

Math 203 – Examen (2h) : solutions.

La notation prend en compte la clarté de la rédaction comme l'économie des calculs.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

1 Intégration (6pts)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Un chateau d'eau a la forme d'un hyperboloïde de révolution de hauteur H , c'est à dire que sa coupe horizontale à la hauteur h au-dessus du sol est un disque dont le rayon $r(h)$ est donné par

$$r(h) = \sqrt{R^2 + \lambda^2 h^2},$$

les constantes R et λ étant données. Autrement dit, la forme du chateau d'eau est obtenue par révolution autour de l'axe des h du graphe de la fonction $r(h)$ ci-dessus entre $h = 0$ (le sol) et $h = H$ (la hauteur du chateau d'eau).

- (a) Rappeler l'expression du volume V d'un solide obtenu par révolution du graphe d'une fonction $t \mapsto f(t)$ autour de l'axe des t entre $t = t_0$ et $t = t_1$.

$$V = \int_{t_0}^{t_1} \pi f(t)^2 dt.$$

- (b) Calculer le volume du chateau d'eau en fonction de R, λ et H .

En utilisant la question précédente et l'expression de $r(h)$ donnée par l'énoncé, il vient :

$$\begin{aligned} \text{Volume du chateau d'eau} &= \int_0^H \pi \left(\sqrt{R^2 + \lambda^2 h^2} \right)^2 dh \\ &= \pi \int_0^H R^2 + \lambda^2 h^2 dh \\ &= \pi \left[R^2 h + \frac{\lambda^2 h^3}{3} \right]_0^H \\ &= \pi \left(R^2 H + \frac{\lambda^2 H^3}{3} \right) \end{aligned}$$

2. Calculer la primitive suivante : $\int t^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$.

Par intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} \int t^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt &= -2t^2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \int 4t \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= -2t^2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 8t \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \int 8 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= -2t^2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 8t \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 16 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= (16 - 2t^2) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 8t \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

2 Équations différentielles (8pts)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On modélise la suspension d'une voiture par le couplage d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de coefficient c placés entre les roues et le châssis. Si $x(t)$ désigne la hauteur du châssis par rapport à son point de repos à l'instant t , le ressort fait subir au châssis une force de rappel $R = -kx$ et l'amortisseur une force $A = -c \frac{dx}{dt}$ où $\frac{dx}{dt}$ désigne la composante verticale de la vitesse du châssis, c'est à dire la dérivée de $x(t)$. En régime libre, la loi fondamentale de la dynamique nous donne alors, en notant $\frac{d^2x}{dt^2}$ la composante verticale de l'accélération du châssis, c'est à dire la dérivée seconde de $x(t)$:

$$(H) : \quad m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -c \frac{dx}{dt}(t) - kx(t),$$

où m est la masse supportée par le châssis (moteur, habitacle et autres pièces suspendues).

- (a) Donner l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (H).

$$(C) : mr^2 + cr + k = 0$$

- (b) On donne $m = 1, c = 4, k = 5$. (Ces constantes sont choisies pour alléger les calculs et ne correspondent pas à une réalité physique). Donner l'expression des solutions de (H).

(C) devient $r^2 + 4r + 5 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$. Les deux racines de (C) sont donc $r_1 = -2 + i$ et $r_2 = -2 - i$. On en déduit l'expression des solutions de l'équation différentielle homogène (H) :

$$x(t) = Ae^{-2t} \cos(t) + Be^{-2t} \sin(t), \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

- (c) On modélise maintenant les fluctuations de la route par une force sinusoïdale s'appliquant à notre système, de sorte que l'équation satisfaite par x devient :

$$(E) : \quad m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -c \frac{dx}{dt}(t) - kx(t) + 24 \sin(t).$$

Donner une solution particulière de (E).

On cherche une solution particulière sous la forme $x(t) = A \sin(t) + B \cos(t)$. On a alors $x'(t) = A \cos(t) - B \sin(t)$ et $x''(t) = -A \sin(t) - B \cos(t)$.

En remplaçant, il vient :

$$(-B + 4A + 5B) \cos(t) + (-A - 4B + 5A) \sin(t) = 24 \sin(t).$$

Cette égalité ayant lieu pour tout t , on en déduit

$$\begin{cases} 4A + 4B = 0 \\ 4A - 4B = 24 \end{cases}$$

On en tire $A = 3$ et $B = -3$. Finalement, une solution particulière de (E) est donnée par

$$x(t) = 3 \sin(t) - 3 \cos(t)$$

- (d) Donner la forme générale des solutions de (E).

Les solutions de (E) sont les sommes d'une solution particulière de (E) avec toutes les solutions de (H), autrement dit les

$$x(t) = 3 \sin(t) - 3 \cos(t) + Ae^{-2t} \cos(t) + Be^{-2t} \sin(t), \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$2y'' - 5y' - 3y = -3t - 8.$$

L'équation homogène associée est

$$2y'' - 5y' - 3y = 0,$$

et son équation caractéristique associée est

$$2r^2 - 5r - 3 = 0$$

Un calcul rapide donne $r = (5 \pm 7)/4 = 3$ et $-1/2$. On en déduit les solutions de l'équation homogène $y(t) = Ae^{3t} + Be^{-t/2}$, avec A, B deux constantes.

On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $x(t) = at + b$. Remplacer dans l'équation et identifier les termes de même degré conduit à $-3a = -3$ et $-5a - 3b = -8$. Donc $a = 1$ et $b = 1$. Ainsi $x(t) = t + 1$ est une solution particulière de l'équation.

Finalement, les solutions de l'équation s'obtiennent par superposition, ce sont les

$$x(t) = t + 1 + Ae^{3t} + Be^{-t/2}$$

où A et B sont deux constantes.

3 Développements limités (6pts)

On veillera particulièrement à la précision des calculs et des notations pour cet exercice. Typiquement, un développement limité "oubliant" la partie négligée (le $o(x^k)$) est réputé faux.

La fonction tangente hyperbolique, notée \tanh , est définie comme le rapport du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique, de sorte que :

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On rappelle le développement limité de la fonction exponentielle à l'ordre n en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

1. Donner le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 des fonctions données par $f(x) = e^x - e^{-x}$ et $g(x) = e^x + e^{-x}$.

Après simplification, $f(x) = 2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, et $g(x) = 2 + x^2 + o(x^3)$.

2. Rappeler le développement limité à l'ordre n de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 0.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

3. À l'aide des deux précédents, calculer le développement limité de $\tanh(x)$ en 0 à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{2 + x^2 + o(x^3)} \\ &= \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ &= (x + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

4. Montrer que la tangente hyperbolique présente un point d'inflexion en $x = 0$, c'est à dire que son graphe passe d'un coté à l'autre de sa tangente en ce point.

Du développement précédent on tire que la tangente au graphe de \tanh a pour équation $y = x$ (terme linéaire), et que la différence $\delta(x) = \tanh(x) - x$ de la fonction et de sa tangente est $\delta(x) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x^3(-\frac{1}{3} + o(1))$. Comme $o(1) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, cette dernière écriture montre que $\delta(x)$ est positif pour x petit négatif, et est négatif pour x petit positif. Puisque le signe de la différence de \tanh et de sa tangente change en 0, c'est que le graphe de \tanh passe d'un coté à l'autre de sa tangente.