Outils mathématiques pour les sciences 2: CM 1 & 2 : Équations différentielles

Olivier Le Gal

13 janvier 2026

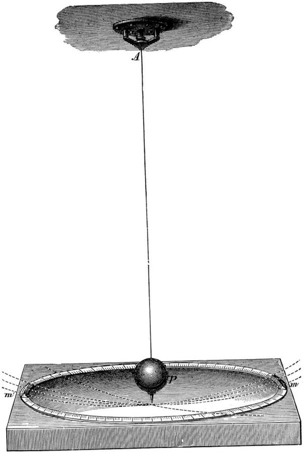
Math203 : divers

- Cours de 3 ects
- 6 CM (9h), 6 TD (9h), 3 TP (9h)
- Moodle : auto-inscription, clef : MATH203
  - Supports de cours
  - Feuilles TD
  - TP
- Note : CM 80%, TP 20%

Math203 : Programme

- Équations différentielles (CM 1 et 2).
- Intégration (CM 3 et 4).
- Développements limités (CM 5 et 6).

Introduction : le pendule



Le pendule : problème

Problème de mécanique : un pendule de masse m est suspendu au bout d'une tige de longueur ℓ. On le lâche à l'instant $t = 0$ alors qu'il fait un angle θ_0 avec la verticale. Déterminer son mouvement en fonction du temps.

Loi fondamentale de la mécanique

La somme des forces s'exerçant sur un point matériel est égale au produit de sa masse par son accélération.

Forces en présence :

1. Le poids : $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{e_z}$
2. La tension du fil : $\overrightarrow{T}$, dans la direction du fil.

Loi fondamentale de la mécanique

La somme des forces s'exerçant sur un point matériel est égale au produit de sa masse par son accélération.

Accélération en coordonnées :

$$\overrightarrow{OM} = \ell \sin(\theta)\overrightarrow{e_x} + \ell \cos(\theta)\overrightarrow{e_z}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \ell \cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_x} - \ell \sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} &= \ell(-\sin(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \cos(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2})\overrightarrow{e_x} \\ &\quad \ell(-\cos(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \sin(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2})\overrightarrow{e_z} \end{aligned}$$

Remarques

$\frac{d}{dt}(\cos\theta) = \cos(\theta(t))' = -\sin(\theta(t)) \times \theta'(t) = -\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}(\theta)) = \theta''(t) \neq (\theta')^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$

On projette orthogonalement à $\overrightarrow{T}$: produit scalaire avec

$$\vec{u} = -\cos(\theta)\overrightarrow{e_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{e_z}$$

Loi fondamentale projetée :

$$(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T}) \cdot \vec{u} = m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \cdot \vec{u}$$

c'est à dire :

$$mg\sin(\theta) = -m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Équation du pendule

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$$

- Du second ordre.
- Non linéaire.

Approximation des petits angles

Rappel : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
Pour x petit, $\sin(x)$ est proche de x.

L'équation devient :

Équation du pendule linéarisée

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\,\theta = 0$$

- Du second ordre.
- Linéaire.
- À coefficients constants.

Résolution

On pose $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, l'équation devient $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$.
Par tâtonnement, on est arrivé à trouver les solutions suivantes :

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

où A et B désignent deux constantes.
Un théorème (plus loin) affirme que ce sont les seules.
Les conditions initiales (mais je n'ai pas insisté là-dessus, on y reviendra), à savoir $\theta(0) = \theta_0$ (à l'instant $t = 0$, l'angle entre le pendule et la verticale est θ_0) et $\theta'(0) = 0$ (on "lâche" le pendule : on ne le pousse pas, il a donc une vitesse initiale nulle) permettent de trouver

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t).$$

Équations différentielles du second ordre à coefficients constants.

Ce sont les équations de la forme :

$$(E): \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

où :

- a, b, c sont des constantes.
- f est une fonction donnée.
- y est une fonction inconnue.

EDO 2d ordre, cas homogène

Le cas **homogène** ou **sans second membre** est le cas où $f = 0$:

$$(H): \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

On cherche des solutions sous forme d'exponentielles : $y(t) = A\exp(rt)$
On en tire l'**équation caractéristique** :

$$(C): \quad ar^2 + br + c = 0$$

C'est une équation scalaire (et non plus différentielle), et même un trinôme du second degré, que l'on sait résoudre.

$$\Delta = b^2 - 4ac, \; r = \frac{-b + \text{``}\sqrt{\Delta}\text{''}}{2a}.$$

Théorème 1. Solutions de (H) : $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$

1. $\Delta > 0$, les solutions de (H) sont les

$$y(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t),$$

avec $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

2. $\Delta < 0$, les solutions de (H) sont les

$$y(t) = A\exp(\alpha t)\cos(\omega t) + B\exp(\alpha t)\sin(\omega t),$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}, \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, A, B \in \mathbb{R}$.

3. $\Delta = 0$, les solutions de (H) sont les

$$y(t) = A\exp(rt) + Bt\exp(rt),$$

avec $r = -\frac{b}{2a}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

EDO 2d ordre, cas général

$$(E): \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t).$$

Les solutions du cas général s'obtiennent toutes à partir du cas homogène dès que l'on connaît une solution de (E) :

Théorème 2. Solutions de (E) : $\quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$.

Toutes les solutions de (E) sont la somme d'une solution particulière de (E) avec toutes les solutions de l'équation homogène (H).

En effet, si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), $y_1 - y_2$ est solution de (H).
Exemple : $(E): \; y'' - 3y' + 2y = 10$.
Solutions de (H) : $y(t) = Ae^t + Be^{2t}$.
$y(t) = 5$ est solution de (E).
Solutions de (E) : $y(t) = 5 + Ae^t + Be^{2t}$.

Trouver une solution particulière

De la même forme que le second membre.

- $f(t) = \text{Polynôme} \rightarrow y(t) = \text{Polynôme}$ (même degré)
- $f(t) = Cste \cdot e^{kt} \rightarrow y(t) = Cste \cdot e^{kt}$ (sauf cas rare)
- $f(t) = \text{Polynôme} \cdot e^{kt} \rightarrow y(t) = \text{Polynôme} \cdot e^{kt}$ (même degré sauf cas rare).
- $f(t) = Cste \cdot \cos(kt) + Cste \cdot \sin(kt)$
  $\rightarrow y(t) = Cste \cdot \cos(kt) + Cste \cdot \sin(kt)$ (sauf cas rare)
- $f(t) = \text{Polynôme} \cdot \cos(kt) + \text{Polynôme} \cdot \sin(kt)$
  $\rightarrow y(t) = \text{Polynôme} \cdot \cos(kt) + \text{Polynôme} \cdot \sin(kt)$ (même degré sauf cas rare)
- Cas rares : 2d membre solution de $(H) \rightarrow$ on augmente le degré.
- $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \rightarrow$ solution pour f_1 + solution pour f_2.

Problème de Cauchy

Deux conditions initiales (position + vitesse) déterminent une unique solution.

Théorème 3 : problème de Cauchy

Si t_0, y_0 et v_0 sont donnés, alors le problème

$$(PC) : \left\{ \begin{array}{c} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \; y'(t_0) = v_0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution.

Exemples de résolution

1. $$3y'' - 2y' - 1 = t$$

2. $$3y'' - 2y' - 1 = -12\cos(t)$$

3. $$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 3e^{-t} \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Pour le (3), je n'ai pas eu le temps de déterminer les constantes A et B de l'expression de la solution générale qui fasse en sorte que le problème de Cauchy soit réalisé. C'est un bon exercice d'entrainement. Vous devriez trouver :

$$y(t) = \frac{3}{2}t^2e^{-t} + 2e^{-t} + 3te^{-t}.$$