MATH103_MISPI (Mathématiques & applications)
Contrôle des connaissances
Mardi 19 décembre 2023 (13:15–15:15)

Documents, calculatrice, téléphone portable et montre intelligente interdits.
Lors de l'appréciation des copies, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation, de la clarté de la rédaction et de la précision des démonstrations.

Exercice 1 (fonction/intégration). Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = e^{x-1} - x + 1$$

et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. La fonction f est-elle paire ? Est-elle impaire ?
3. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
4. Montrer que la droite $(D) : y = -x + 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.
5. Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D).
6. Donner le domaine de dérivabilité de f puis calculer la dérivée f'.
7. Étudier les variations de f (*on dressera un tableau de variation*).
8. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat.
9. Tracer le graphe $(\mathcal{C}_f)$ de f, ses asymptotes et le vecteur tangent à $(\mathcal{C}_f)$ en 1 (*on distinguera les courbes et vecteur à l'aide de différentes couleurs*).
10. (a) Calculer une primitive F de f.

    (b) Calculer $\int_1^2 f(x)dx$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

1. Comme exp et les fonctions polynomiales sont définis sur $\mathbf{R}$, on obtient $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}$.
2. Le domaine de définition est symétrique par rapport à l'origine et $1 \in \mathcal{D}_f$. On a $f(-1) = e^{-2} + 2$ tandis que $f(1) = 1$. Ainsi $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$ car $e^2 > 0$. Donc f n'est ni paire, ni impaire.
3. On a

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$$
$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$$

4. On a, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = -x + 1 + \varphi(x)$$

   avec $\varphi(x) := e^{x-1} \underset{x\to-\infty}{\to} 0^+$. Dès lors, la droite (D) est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.
5. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) - (-x + 1) = e^{x-1} > 0$. Il s'ensuit que $(\mathcal{C}_f)$ est située au-dessus de son asymptote oblique (D) en $-\infty$.

6. L'application f est dérivable sur $\mathbf{R}$ en tant que somme d'une fonction exponentielle et d'une fonction polynomiale. De plus, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = e^{x-1} - 1.$$

7. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

De plus, f' s'annule en changeant de signe en $x = 1$.
D'où

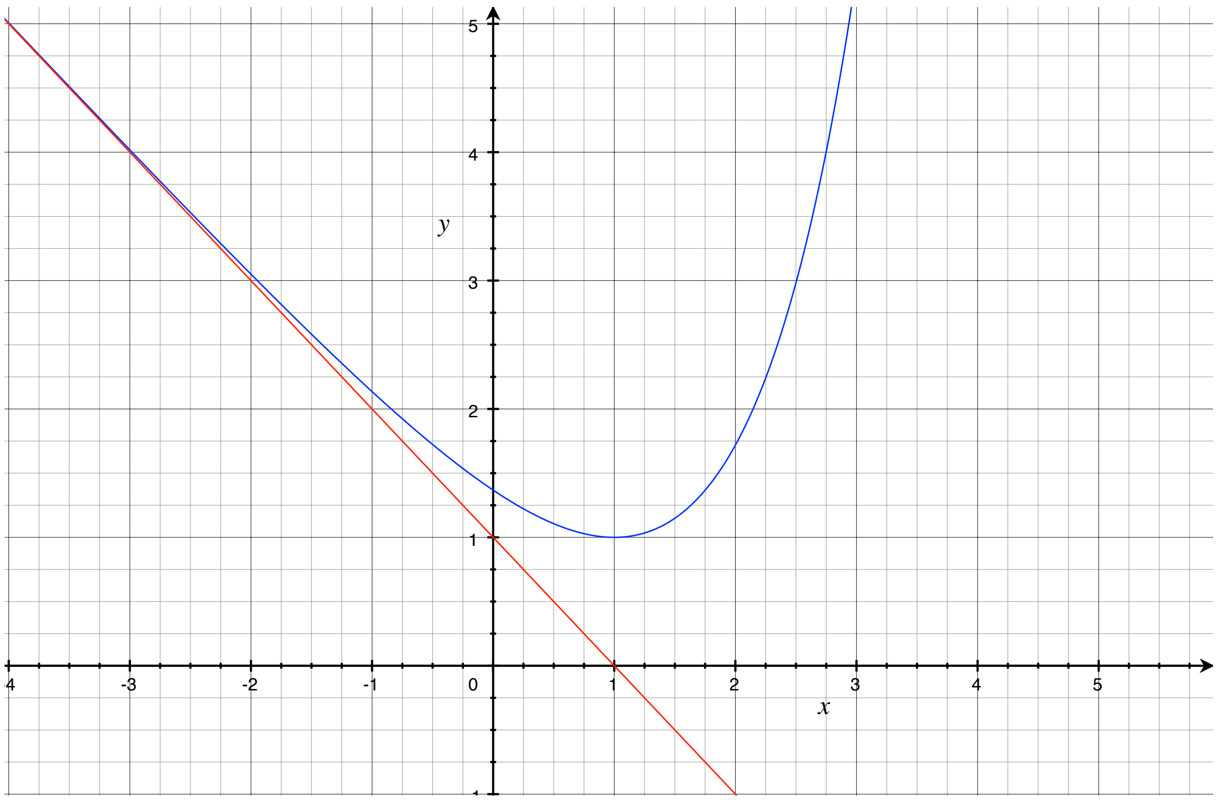
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'	-1^+	$-$	0	$+$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

8. On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-1}}{x} = +\infty.$$

On en déduit que $(\mathcal{C}_f)$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$ mais une branche parabolique de direction Oy.

9.



10. (a) On peut choisir $F(x) = e^{x-1} - \frac{x^2}{2} + x$ qui est la primitive de f telle que $F(1) = \frac{3}{2}$.

(b) On a $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = [F]_1^2 = F(2) - F(1) = e - 2 + 2 - \frac{3}{2} = e - \frac{3}{2} > 0$ car $e > 2 > \frac{3}{2}$.
Il s'agit de la mesure d'aire de la surface du plan bordée par $(\mathcal{C}_f)$, les droites verticales $x = 1$, $x = 2$ et le segment horizontal $[1, 2]$, qui est bien strictement positive car $f_{|[1,2]} > 0$.

Exercice 2 (accroissements finis).

1. Soit $a < b$ et f, g deux fonctions drivables sur $[a, b]$ telles que $f(a) \leqslant g(a)$ et
$$\forall x \in [a, b], \qquad f'(x) \leqslant g'(x).$$
Montrer que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
2. Montrer que $\forall x \geqslant 0$,
$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

1. Pour $x \in [a, b]$, posons $h(x) := f(x) - g(x)$. L'application h est continue et dérivable sur $[a, b]$ et $h' \leqslant 0$.
Soit $x \in]a, b]$. Par le TAF, il existe $c \in]a, x[$ tel que
$$h(x) - h(a) = h'(c)(x - a).$$
Or $h'(c)(x - a) \leqslant 0$ car $h'(c) \leqslant 0$ et $x - a \geqslant 0$.
En particulier, $h(x) \leqslant h(a) \leqslant 0$. Ou encore,
$$\forall x \in [a, b], \qquad f(x) \leqslant g(x).$$
Remarque 1. *On peut supposer f et g continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.*
2. Pour $t > 0$, posons $f(t) = \ln(t)$. Pour $x \geqslant 0$, appliquons le TAF sur $[1, 1 + x] \subset \mathbf{R}_+^*$. On obtient
$$\inf_{[1,1+x]} f' \cdot x \leqslant f(1 + x) - f(1) \leqslant \sup_{[1,1+x]} f' \cdot x \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x.$$
Remarque 2. *On peut bien sûr appliquer le point 1 précédent.*

Par ailleurs, si $-1 < x < 0$ alors $1 + x = \dfrac{1}{u}$ avec $u > 1$. Ainsi $\ln(1 + x) = -\ln u$ avec $u = 1 + h$, $h > 0$. Or
$$\frac{h}{1+h} \leqslant \ln(1+h) \leqslant h \Leftrightarrow \frac{u-1}{u} \leqslant \ln(u) \leqslant u - 1 \Leftrightarrow 1 - u \leqslant -\ln(u) \leqslant \frac{1-u}{u}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x.$$

Exercice 3 (système linéaire et matrice).

1. On considère $A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer, quand c'est possible, $3A - 2B$, AB et CA.
   (b) Calculer AC. Que peut-on en déduire ?
2. On considère le système linéaire

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 1 \\ -x & -y & -z & = 0 \\ 2x & +y & +2z & = 0 \end{array}\right.$$

   (a) Déterminer les solutions de (S) à l'aide de la méthode de Gauss.
   (b) Écrire la matrice D de (S). Calculer D^{-1} si cela est possible (*on utilisera la méthode de Gauss en se ramenant à un système linéaire*).
3. On considère les matrices $E := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $F := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $x, y, a, b \in \mathbf{R}$.
   (a) Écrire et résoudre le système linéaire associé à l'équation matricielle $EX = F$. En déduire que E est inversible et calculer son inverse.
   (b) Retrouver ce résultat à l'aide des formules de Cramer.

1. (a) Comme A et B sont du même type, $3A - 2B$ a un sens et

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 11 \\ -2 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

   tandis que AB n'est pas défini car $ncol(A) = 3 \neq 2 = nlig(B)$. Enfin, $CA \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Z})$ a un sens et

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -6 & -8 & -10 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

   (b) On a $AC \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ et $AC = \begin{pmatrix} -13 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque en particulier que $\mathcal{M}_3(\mathbf{Z}) \ni CA \neq AC \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$.
2. (a) On a

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 1 \\ -x & -y & -z & = 0 \\ 2x & +y & +2z & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 0 \\ x & +y & +2z & = 1 \\ 2x & +y & +2z & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 0 \\ & & z & = 1 \\ & -y & & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = -1 \\ y & = 0 \\ z & = 1 \end{array}\right.$$

   D'où $\mathcal{S} = \{(-1, 0, 1)\}$.

(b) On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors

$$DX = Y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = a \\ -x & -y & -z & = b \\ 2x & +y & +2z & = c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = -b \\ x & +y & +2z & = a \\ 2x & +y & +2z & = c \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = -b \\ & & z & = a+b \\ & -y & & = 2b+c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x & = -a+c \\ y & = -2b-c \\ z & = a+b \end{array} \right.$$

Ainsi, $(\forall Y \in \mathbf{R}^3)(\exists! X \in \mathbf{R}^3), DX = Y$. On conclut que D est inversible et

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) On a

$$EX = F \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrl} 3x & +4y & = a \\ x & +y & = b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrl} x & +y & = b \\ & y & = a-3b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x & = -a+4b \\ y & = a-3b \end{array} \right.$$

D'où E inversible et

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Par la méthode de Cramer, comme $\det(E) = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -1 \neq 0$, E est inversible et on obtient directement

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & (-4) \\ (-1) & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Fin de l'épreuve