Université Savoie Mont Blanc **2022/2023**
UFR SceM **L1 MISPI – S1**

MATH103_MISPI (Mathématiques & applications)
Contrôle des connaissances
Mercredi 04 janvier 2023 (13:15–15:15)

Documents, calculatrice, téléphone portable et montre intelligente interdits.
Lors de l'appréciation des copies, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation, de la clarté de la rédaction et de la précision des démonstrations.

Exercice 1 (fonction). Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)$.

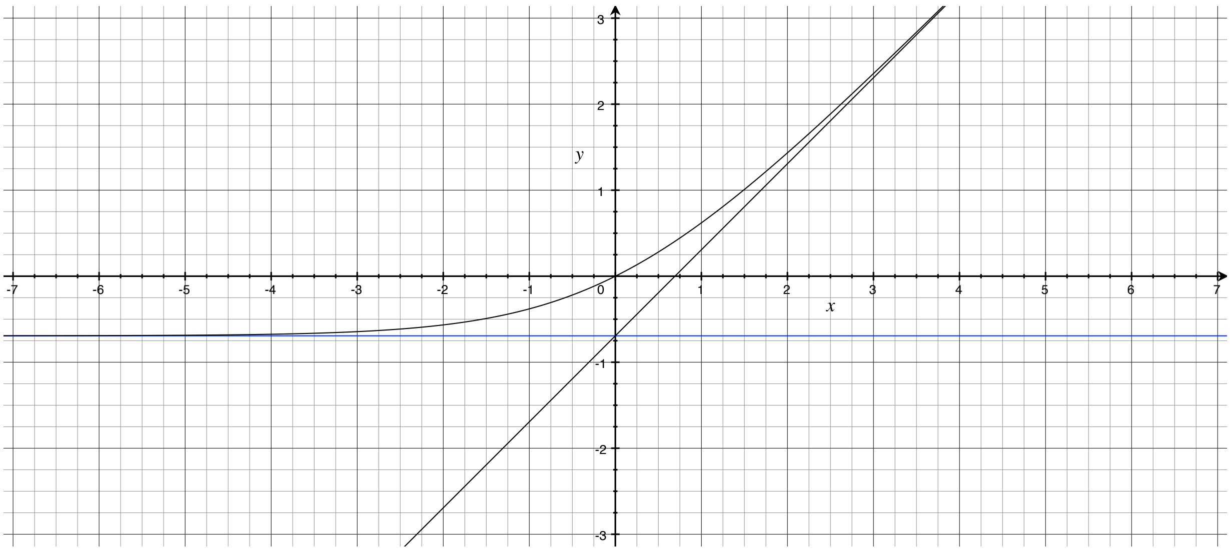
1. Montrer que le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}$.
2. La fonction f est-elle paire ? Est-elle impaire ?
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. Donner le domaine de dérivabilité de f puis calculer la dérivée f'.
5. Étudier les variations de f (*on dressera un tableau de variation*).
6. Étudier les asymptotes éventuelles à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f et leur position relative.
7. Tracer le graphe $\mathcal{C}_f$ de f, ses asymptotes et le vecteur tangent à $\mathcal{C}_f$ en 0 (*on distinguera les courbes et vecteur à l'aide de différentes couleurs*).

On a $\ln(2) \simeq 0,7$.

1. On a $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbf{R} : \dfrac{e^x+1}{2} > 0\} = \mathbf{R}$ car $\mathrm{im}\,(\exp) \subset \mathbf{R}_+^*$.
2. Le domaine de définition est symétrique par rapport à l'origine. On a $f(-1) = \ln\left(\dfrac{e^{-1}+1}{2}\right)$ tandis que $f(1) = \ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$. Ainsi $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$ car $e \neq 1$. Donc f n'est ni paire, ni impaire.
3. On a
$$\lim_{-\infty} f = -\ln(2)^+ \text{ et } \lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x(1+e^{-x})) - \ln(2) = \lim_{x\to+\infty} (x - \ln(2)) = +\infty$$
car $\lim\limits_{-\infty} \exp = 0^+$.
4. L'application f est dérivable sur $\mathbf{R}$ en tant que composée de $x \mapsto \dfrac{e^x+1}{2}$ dérivable sur $\mathbf{R}$ à valeurs $\mathbf{R}_+^*$ et de $u \mapsto \ln(u)$ dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.
5. Comme $f' > 0$ sur $\mathbf{R}$, on obtient

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'	0^+	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	1^-
f	$-\ln(2)^+$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6. D'après 3, $\mathcal{C}_f$ admet l'asymptote horizontale d'équation $y = -\ln(2)$ en $-\infty$ et se situe au-dessus de cette asymptote. D'autre part, $f(x) = x - \ln(2) + \ln(1 + e^{-x})$; donc $\mathcal{C}_f$ admet l'asymptote oblique d'équation $y = x - \ln(2)$ en $+\infty$ et se situe au-dessus de cette asymptote.
7.



Exercice 2 (dérivée et asymptote).

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$ par $\forall x > 0,\ f(x) := x + 1 + \dfrac{\sin(x^2)}{x}$.
   (a) Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et calculer la dérivée f' de f.
   (c) A-t-on $\lim\limits_{+\infty} f' = 1$?
   (d) Peut-on prolonger f et f' par continuité en 0 ?
2. Soit $g : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et telle que $\lim\limits_{+\infty} g' = \ell \in \mathbf{R}$. On suppose que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$ *i.e.*

$$\exists \varphi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}, \lim_{+\infty} \varphi = 0 \text{ et } \forall x > 0, g(x) = ax + b + \varphi(x).$$

   En appliquant le théorème des accroissements à g sur $[x, x+1]$ et en faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $a = \ell$.
   La fonction φ est-elle dérivable ? Si c'est le cas, que peut-on dire de $\lim\limits_{+\infty} \varphi'$?
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$ par $\forall x \geqslant 0,\ h(x) := x + 1 + \sqrt{x}$.
   (a) Donner le domaine de dérivabilité de h et calculer h'. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} h'$.
   (b) La courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de h admet-elle une asymptote en $+\infty$?

1. (a) On a $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) := \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$ car $|\sin| \leqslant 1$. Ainsi, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus, $f'(x) = 1 + \dfrac{2x^2\cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2} = 1 + 2\cos(x^2) - \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$.

(c) La limite de f' en $+\infty$ n'existe pas à cause du terme $\cos(x^2)$.
En particulier,

$$\left.\begin{array}{l}\exists \text{ une asymptote non verticale à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty \\ f \text{ dérivable}\end{array}\right\} \not\Rightarrow \exists \lim_{+\infty} f'.$$

(d) On a $\lim\limits_{0^+} f = 1$ et $\lim\limits_{0^+} f' = 2$. Donc f et f' se prolongent par continuité en 0.

2. Soit $x > 0$. Comme g est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$g(x+1) - g(x) = g'(c_x).$$

Or, $g(x+1) - g(x) = a + \varphi(x+1) - \varphi(x)$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} g'(c_x) \overset{c_x\to+\infty}{=} \ell = \lim_{x\to+\infty} (a + \varphi(x+1) - \varphi(x)) = a.$$

Comme $\varphi = g - (ax+b)$, φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi' = \ell - a = 0$. En particulier

$$\left.\begin{array}{l}\exists \text{ une asymptote de coefficient directeur } a \in \mathbf{R} \text{ à } \mathcal{C}_g \text{ en } +\infty \\ g \text{ dérivable et } \lim\limits_{+\infty} g' = \ell \in \mathbf{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \ell = a.$$

3. (a) On a $\mathcal{D}_{h'} = \mathbf{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Enfin, $\lim\limits_{+\infty} h' = 1$.

(b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 1 = \lim\limits_{+\infty} h'$. Cependant $\lim\limits_{+\infty}(h - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \sqrt{x}) = +\infty$. Par suite, $\mathcal{C}_h$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$ (mais une branche parabolique direction asymptotique de direction $y = x$). En particulier

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ dérivable et } \lim\limits_{+\infty} h' = a \in \mathbf{R} \\ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{h}{x} = a \end{array}\right\} \not\Rightarrow \exists \text{ asymptote oblique à } \mathcal{C}_h \text{ en } +\infty.$$

Exercice 3 (intégration).

1. En intégrant 2 fois par partie *consécutivement*, calculer $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin(x)dx$.
2. En utilisant le changement de variable $u = \ln x$, calculer les primitives $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x(\ln^2(x)+1)}dx$.

1. On a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x \sin(x)dx = \Big[-e^x\cos(x)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi e^x\cos(x)dx &= e^\pi + 1 + \Big[e^x\sin(x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi e^x\sin(x)dx \\ &= e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x \sin(x)dx.\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_0^\pi e^x\sin(x)dx = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

2. On a

$$\int \frac{\ln(x)}{x(\ln^2(x)+1)}dx \overset{u=\ln x}{=} \int \frac{u}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\cdot\ln(u^2+1) + C = \frac{1}{2}\cdot\ln(\ln^2(x)+1) + C$$

où $C \in \mathbf{R}$.

Exercice 4 (système linéaire et matrice).

1. On considère $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $C := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer, quand c'est possible, $3A - 2B$, AB et CA.
   (b) Calculer AC. Que peut-on en déduire ?
2. On considère le système linéaire
$$(S) \begin{cases} x & -y & +2z & = 1 \\ x & -y & +z & = 0 \\ 2x & -y & +2z & = 0 \end{cases}$$
   (a) Déterminer les solutions de (S) à l'aide de la méthode de Gauss.
   (b) Écrire la matrice D de (S). Calculer D^{-1} si cela est possible (*on utilisera la méthode de Gauss en se ramenant à un système linéaire*).
3. On considère les matrices $E := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $F := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $x, y, a, b \in \mathbf{R}$.
   (a) Écrire et résoudre le système linéaire associé à l'équation matricielle $EX = F$. En déduire que E est inversible et calculer son inverse.
   (b) Retrouver ce résultat à l'aide des formules de Cramer.

1. (a) Comme A et B sont du même type, $3A - 2B$ a un sens et
$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & -11 & -7 \end{pmatrix}$$
tandis que AB n'est pas dfini car $ncol(A) = 3 \neq 2 = nlig(B)$. Enfin, $CA \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Z})$ a un sens et
$$CA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (b) On a $AC \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ et $AC = I_2$. La matrice A (resp. C) est inversible à droite (resp. gauche) mais non inversible car non carrée. On remarque en particulier que $\mathcal{M}_3(\mathbf{Z}) \ni CA \neq AC \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$.
2. (a) On a
$$\begin{cases} x & -y & +2z & = 1 \\ x & -y & +z & = 0 \\ 2x & -y & +2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & +z & = 0 \\ x & -y & +2z & = 1 \\ 2x & -y & +2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & +z & = 0 \\ & & z & = 1 \\ & y & & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -1 \\ y & = 0 \\ z & = 1 \end{cases}$$
D'où $\mathcal{S} = \{(-1, 0, 1)\}$.

`Tournez la page S.V.P.`

(b) On a $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors

$$DX = Y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x & -y & +2z & = a \\ x & -y & +z & = b \\ 2x & -y & +2z & = c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x & -y & +z & = b \\ x & -y & +2z & = a \\ 2x & -y & +2z & = c \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x & -y & +z & = b \\ & & z & = a - b \\ & y & & = c - 2b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = -a + c \\ y & = -2b + c \\ z & = a - b \end{array} \right.$$

Ainsi, $(\forall Y \in \mathbf{R}^3)(\exists! X \in \mathbf{R}^3), DX = Y$. On conclut que D est inversible et

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) On a

$$EX = F \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x & +y & = a \\ 3x & +4y & = b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x & +y & = a \\ & y & = -3a + b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = 4a - b \\ y & = -3a + b \end{array} \right.$$

D'où E inversible et

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Par la méthode de Cramer, comme $\det(E) = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0$, E est inversible et on obtient directement

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} \begin{pmatrix} 4 & (-1) \\ (-3) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fin de l'épreuve