Outils mathématiques pour les sciences 2: CM 5 & 6: Développements limités

Olivier Le Gal

10 février 2026

Approximer une fonction.

Pourquoi ?

1. Parce qu'on a besoin d'un ordre de grandeur, et qu'un calcul approché est moins couteux.
   Pour $x = 0.1$, $x^2 = 0.01$, $x^3 = 0.001$,
   Si $f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$, alors $f(x) \approx 1 + 2x$ (à 10^{-1} près).
2. Parce qu'un calcul devient soluble en remplaçant une fonction par une approximation.
   L'équation du pendule est $\theta'' + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$, non linéaire. Mais $\sin(\theta) \approx \theta$ pour θ petit donne $\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ que l'on sait résoudre.
3. Parce que l'approximation nous renseigne sur le comportement de la fonction.
   $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = 1$

Un exemple

$f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$.

1. Approximer $f(x)$ pour x proche de 0 ne pose pas de problème : on tronque le polynôme à l'ordre de grandeur voulu.
   Chaque terme supplémentaire : 1, puis $2x$, puis $-x^2$ puis x^3 est "négligeable" devant le précédent.
2. Et pour x proche de 1 ?
   Les trois termes sont du même ordre.
3. $x \approx 1 \Rightarrow x = 1 + h$ avec $h \approx 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(1+h) &= 1 + 2(1+h) - (1+h)^2 + (1+h)^3 \\ &= 3 + 3h + 2h^2 + h^3 \\ &= 3 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3 \end{aligned}$$

Cette fois-ci les trois termes sont "négligeables" les uns devant les autres, et on peut approximer en tronquant à l'ordre désiré.

Un peu de vocabulaire

Définition

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, ou que g est prépondérant devant f au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On écrit alors $f(x) = o_{x \to a}(g(x))$.
Si l'indice $x \to a$ est omis, c'est que $a = 0$.

1. Au voisinage de 0, $x^4 = o(x^3)$.
2. En 0 encore, $\sin(x)^2 = o(x)$.
3. Au voisinage de 1, $(x-1) = o_{x \to 1}(1)$, $(x-1)^2 = o_{x \to 1}(x-1)$, $(x-1)^3 = o_{x \to 1}(x-1)^2$,...$(x-1)^{54} = o_{x \to 1}(x-1)^{42}$.
4. Quitte à écrire $x = a + h$, on peut toujours se ramener en 0 : $f(x) = o_{x \to a}(g(x)) \Leftrightarrow f(a+h) = o_{h \to 0}(g(a+h))$.

Un peu de vocabulaire

Définition

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, ou que g est prépondérant devant f au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On écrit alors $f(x) = o_{x \to a}(g(x))$.
Si l'indice $x \to a$ est omis, c'est que $a = 0$.

$f(x) = g(x)\frac{f(x)}{g(x)}$.
Donc $f(x) = o_{x \to a}(g(x))$ si et seulement si $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$.

Retour à l'exemple

$f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$.
Donc :

1. $f(x) = 1 + o(1)$
2. $f(x) = 1 + 2x + o(x)$.
3. $f(x) = 1 + 2x - x^2 + o(x^2)$.
4. $f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3 + o(x^3)$.

On a vu $f(x) = 3 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3$.
Donc :

1. $f(x) = 3 + o_{x\to 1}(1)$
2. $f(x) = 3 + 3(x-1) + o_{x\to 1}(x-1)$.
3. $f(x) = 3 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + +o_{x\to 1}(x-1)^2$.
4. $f(x) = 3 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3 + o_{x\to 1}(x-1)^3$.

D'où viennent les coefficients ?

Les coefficients

1. Premier coefficient : la valeur en a. En effet,

$$f(x) = f(a) + o_{x \to a}(1).$$

2. Second coefficient : on cherche $*$ tel que

$$f(x) = f(a) + *(x-a) + o(x-a)$$

   Autrement dit, $f(x) = f(a) + *(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to_{x \to a} 0$. Ou encore

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = * + \varepsilon(x)$$

   $x \to a$ donne $* = f'(a)$.
   On retrouve la tangente.

3. Coefficients suivants en lien avec les dérivées d'ordre supérieur ?

Coefficients

Revenons à $f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$ en 0 et dérivons ...

... et il vient :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x \to a}((x-a)^n)$$

Formule de Taylor-Young

Théorème

Soit f une fonction n fois dérivable en a. Alors f admet le développement limité suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_{x\to a}((x-a)^n)$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x\to a}((x-a)^n)$$

Exemples

$$\frac{1}{1-x}$$

$$e^x$$

$$\ln(1+x)$$

$$\sin(x)$$

$$\cos(x)$$

$$(1+x)^\alpha$$

Exemples (à connaître)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^n - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\dots)(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$$

Exemples

$$\frac{1}{1+x}$$

$$e^{ix}$$

$$\mathrm{sh}(x)$$

$$\mathrm{ch}(x)$$

Moralité : en connaître deux par coeur : e^x et $\frac{1}{1-x}$ Les autres s'en déduisent, mais il faut savoir le faire vite !

Manipulation des DL

Remarques :

1. $o(x^3)+o(x^2)=o(x^2)$. En effet, si ε_1 et ε_2 sont des fonctions qui tendent vers 0, alors $x^3\varepsilon_1(x)+x^2\varepsilon_2(x)=x^2(x\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x))$ et $x\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)\to 0$.
2. Plus généralement, $o(x^m)+o(x^n)=o(x^{\min(m,n)})$.
3. Attention, $o(x^n)-o(x^n)=o(x^n)$ et on ne peut pas dire mieux ! Les o ne se simplifient pas.
4. $o(x)+o(x-1)=$ rien du tout ! (Par exemple $\frac{x^2}{x-1}+\frac{(x-1)^2}{x}$ n'est borné ni en 0 ni en 1.)
5. $x\times o(x^6)=o(x^7)$.
6. $o(x^3)\times o(x^2)=o(x^5)$.
7. $o(x^3)\circ o(x^2)=o(x^6)$.

Moralité : les o se manipulent algébriquement sans difficulté en se souvenant que $o(x^k)$ veut dire "une fonction de la forme $x^k\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ tend vers 0". **Les fonctions ε correspondant à différents o n'ont aucune raison d'être liées.**

Somme, produit.

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité en a. Alors $f+g$ et $f \times g$ ont un développement limité, obtenu en faisant la somme ou le produit des deux développements, et en tronquant au premier o.

Exemple : $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^4 + o(x^4)$

Composition.

Si f admet un développement limité en a et si g admet un développement limité en $f(a)$, alors $g \circ f$ a un développement limité en a obtenu en composant les deux développements, et en tronquant au premier o.

Application : $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 5.

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Applications

1. En sciences physique, quand il s'agit d'obtenir un ordre de grandeur, il est courant que le premier terme du développement suffise en pratique.
2. Dans la vie courante, on rencontre souvent $\frac{1}{1+x}$ pour éviter de diviser de tête, ou $\sqrt{1+x}$ quand on traverse en biais.
3. En math, beaucoup de limites (indéterminées) se réduisent à des calculs de développements limités. Par exemple :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \mathrm{sh}(x)}{x(\cos(x) - \mathrm{ch}(x))}$$

Applications

1. La compréhension fine d'un graphe passe souvent par un développement à l'ordre 2. (Position vis-à-vis de la tangente). Par exemple, $\ln(1 + x + x^2)$ pour x proche de 0 ou de 1.
2. Le comportement d'une fonction à l'infini peut aussi souvent se ramener à un développement limité. Exemple : $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$ en $+\infty$ (et variations).

Les équivalents ... et leurs dangers

En sciences physique, le premier terme nous donne souvent l'information cherchée, et on utilise souvent des équivalents

Définition

On dit que f et g sont équivalentes en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On écrit $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$.
Si $x = 0$, on omet souvent l'indice $x \to 0$.

Exemples : $\sin(x) \sim x$, $\cos(x) \sim 1$, $e^x - 1 \sim x$.

Les équivalents ... et leurs dangers

Les équivalents se multiplient (et se divisent) bien.
Mais c'est quasiment leur seule bonne propriété :

1. Ils ne s'additionnent pas : $e^x \sim \cos(x)$, $1 + 2x \sim 1$ mais $e^x - (1 + 2x) = -x + o(x) \not\sim -\frac{x^2}{2} + o(x^2) = \cos(x) - 1$
2. Ils ne se composent pas : $e^{x^2+x} \not\sim_{x \to +\infty} e^{x^2}$
3. Ils poussent à l'erreur quand on conserve des termes négligeables : $e^x \sim 1 + 2x$, mais $e^x - 1 \sim x \not\sim 2x$.

À utiliser avec modération ! (Toujours se souvenir du sens : le rapport tend vers 1).

Quelques calculs pour s'ouvrir l'appétit.

$$DL_2 \frac{\sin(x)\ln(1+x)}{x^2-x^3} \text{ en } 0.$$

$$DL_2 e^x \text{ en } 1.$$

$$DL_3 \ln(x) \text{ en } 2.$$

$$DL_3 \sin(x) \text{ en } \frac{\pi}{4}.$$

$$DL_3 \exp(x)^2 \text{ en } 0.$$

$$DL_3 \frac{1}{x} \text{ en } 2.$$

$$DL_2 \frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ en } 0.$$