \mathbf{N},\ P(n)$
(comprendre : « pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie »)

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Récurrence

On pourra penser à l'analogie d'une course de relai : pour que le témoin passe par toutes les mains, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- le premier coureur doit partir avec le témoin dans la main,
- tout coureur qui a son témoin en main doit le transmettre au suivant,

faute de quoi il y a élimination.

Exemple

Il s'agit de montrer que la propriété :

$$P(n) \ : \ 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

est vraie pour tout entier n

Exemple

$$P(n) \ : \ 0+1+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. $P(0) : 0 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$, donc $P(0)$ est vraie.
2. **Hypothèse de récurrence :** $P(n)$ est vraie pour un certain entier n ($\geqslant 0$)

   On doit montrer que $P(n+1)$ est vraie

Exemple

$$P(n) \ : \ 0+1+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. $P(0) : 0 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$, donc $P(0)$ est vraie.
2. **Hypothèse de récurrence :** $P(n)$ est vraie pour un certain entier n ($\geqslant 0$)

   On doit montrer que $P(n+1)$ est vraie

Exemple

$$P(n) \ : \ 0+1+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned}
(0+1+2^2+\cdots+n^2)+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)}{6}[2n^2+n+6n+6] \\
&= \frac{(n+1)}{6}(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, on a montré que l'égalité est valide pour tout entier n.

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Sommaire

1 Entiers naturels, récurrence

2 Entiers relatifs, nombres rationnels

3 Formule du binôme

4 Nombres réels

Entiers relatifs, nombres rationnels

Pour mémoire...

$\mathbf{Z}$: ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}\backslash\{0\}$

$\mathbf{Q}$: ensemble des rationnels, $r \in \mathbf{Q}$, $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$

L'équation $x^2 = 2$, par exemple, n'a pas de solution dans $\mathbf{Q}$. On dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, comme la plupart des humains. Ceci, entre autres, rend nécessaire la construction d'un ensemble tel que $\mathbf{R}$.

Division euclidienne dans $\mathbf{Z}$

Proposition

Pour tout couple $(a, \boldsymbol{b})$ d'entiers relatifs tel que $\boldsymbol{b} \neq 0$ il existe un unique couple (q, r) d'entiers relatifs tel que $a = \boldsymbol{b}\,q + r$ et $0 \leq r < |\boldsymbol{b}|$.

Exemple : $(a, \mathbf{b}) = (-7, \mathbf{-2})$.

$$-7 = \mathbf{-2} \times 4 + 1 \text{ et non pas } -7 = \mathbf{-2} \times 3 - 1.$$

On a $q = 4$ et $r = 1$.

Sommaire

1 Entiers naturels, récurrence

2 Entiers relatifs, nombres rationnels

3 Formule du binôme

4 Nombres réels

Factorielle

Pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$n! := n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

C'est le produit des n premiers entiers non nuls.
On pose $0! = 1$ par convention.

Exemple

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

On a la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n+1)! = (n+1)\, n!$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Combinaisons de *p* éléments parmi *n*

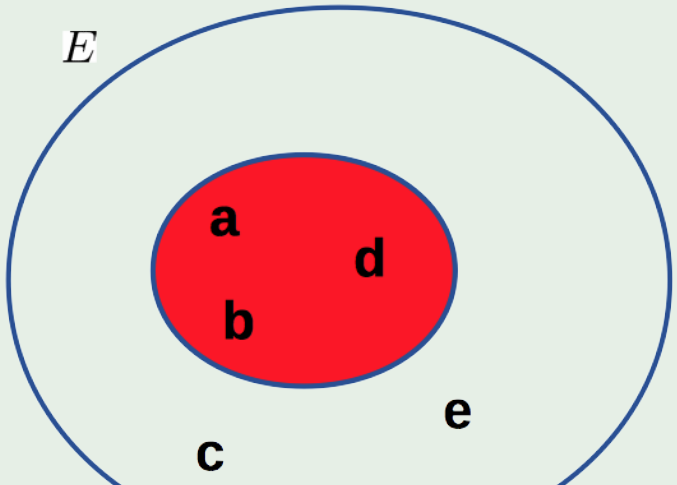
Définition

Une *combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments* est une partie à *p* éléments de cet ensemble.

Le *nombre* de ces combinaisons est noté $\binom{n}{p}$

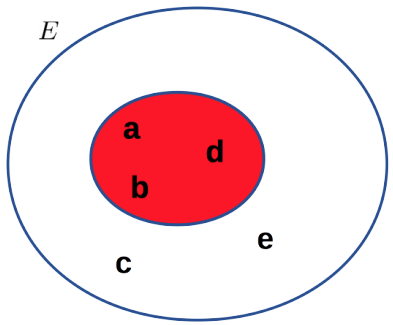
Exemple

On veut choisir un groupe de 3 étudiants parmi 5.



Combinaisons de p éléments parmi n

Choisir 3 étudiants parmi 5



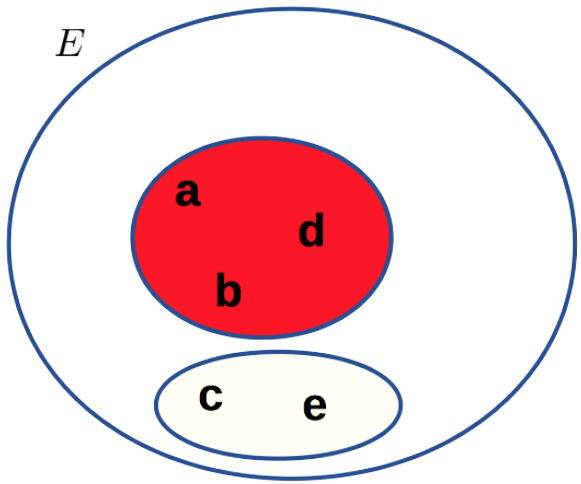
Il y a $5x4x3$ façons de les désigner l'un après l'autre, donc avec un ordre. Par exemple (a, d, b) ...
Il y a $3x2 = 6 = 3!$ façons d'ordonner ces mêmes 3 étudiants :
(a, b, d), (a, d, b), (b, a, d), (b, d, a), (d, a, b), (d, b, a)
On conclut que le nombre de parties à 3 éléments parmi 5 est $\frac{5x4x3}{3x2} = 10$.

Cela peut s'écrire $\frac{(5x4x3)x(2x1)}{(3x2x1)x(2x1)} = \frac{5!}{3!\,2!}$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Combinaisons de p éléments parmi n

Choisir 3 étudiants parmi 5



C'est aussi le nombre de façons de choisir 2 étudiants parmi 5 : ceux qu'on écarte

Combinaisons de p éléments parmi n

Nombre de combinaisons de p éléments parmi n avec $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &:= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \cdots}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times (n-p) \times (n-p-1) \times \cdots \times}\end{aligned}$$

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Exemples et propriétés

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$
- $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}}$ (avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$)

Exemples et propriétés

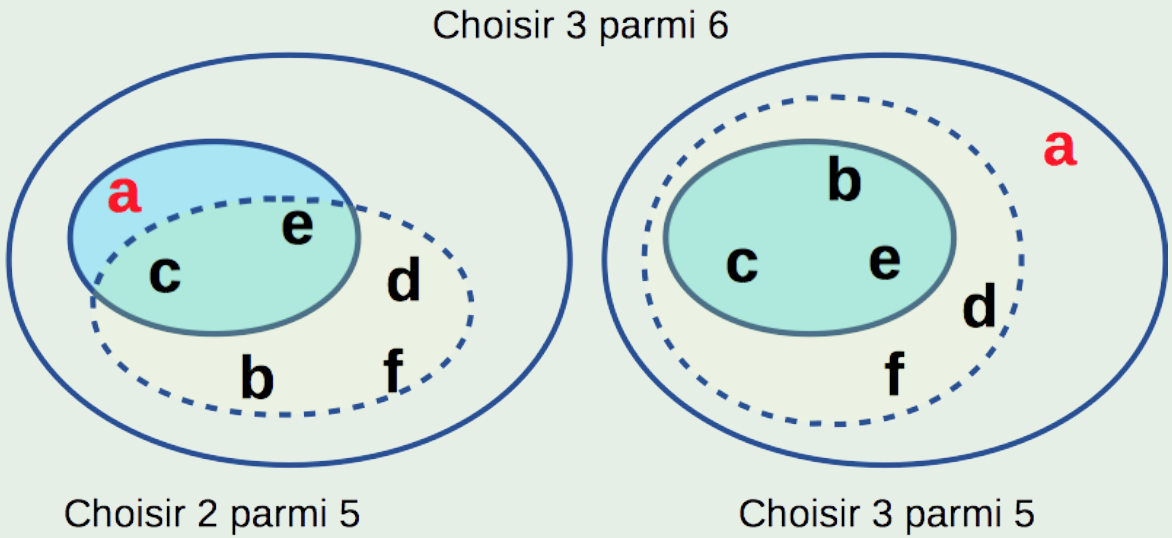
Prouvons cette dernière propriété

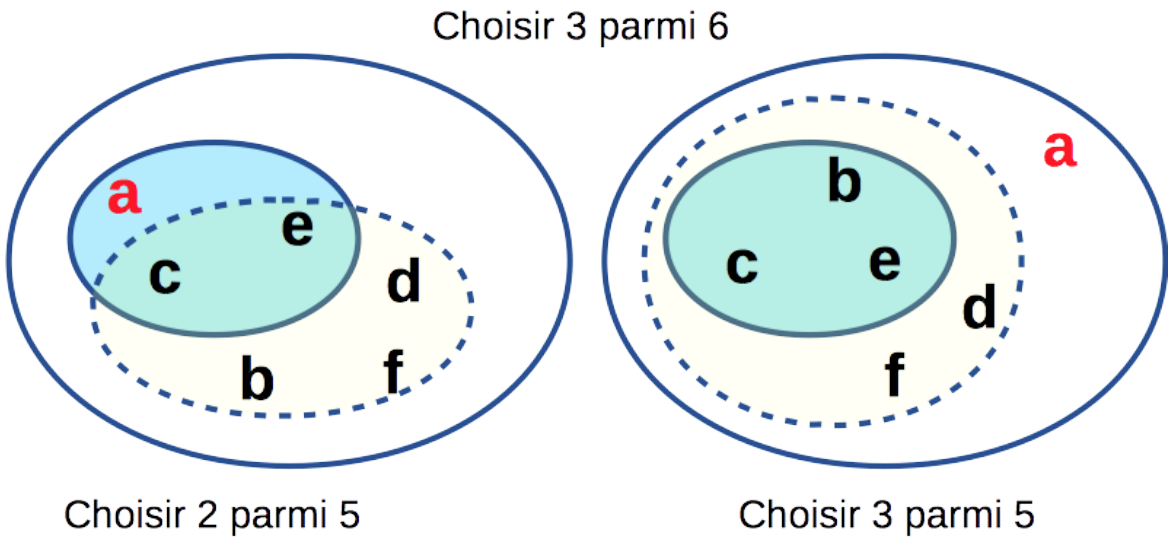
Dans un ensemble E à n éléments on doit choisir p éléments : $\binom{n}{p}$ façons.

On en choisit un quelconque mais fixé : a par exemple

Exemple

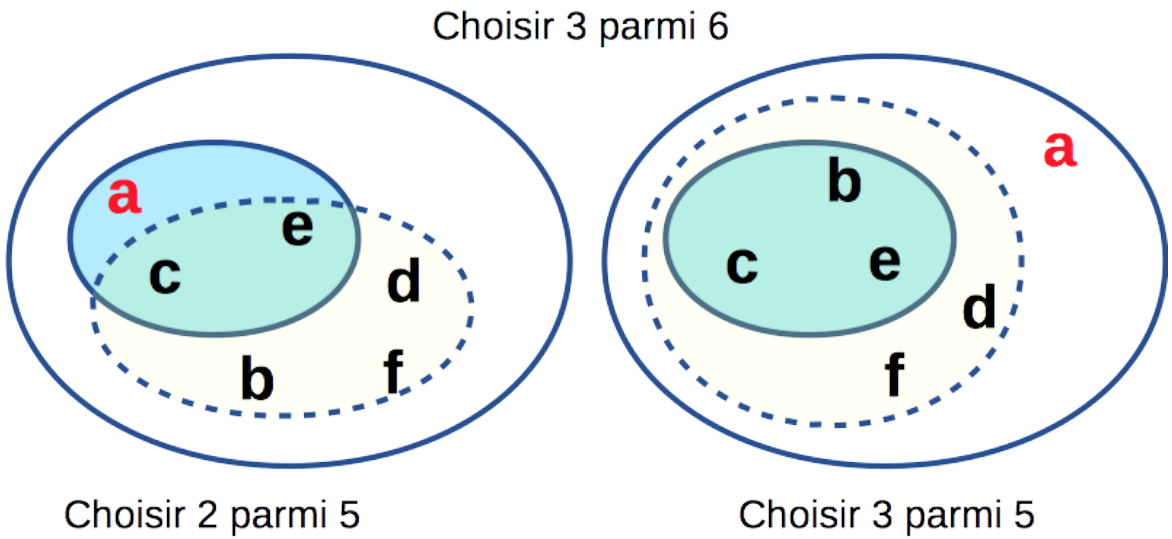
$n = 6, p = 3$





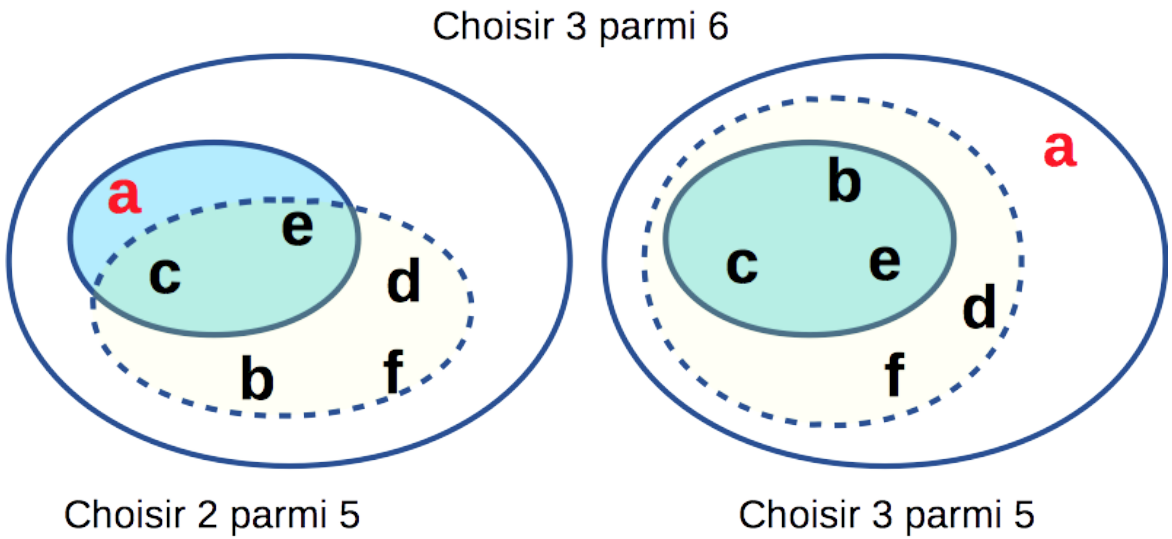
Parmi les parties à p éléments il y a :

celles qui contiennent a : on les obtient en lui adjoignant $p-1$ éléments parmi les $n-1$ restants : $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités



Parmi les parties à p éléments il y a :

celles qui ne contiennent pas a : on les obtient en choisissant p éléments parmi les $n-1$ restants : $\binom{n-1}{p}$ possibilités



Il reste à faire la somme car les deux cas s'excluent mutuellement :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Triangle de Pascal

Il permet de calculer de proche en proche les $\binom{n}{p}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} &
\end{array}$$

(avec n indice de *ligne* et p indice de *colonne*.)

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Triangle de Pascal

Il permet de calculer de proche en proche les $\binom{n}{p}$:

	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

n numérote les lignes et $p \in [\![0, n]\!]$ les colonnes

Triangle de Pascal

Il est basé sur l'égalité $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & + & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & & \downarrow & & & & & & & \\
1 & & & 5 & & 10 & + & 10 & & 5 & 1 \\
 & & & & & & & ? & & & \\
1 & & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & 6 & 1
\end{array}
$$

$$\binom{5}{1} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} = 1 + 4 = 5$$

$$\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Symboles $\sum$ et $\prod$

Sur quelques exemples :

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n, \quad \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$\sum_{k=2}^{8} k^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$$

Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

Démonstration.

Par récurrence sur n. □

Les coefficients se lisent sur la ligne $n \in \mathbf{N}$ du triangle de Pascal.

Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

Exemple

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4\, b + 10a^3\, b^2 + 10a^2\, b^3 + 5a\, b^4 + b^5$$

Remarque

On peut aussi écrire la formule du binôme dans l'ordre inverse :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Sommaire

1 Entiers naturels, récurrence

2 Entiers relatifs, nombres rationnels

3 Formule du binôme

4 Nombres réels

Nombres réels

Dans **N**, l'équation $x + 1 = 0$ (par exemple) n'a pas de solution, c-à-d. que 1 n'est pas symétrisable dans **N**, ainsi d'ailleurs que tous les entiers naturels non nuls.

Ceci amène à la construction de l'ensemble **Z** des entiers relatifs : -1 est alors la solution de cette équation.

Nombres réels

Dans **Z**, l'entier non nul a étant donné, l'équation $x \cdot a = 1$ n'a pas de solution, sauf pour $a \in \{-1, 1\}$.

Ce problème est résolu par la construction de l'ensemble **Q** des nombres rationnels : la solution est alors $\frac{1}{a}$.

Nombres réels

Dans **Q**, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution.

Il y a aussi d'autres défauts, liés essentiellement à la notion de borne supérieure (voir plus loin) qui rendent nécessaire la construction de l'ensemble **R** des nombres réels

Nombres réels : opérations

R est un ensemble muni de deux opérations, la somme et le produit, qui doivent être *entendues* comme des applications :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \quad \text{et} \quad \times : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\,y \end{array}$$

Nombres réels : opérations

Propriétés de la somme :

- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
- 0 est élément neutre : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad x + 0 = 0 + x = x$
- Tout élément est symétrisable :
  $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists! y \in \mathbf{R}),\ x + y = y + x = 0.$
  On note y sous la forme $-x$ et la notation $a - b$ représente $a + (-b)$ (soustraction).
- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x + y = y + x$

On dit que $(\mathbf{R}, +)$ est un groupe commutatif

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Nombres réels : opérations

Propriétés du produit :

- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x\,y = y\,x$
- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad (x\,y)\,z = x\,(y\,z)$
- 1 est élément neutre : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad x.1 = 1.x = x$
- Tout élément non nul est inversible :
  $\forall x \in \mathbf{R}^*, \exists! y \in \mathbf{R}^*, \quad x\,y = y\,x = 1$. y est noté $\dfrac{1}{x}$
  Ces propriétés rendent $(\mathbf{R}^*, \times)$ un groupe commutatif
- Distributivité du produit sur la somme :
  $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad x\,(y + z) = x\,y + x\,z$

Nombres réels : opérations

On dit finalement que

$$(\mathbf{R}, +, \times) \text{ est un corps commutatif}$$

$(\mathbf{Q}, +, \times)$ a les mêmes propriétés algébriques que $(\mathbf{R}, +, \times)$:
$(\mathbf{Q}, +, \times)$ est aussi un corps commutatif.

Nombres réels

Autres propriétés usuelles (programme de 5e) :

- $-(ab) = (-a)b = a(-b)$, $\dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{b}$,
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$, en particulier $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ka}{kb}$ pour $k \in \mathbf{R}^*$,
- $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$,
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

Nombres réels

Exposants : on pose $x^1 = x$ et pour $x \neq 0$, $x^0 = 1$.

La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}$, $x^{n+1} = x.x^n$ permet de définir x^n pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$. Alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \forall n, p \in \mathbf{N}, \quad x^{n\,p} = (x^n)^p = (x^p)^n, \quad x^{n+p} = x^n\,x^p}$$

La convention $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ permet d'étendre la notion d'exposant aux exposants entiers relatifs avec les mêmes règles de calcul

Relation d'ordre

Sur $\mathbf{R}$, il existe une relation d'ordre $\leqslant$ qui permet de comparer les réels entre eux :

$$x \leqslant y \iff y - x \in \mathbf{R}_+ = [0, +\infty[.$$

La terminologie « relation d'ordre » est liée aux propriétés :

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ x \leqslant x$ (*réflexivité*),
2. $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$ (*transitivité*),
3. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Longrightarrow x = y$ (*antisymétrie*)

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Relation d'ordre

Sur $\mathbf{R}$, il existe une relation d'ordre $\leqslant$ qui permet de comparer les réels entre eux :

$$x \leqslant y \iff y - x \in \mathbf{R}_+ = [0, +\infty[.$$

Si x et y sont des réels, alors on a nécessairement $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$:

On dit que la relation d'ordre $\leqslant$ est *totale*

Relation d'ordre et règles de base

- On peut ajouter un même réel aux deux membres d'une inégalité :

$$x \leqslant y \Longrightarrow x + a \leqslant y + a$$

- On peut multiplier par un même réel positif les deux membres d'une inégalité :

$$\begin{cases} x \leqslant y \\ 0 \leqslant a \end{cases} \Longrightarrow ax \leqslant ay$$

On dit que les opérations $+$ et $\times$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leqslant$.

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Relation d'ordre et règles de base

- Si on multiplie par un même réel négatif les deux membres d'une inégalité, cela change le sens de l'inégalité :

$$\begin{cases} x \leqslant y \\ a \leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow ay \leqslant ax$$

- On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens :

$$\begin{cases} x \leqslant y \\ a \leqslant b \end{cases} \Longrightarrow x + a \leqslant y + b$$

Relation d'ordre et règles de base

- Si on multiplie par un même réel négatif les deux membres d'une inégalité, cela change le sens de l'inégalité :

$$\begin{cases} x \leqslant y \\ a \leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow ay \leqslant ax$$

- **ATTENTION :** on ne peut pas soustraire des inégalités membre à membre. Il faut se ramener au cas précédent

Exemple

$$\begin{cases} x \leqslant y \\ a \leqslant -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqslant y \\ 1 \leqslant -a \end{cases} \quad \text{d'où } x + 1 \leqslant y - a$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Relation d'ordre et règles de base

- On peut multiplier membre à membre des inégalités de même sens si tout les membres sont positifs :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant a \leqslant b \end{cases} \Longrightarrow ax \leqslant by$$

- **Inverse et division :**

$$0 < x \leqslant y \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$$

D'où : $\begin{cases} 0 < a \leqslant b \\ 0 < x \leqslant y \end{cases} \Longrightarrow \frac{a}{y} \leqslant \frac{b}{x}$ en utilisant le produit membre à membre.

En fait, il faut toujours voir la division comme une multiplication par l'inverse : $\frac{a}{x} = a \cdot \frac{1}{x}$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Valeur absolue : définition et propriétés

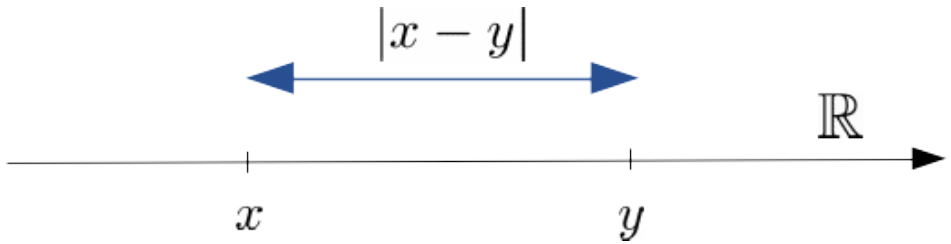
$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propriétés :

- $|-x| = |x|$,
- $|x\,y| = |x|\,|y|$,
- **Inégalité triangulaire :** $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$,
- **Conséquence :** $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ ||x| - |y|| \leqslant |x \pm y|$

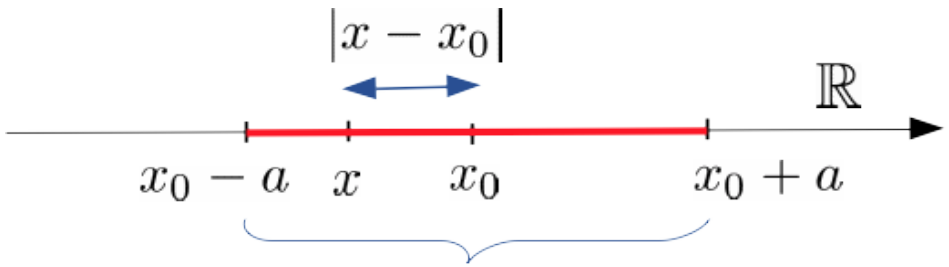
Valeur absolue et distance

Pour x et y réels, $|x-y|$ mesure la distance entre x et y.



soient $x_0 \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$ et $a \geqslant 0$, alors :

$$|x-x_0| \leqslant a \iff -a \leqslant x-x_0 \leqslant a$$
$$\iff x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$$



$$[x_0-a, x_0+a] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x-x_0| \leq a\}$$

Majorants, minorants

A désigne une partie de $\mathbf{R}$

Définition (Majorant, minorant)

Un *majorant* de A est un réel M tel que $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
Un *minorant* de A est un réel m tel que $\forall x \in A,\ x \geqslant m$.

Attention : ces éléments n'existent pas toujours.

S'il existe un majorant (resp. un minorant) alors A est *majorée* (resp. *minorée*).

Un ensemble de réels à la fois majoré et minoré est *borné*.

Majorants, minorants

On retiendra :

Proposition

Une partie A est bornée si et seulement si il existe un réel M' tel que $\forall x \in A, \quad |x| \leqslant M'$.

Majorants, minorants

Exemple

- $A = \mathbf{N}$: 0 est un minorant, -10 en est un autre, il n'existe pas de majorant
- $A =]0, 1[$: -2 est un minorant, 1 est un majorant, π en est un autre.

Plus grand élément, plus petit élément

- S'il existe un majorant M de A qui est élément de A, alors il est *unique*. On l'appelle *le plus grand élément* (ou *maximum*) de A.
On écrit $M = \max(A)$.
- De même, si un réel m est un minorant de A et est élément de A, on l'appelle *le plus petit élément* (ou *minimum*) de A.
On écrit $m = \min(A)$

L'unicité est très simple à obtenir : si M et M' sont des majorants de A et sont dans A, on a à la fois $M \leqslant M'$ ($M \in A$ et M' majorant) et $M' \leqslant M$ ($M' \in A$ et M majorant), donc $M = M'$.

Ces éléments n'existent pas toujours non plus.

Plus grand élément, plus petit élément

Exemple

- $A = \mathbf{N}$: 0 est le plus petit élément, il n'y a pas de plus grand élément
- $A =]0, 1[$: ni plus petit ni plus grand élément
- $A =]0, 1]$: pas de plus petit élément, 1 est le plus grand élément : $\max(A) = 1$

Plus grand élément, plus petit élément

Des propriétés usuelles (admises) :

- Toute partie non vide de **N** admet un plus petit élément
- Toute partie non vide et majorée de **N** admet un plus grand élément
- Toute partie non vide et minorée de **Z** admet un plus petit élément
- Toute partie non vide et majorée de **Z** admet un plus grand élément

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Plus grand élément, plus petit élément

Des propriétés usuelles (admises) :

- Toute partie non vide de **N** admet un plus petit élément
- Toute partie non vide et majorée de **N** admet un plus grand élément
- Toute partie non vide et minorée de **Z** admet un plus petit élément
- Toute partie non vide et majorée de **Z** admet un plus grand élément

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Plus grand élément, plus petit élément

Application : partie entière d'un réel.

Étant donné un réel x, l'ensemble non vide des entiers relatifs n tels que $n \leqslant x$ est majoré (par x)
Il admet donc un plus grand élément qu'on appelle sa *partie entière (inférieure)* notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

C'est l'unique entier vérifiant

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

ou de manière équivalente

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

Exemples :

$\lfloor 2 \rfloor = ?$, $\lfloor \pi \rfloor = ?$, $\lfloor -2 \rfloor = ?$, $\lfloor -2.7 \rfloor = ?$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Plus grand élément, plus petit élément

Application : partie entière d'un réel.

Étant donné un réel x, l'ensemble non vide des entiers relatifs n tels que $n \leqslant x$ est majoré (par x)
Il admet donc un plus grand élément qu'on appelle sa *partie entière (inférieure)* notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

C'est l'unique entier vérifiant

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

ou de manière équivalente

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

Exemples :

$\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Borne supérieure et borne inférieure

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$.

On admettra que l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément S : on l'appelle *la borne supérieure de A*

borne supérieure de A = plus petit de tous les majorants de A

S est donc unique et caractérisé par :

1. S est un majorant de A,
2. si M est un majorant quelconque de A alors $S \leqslant M$.

On écrit $S = \sup A$.

Borne supérieure et borne inférieure

De même, si A est non vide et minorée alors l'ensemble des minorants possède un plus grand élément s qu'on appelle *borne inférieure de A*

borne inférieure de A = plus grand de tous les minorants de A

1. s est un minorant de A,
2. si m est un minorant quelconque de A alors $m \leqslant s$.

On écrit $s = \inf A$

Borne supérieure et borne inférieure

Exemples :

- $A = \mathbf{N}$: 0 est le plus petit élément et la borne inférieure. Pas de borne supérieure
- $A =]0, 1[$: $\inf A = 0$, $\sup A = 1$
- $A =]0, 1]$: $\inf A = 0$, $\sup A = 1$.

Borne supérieure et borne inférieure

Exemples :

$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\}$. $\inf(A) = ?$, $\sup(A) = ?$

Borne supérieure et borne inférieure

Exemples :

$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\}$. $\quad \inf(A) = 0, \sup(A) = \max(A) = 1$

Borne supérieure et borne inférieure

Si A possède un plus grand élément, c'est aussi la borne supérieure mais la réciproque est fausse : comparer aux exemples ci-dessus
Il faut donc bien faire la différence entre $\max(A)$ et $\sup(A)$, en particulier :

$$\boxed{M = \max(A) \iff M = \sup(A) \text{ et } M \in A}$$

Remarque analogue pour la borne inférieure et le plus petit élément.
Si A est non vide et borné avec $s = \inf A$ et $S = \sup A$ alors on a

$$\forall x \in A, \quad s \leqslant x \leqslant S$$

et ceci est le plus **fin** des encadrements communs à tous les éléments de A (avec des inégalités larges).

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Borne supérieure et borne inférieure

Proposition

Soient A un ensemble non vide, s et S des réels. Alors :

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leqslant S, \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \quad A \cap]S - \varepsilon, S] \neq \varnothing \\ \textit{ou encore :} \ (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A), \ S - \varepsilon < x \leqslant S. \end{cases}$$

De même :

$$s = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \quad s \leqslant x, \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \quad A \cap [s, s + \varepsilon[\neq \varnothing. \end{cases}$$