Université Savoie Mont Blanc
UFR SceM

Année 2024-2025
L1 MISPI – S1

MATH103_MISPI : Mathématiques & applications

Contrôle terminal

Jeudi 19 décembre 2024, 13h15-15h15

Documents, calculatrice, téléphone portable, montre et lunettes intelligentes interdits.
Lors de l'appréciation des copies, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation, de la clarté de la rédaction et de la précision des démonstrations.

Exercice 1 (questions de cours).

1. Donner la contraposée de l'assertion $P \Rightarrow Q$.
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer l'égalité $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
3. Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$: énoncer avec précision le théorème.
4. Quels sont les nombres complexes z tels que $|z|^2 = z^2$?
5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
6. Comment détermine t-on l'équation d'une éventuelle asymptote oblique en $+\infty$?
7. Énoncer le théorème de Rolle.
8. Énoncer le théorème des accroissements finis.
9. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$, et $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Que vaut $g'(x)$?
10. Formules de Cramer pour un système 2×2 et inverse d'une matrice 2×2 inversible.

1. La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
2. Soit $0 \leqslant k \leqslant n-1$. On a
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1)}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$
3. **Théorème (division euclidienne de polynômes).** *Soient A, $B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors,*
$$\exists!(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2, A = BQ + R \text{ avec } \deg R < \deg B.$$
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a
$$|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \bar{z} = z, z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z \in \mathbb{R}^* \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$
5. On a
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Tournez la page S.V.P.

6. Notons f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un voisinage de $+\infty$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $+\infty$.
7. **Théorème (de Rolle).** *Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $a < c < b$ tel que $f'(c) = 0$.*
8. **Théorème (des accroissements finis).** *Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $a < c < b$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*
9. Comme f est continue sur I, la fonction g est la primitive de f s'annulant en a, g est donc dérivable sur I et $\forall x \in I$, $g'(x) = f(x)$.
10. On considère le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues, avec second membre

$$(S) \qquad \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

On suppose le déterminant de la matrice carrée $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associée à (S), $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. Alors (S) admet une unique solution (x, y) donnée par les formules de Cramer

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{de - bf}{ad - bc} \\[2em] y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{af - ce}{ad - bc} \end{cases}$$

Sous cette condition, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (dérivée et asymptote).

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ par $\forall x > 0$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{\sin(x^2)}{x}$.
   (a) Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer la dérivée f' de f.
   (c) Peut-on prolonger f et f' par continuité en 0 ?
   (d) A-t-on $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$?

2. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On suppose que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$ *i.e.*

$$\exists \varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0 \text{ et } \forall x > 0, g(x) = ax + b + \varphi(x).$$

   (a) En appliquant le théorème des accroissements à g sur $[x, x+1]$ et en faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $a = \ell$.
   (b) La fonction φ est-elle dérivable ? Si c'est le cas, que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x)$?

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ par $\forall x \geqslant 0$, $h(x) = x + 1 + \sqrt{x}$.
   (a) Donner le domaine de dérivabilité de h noté $\mathcal{D}_{h'}$
   (b) Pour tout $x \in \mathcal{D}_{h'}$, calculer $h'(x)$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h'(x)$.
   (d) La courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de h admet-elle une asymptote en $+\infty$?

1. (a) On a $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi = 0$ car $|\sin| \leqslant 1$. Ainsi, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   (b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f'(x) = 1 + \dfrac{2x^2\cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2} = 1 + 2\cos(x^2) - \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$.
   (c) On a $\lim\limits_{0^+} f = 1$ et $\lim\limits_{0^+} f' = 2$. Donc f et f' se prolongent par continuité en 0.
   (d) La limite de f' en $+\infty$ n'existe pas à cause du terme $\cos(x^2)$.
   En particulier,

$$\left.\begin{array}{l} \exists \text{ une asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty \\ f \text{ dérivable} \end{array}\right\} \not\Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} f'.$$

2. (a) Soit $x > 0$. Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$g(x+1) - g(x) = g'(c_x).$$

   Or, $g(x+1) - g(x) = a + \varphi(x+1) - \varphi(x)$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} g'(c_x) \overset{c_x \to +\infty}{=} \ell = \lim_{x\to+\infty} (a + \varphi(x+1) - \varphi(x)) = a.$$

   (b) Comme $\varphi = g - (ax + b)$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi' = \ell - a = 0$. En particulier

$$\left.\begin{array}{l} \exists \text{ une asymptote de coefficient directeur } a \in \mathbb{R} \text{ à } \mathcal{C}_g \text{ en } +\infty \\ g \text{ dérivable et } \lim\limits_{x\to+\infty} g' = \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \ell = a.$$

3. (a) On a $\mathcal{D}_{h'} = \mathbb{R}_+^*$
   (b) $\forall x > 0$, $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   (c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} h'(x) = 1$.
   (d) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 1 = \lim\limits_{+\infty} h'$. Cependant $\lim\limits_{x\to+\infty} (h(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \sqrt{x}) = +\infty$. Par suite, $\mathcal{C}_h$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$ (mais une branche parabolique de direction asymptotique $y = x$). En particulier

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ dérivable et } \lim\limits_{+\infty} h' = a \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = a \end{array}\right\} \not\Rightarrow \exists \text{ asymptote oblique à } \mathcal{C}_h \text{ en } +\infty.$$

Exercice 3 (**intégration**).

1. En intégrant 2 fois par partie *consécutivement*, calculer $\int_0^\pi e^x \sin(x)dx$.
2. En utilisant le changement de variable $u = \ln x$, calculer les primitives $\int \frac{\ln(x)}{x(\ln^2(x)+1)}dx$.

1. On a
$$\int_0^\pi e^x \sin(x)dx = \Big[-e^x\cos(x)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi e^x\cos(x)dx \quad = e^\pi + 1 + \Big[e^x \sin(x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin(x)dx$$
$$= e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x \sin(x)dx.$$
D'où $\int_0^\pi e^x \sin(x)dx = \frac{e^\pi+1}{2}$.
2. On a
$$\int \frac{\ln(x)}{x(\ln^2(x)+1)}dx \overset{u=\ln x}{=} \int \frac{u}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\cdot\ln(u^2+1) + C = \frac{1}{2}\cdot\ln(\ln^2(x)+1)+C$$
où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (**système linéaire et matrice**).

1. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer, quand c'est possible, $3A - 2B$, AB et CA.
   (b) Calculer AC. Que peut-on en déduire ?
2. On considère le système linéaire
$$(S)\begin{cases} x & -y & +2z & = 1 \\ x & -y & +z & = 0 \\ 2x & -y & +2z & = 0 \end{cases}$$
   (a) Déterminer les solutions de (S) à l'aide de la méthode de Gauss.
   (b) Écrire la matrice D de (S). Calculer D^{-1} si cela est possible (*on utilisera la méthode de Gauss en se ramenant à un système linéaire*).
3. On considère les matrices $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Écrire et résoudre le système linéaire associé à l'équation matricielle $EX = F$. En déduire que E est inversible et calculer son inverse.
   (b) Retrouver ce résultat à l'aide des formules de Cramer.

1. (a) Comme A et B sont du même type, $3A - 2B$ a un sens et
$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & -11 & -7 \end{pmatrix}$$
tandis que AB n'est pas défini car $ncol(A) = 3 \neq 2 = nlig(B)$. Enfin, $CA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ a un sens et
$$CA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On a $AC \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et $AC = I_2$. La matrice A (resp. C) est inversible à droite (resp. gauche) mais non inversible car non carrée. On remarque en particulier que $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \ni CA \neq AC \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

2. (a) On a

$$\left\{\begin{array}{llll} x & -y & +2z & =1 \\ x & -y & +z & =0 \\ 2x & -y & +2z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +z & =0 \\ x & -y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +2z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +z & =0 \\ & & z & =1 \\ & y & & =0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =-1 \\ y & =0 \\ z & =1 \end{array}\right.$$

D'où $\mathcal{S} = \{(-1,0,1)\}$.

(b) On a $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors

$$DX = Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +2z & =a \\ x & -y & +z & =b \\ 2x & -y & +2z & =c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +z & =b \\ x & -y & +2z & =a \\ 2x & -y & +2z & =c \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +z & =b \\ & & z & =a-b \\ & y & & =c-2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =-a+c \\ y & =-2b+c \\ z & =a-b \end{array}\right.$$

Ainsi, $(\forall Y \in \mathbb{R}^3)(\exists! X \in \mathbb{R}^3), DX = Y$. On conclut que D est inversible et

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) On a

$$EX = F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & +y & =a \\ 3x & +4y & =b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & +y & =a \\ & y & =-3a+b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =4a-b \\ y & =-3a+b \end{array}\right.$$

D'où E inversible et

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Par la méthode de Cramer, comme $\det(E) = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0$, E est inversible et on obtient directement

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} \begin{pmatrix} 4 & (-1) \\ (-3) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fin de l'épreuve