Outils mathématiques pour les sciences 2: CM 3 & 4: Intégration

Olivier Le Gal

27 janvier 2026

Un vieux problème

XVII^e siècle, problème des quadratures :

Étant donnée une courbe, déterminer la surface qu'elle enserre.

- Lié à l'autre grand problème du XVII^e, la question des tangentes (cf. dérivation, semestre 1).
- Résolu en pratique par Newton et Leibnitz indépendamment fin XVII^e, mais la théorie reste bancale ...
- ... jusqu'au milieu du XIX^e siècle, où elle est résolue rigoureusement par Riemann, grâce aux limites.
- Les "mesures" se réduisent souvent à des calculs d'intégrales : longueurs, aires, volumes, masses .... Ce sont des agrégations (sommes) de données continues.
- La difficulté théorique est la même que pour la dérivation : c'est la nécessité de traiter dans le même calcul une quantité comme nulle et non nulle.

Construction de l'intégrale

Un cas "simple" de quadrature : déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface bordée par l'axe des abcisses, $x = a$, $x = b$ et le graphe d'une fonction donnée f, positive et continue.

1. Découpage de la surface en n tranches verticales.
2. La k^e tranche a une aire proche de $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n}$.
3. $\mathcal{A}$ est donc proche de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n}$.
4. Si le monde est bien fait,

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n}.$$

Le monde est bien fait

Proposition

Si f est continue sur $[a, b]$, alors la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + k\frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n}$$

existe.

Définition

Cette limite est appelée intégrale de f entre a et b, et se note

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple : $\int_0^1 x\,dx$.

Vers le théorème fondamental de l'analyse

Fonction aire : surface délimitée par l'axe des abcisses, $x = a$, $x = t$ et le graphe de f.

$$\mathcal{A}(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

Faisons varier t :

Proposition

Si f est continue, la dérivée de la fonction aire au point t est $f(t)$:

$$\mathcal{A}'(t) = f(t)$$

$\mathcal{A}(t)$ est une **primitive** de $f(t)$.

Primitives, rappel.

- Une primitive de f est une fonction F telle que pour tout t, $F'(t) = f(t)$.
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
- Si F est une primitive de f, $t \mapsto F(t) + C$ est encore une primitive de f, quel que soit la constante C.

Intégrale et primitive

Théorème fondamentale de l'analyse

Si f est continue sur $[a, b]$ et si $F' = f$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pour calculer une intégrale, il "suffit" de savoir calculer une primitive.

Notations :

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ intégrale de f entre a et $b \to$ nombre.

$\displaystyle\int f(x)\,dx =$ primitive de $f \to$ fonction.

Ex : $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \qquad \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2.$

Propriétés et techniques

1. l'intégrale est signée. Si f est à valeurs négative, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < 0$.
2. Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
3. Conduit à définir, pour $a < b$, $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
4. Linéarité.
5. Un tableau de dérivées, lu à l'envers, donne un tableau de primitives.

Tableau de primitives usuelles, à connaître :

$f(x)$	$\int f(x)\ dx$	rem
x^n	$\frac{1}{n}x^{n+1}$	$n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	$x \neq 0$
e^x	e^x	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Arcsin(x)	$x \in]-1,1[$

Tableau de primitives de formes simples. Se déduit du précédent. $u(x)$ est une fonction dérivable.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	rem
$u(x)^n \cdot u'(x)$	$\frac{1}{n}u(x)^{n+1}$	$n \neq -1$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$u(x) \neq 0$
$e^{u(x)} \cdot u'(x)$	$e^{u(x)}$	
$\sin(u(x)) \cdot u'(x)$	$-\cos(u(x))$	
$\cos(u(x)) \cdot u'(x)$	$\sin(u(x))$	
$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$\mathrm{Arctan}(u(x))$	
$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(\mathrm{u(x)})$	$u(x) \in]-1,1[$

Intégration par partie

De $(fg)' = f'g + fg'$ on déduit :

Intégration par partie

$$\int f(t)g'(t)\,dt = f(t)g(t) + \int f'(t)g(t)\,dt$$

- Transforme le calcul de la primitive d'un produit en celui de la primitive d'un autre produit, où l'une des fonctions est dérivée, l'autre intégrée.
- Utile si la primitive d'un facteur n'est pas trop compliquée et la dérivée de l'autre facteur est plus simple.
- Par exemple, le produit d'un polynôme par une exponentielle (on dérive le polynôme jusqu'à ce qu'il soit constant)
- ou le produit d'un polynôme par un sinus ou cosinus (on dérive le polynôme jusqu'à ce qu'il soit constant)
- ou le produit d'un polynôme par un logarithme (on dérive le logarithme).

Vers la formule du changement de variable

L'aire d'un champ.
On mesure la largeur ℓ d'un champ à différentes abscisses $a = x_0, x_I, x_2, \ldots, x_n = b$. On approxime l'aire du champ par :

$$\mathcal{A} \sim \sum_{i=0}^{n-1} \ell(x_i) \times \delta x_i, \text{ avec } \delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

Si les δx_i tendent vers 0, la somme tend vers $\displaystyle\int_a^b \ell(x)\, dx$.

Vers la formule du changement de variable

On cherche obtenir ce même résultat, en connaissant cette fois la mesure de la largeur à différents instants $T_a = t_0, t_1, \ldots, t_n = T_b$ d'un parcours le long du champ.
À chaque instant t correspond une abscisse $x(t)$, et une largeur $\ell(x(t))$.
La distance séparant $x(t_i)$ et $x(t_{i+1})$ est

$$\delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \times (t_{i+1} - t_i)$$

Comme $\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{t_{i+1}-t_i} \sim \frac{dx}{dt}(t_i)$, on approxime l'aire du champ par :

$$\mathcal{A} \sim \sum_{i=0}^{n-1} \ell(x(t_i)) \times \frac{dx}{dt}(t_i) \times \delta t_i, \text{ avec } \delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

Si les δt_i tendent vers 0, la somme tend vers $\displaystyle\int_{T_a}^{T_b} \ell(x(t)) \frac{dx}{dt}(t)\, dt$.

Changement de variable

L'aire du champ ne dépend pas de la façon dont on la mesure :

$$\int_a^b \ell(x)\, dx = \int_{T_a}^{T_b} \ell(x(t)) \frac{dx}{dt}(t)\, dt.$$

C'est la formule du changement de variable :

Changement de variable.

$x = \varphi(t)$, φ fonction C^1.

$$\int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

Dans un changement de variable, on change :

1. la variable ;
2. les bornes ;
3. l'élément différentiel.

Changement de variable, exemples

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx =$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx =$$

Application : Volume d'un solide de révolution

Calcul du volume $\mathcal{V}$ du solide obtenu par rotation autour de l'axe des x du graphe de f entre $x = a$ et $x = b$.

- Découpage en rondelles ($\sim$ cylindres)
- Volume d'un cylindre : $\pi R^2 h$
- Somme des volumes : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)^2 \delta x_i$
- Limite : $\mathcal{V} = \displaystyle\int_a^b \pi f(x)^2 \, dx$.

Exemple : sphère.

Application : Longueur d'une courbe

Calcul de la longueur $\mathcal{L}$ du graphe de f entre $x = a$ et $x = b$.

- Découpage et approximation par les cordes
- longueur de la corde : $\sqrt{\delta x^2 + \delta f^2}$
- Somme des volumes : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_i}\right)^2}\, \delta x_i$
- Limite : $\mathcal{L} = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$

Exemple : périmètre du cercle.

Application : Surface d'un solide de révolution

Calcul de la surface $\mathcal{S}$ du solide obtenu par rotation autour de l'axe des x du graphe de f entre $x = a$ et $x = b$.

- Découpage et approximation par des cônes tronqués
- Surface du cone tronqué : $\pi(r_1 + r_2)\ell \sim 2\pi f \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta f)^2}$
- Somme des surfaces : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(x_i)\sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\delta x_i$
- Limite : $\displaystyle\mathcal{S} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$

Exemple : surface de la sphère.