Université Savoie Mont Blanc — 2021/2022
UFR SceM — L1 MISPI – S1

MATH103_MISPI (Mathématiques & applications)
Contrôle terminal
mardi 04 janvier 2022 (13:30–15:30)

Documents, calculatrice, téléphone portable et montre intelligente interdits.
Lors de l'appréciation des copies, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation, de la clarté de la rédaction et de la précision des démonstrations.

Exercice 1 (questions de cours).

1. Donner deux expressions différentes *explicites* de la dérivée de la fonction tan.
2. Énoncer le théorème des accroissements finis.
3. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Que peut-on écrire à propos de $\left|\int_a^b f(t)dt\right|$?

1. La fonction tan est dérivable sur $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,k\in\mathbf{Z}\right\}$ et $\tan' = 1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.
2. Soit $a<b\in\mathbf{R}$, $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et derivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.
3. La fonction $|f|$ est continue sur $[a,b]$ et on a
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Exercice 2 (limite, continuité, dérivabilité, branche infinie). On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par
$$f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}.$$
On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par
$$g(x)=x+2-e^x.$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0,+\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$.

On note α cette solution et on rappelle que $2<e<3$.

3. Montrer que $1<\alpha<2$.

On pourra admettre que $1,14<\alpha<1,15$.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B. Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$

1. a. Montrer que pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2. a. Montrer que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}.$$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. a. Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

   b. En utilisant l'encadrement de α donné dans la partie A, donner un encadrement de $f(\alpha)$.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

5. a. Établir que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x + 1)u(x)}{xe^x + 1} \text{ avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$

   b. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

   c. Déduire des questions précédentes la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (T).

6. Tracer $\mathcal{C}$ et (T) sur un même croquis (unité graphique : 4 cm).

A. Étude d'une fonction auxiliaire

1. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+$ (*théorèmes généraux*). De plus, $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $g'(x) = 1 - e^x < 0$ et $g'(0) = 0$. Ainsi, g est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Enfin, $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0^{(+)}$.
2. Comme $g(0) = 1$, $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ et g est continue sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$, il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme g est strictement décroissante, un zéro de g est unique.
3. On a $g(1) = 3 - e > 0$ et $g(2) = 4 - e^2 < 0$ donc $\alpha \in]1, 2[$.
4. Il s'ensuit que pour $x \in \mathbf{R}_+$,

$$g(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \alpha \\ = 0 & \text{si } x = \alpha \\ < 0 & \text{si } x > \alpha \end{cases}.$$

B. Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$

1. a. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x - 1)(xe^x + e^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

b. Comme $\dfrac{e^x}{(xe^x+1)^2} > 0$, le signe de f' sur $\mathbf{R}_+$ est celui de g. D'où

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \alpha \\ = 0 & \text{si } x = \alpha \\ < 0 & \text{si } x > \alpha \end{cases}.$$

2. a. Soit $x \geqslant 0$. En factorisant l'expression de f au numérateur et au dénominateur par $e^x \neq 0$, puis en simplifiant, on obtient

$$f(x) = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})} = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}.$$

b. On a

$$\lim_{+\infty} f \overset{B.2.a}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}} \overset{\lim_{-\infty} e^x = 0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+.$$

Il s'ensuit que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = 0$ (*axe des abscisses*) ; $\mathcal{C}$ se situe au-dessus de $y = 0$.

3. a. Comme $g(\alpha) = 0$, on a $\alpha + 2 = e^{\alpha}$. Par suite

$$f(\alpha) = \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha+e^{-\alpha}} = \frac{1-\frac{1}{\alpha+2}}{\alpha+\frac{1}{\alpha+2}} = \frac{\frac{\alpha+2-1}{\alpha+2}}{\frac{\alpha(\alpha+2)+1}{\alpha+2}} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

b. Comme $1 < \alpha < 2$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t+1}$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$, il vient

$$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} < \frac{1}{\alpha+1} = f(\alpha) < \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

On obtient ainsi le tableau de variation de f

x	0		$1<\alpha<2$		$+\infty$
f'	$f'_d(0)$	$+$	0	$-$	0^-
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2}$	$\searrow$	0^+

4. La fonction f est dérivable à droite en 0 donc une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 0$ est $y - f(0) = f'_d(0)(x-0)$. Or $f'_d(0) = g(0) = 1$ et $f(0) = 0$ d'où

$$(T) : y = x \text{ tangente en } (0,0) \in \mathcal{C}.$$

5. a. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$

$$\begin{aligned} f(x) - x = \frac{e^x-1}{xe^x+1} - x &= \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x+1} = \frac{-e^x(x^2-1) - x - 1}{xe^x+1} \\ &= \frac{(x+1)(-(x-1)e^x - 1)}{xe^x+1} = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x+1} \\ &= \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}. \end{aligned}$$

b. La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $u'(x) = -xe^x$. D'où

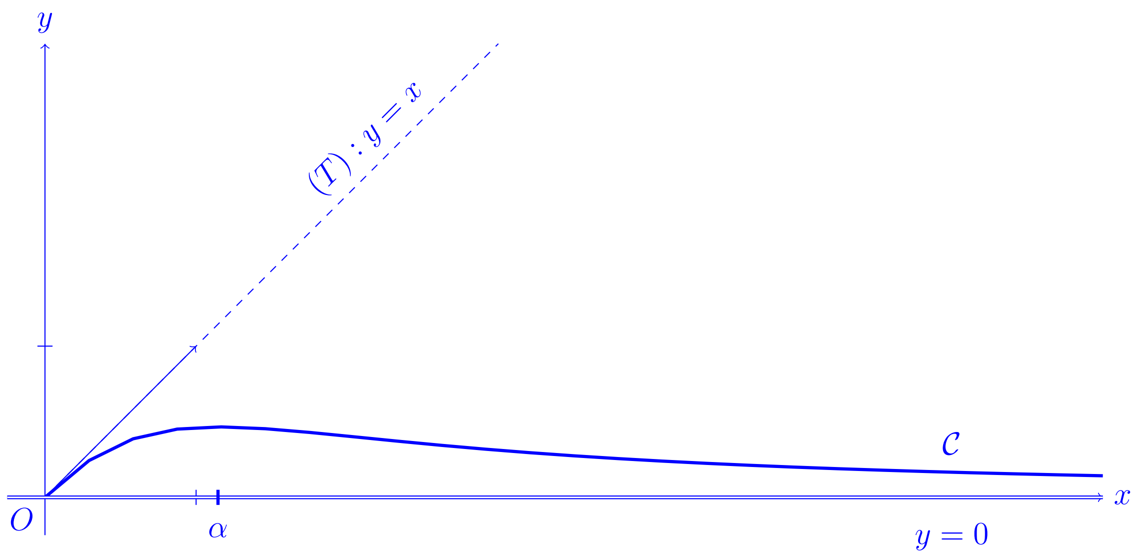
x	0		$+\infty$
u'	0	$-$	$-\infty$
u	0	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit

$$u(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } x = 0 \\ < 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

c. D'après B.5.b, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) - x < 0$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de sa tangente (T) pour $x > 0$ et l'intersecte au point de contact $(0, 0)$.

6.



Courbe $\mathcal{C}$ représentative de $\begin{array}{rccc} f : & [0, +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1} \end{array}$, de sa tangente $(T) : y = x$ en $x = 0$ et de son asymptote $y = 0$ en $+\infty$.

Exercice 3 (intégration).

1. Calculer $\displaystyle\int x \ln(x) dx$.
2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$ sur $[0, +\infty[$.

   Déterminer une primitive F de f sur $[0, +\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{\ln(\frac{\pi}{2})}^{\ln(\pi)} \frac{\sin(e^t)}{\sin^2(e^t) + 1} \cos(e^t) e^t dt$ à l'aide du changement de variable $x = \sin(e^t)$.

1. On a $\displaystyle\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2}(\ln(x) - \frac{1}{2})$.

2. On a $F(x) = \displaystyle\int f(t)dt = \int \frac{1-e^{-t}}{t+e^{-t}}dt = \ln(x+e^{-x})+C$ avec $C \in \mathbf{R}$ car $(x+e^{-x})' = 1-e^{-x}$ et $x+e^{-x} > 0$ sur $\mathbf{R}_+$.
3. On a

$$\int_{\ln(\frac{\pi}{2})}^{\ln(\pi)} \frac{\sin(e^t)}{\sin^2(e^t)+1}\cos(e^t)e^t dt \overset{x=\sin(e^t)}{=} \int_1^0 \frac{x}{x^2+1}dx = -\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1$$

car $dx = \cos(e^t)e^t dt$. Finalement

$$\int_{\ln(\frac{\pi}{2})}^{\ln(\pi)} \frac{\sin(e^t)}{\sin^2(e^t)+1}\cos(e^t)e^t dt = -\frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 4 (système linéaire et matrice).

1. Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si l'opération a un sens, calculer $A_1 - 3B_1$.
2. Soit $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A_2B_2 et B_2A_2. Que peut-on en déduire ?
3. On considère le système linéaire $(S1)\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -2x - 2y + 3z = 1 \\ -x - y + 2z = 2 \end{cases}$. Donner l'écriture matricielle de $(S1)$.
4. On considère la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}$.
   (a) Écrire le système linéaire associé à A_4 de second membre B.
   (b) La matrice A_4 est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

1. On a $A_1, 3B_1 \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ donc $A_1 - 3B_1$ a un sens et $A_1 - 3B_1 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -8 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.
2. On a $A_2B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $B_2A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$.
   On en déduit $A_2B_2 \neq B_2A_2$ donc le produit matriciel dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ n'est pas commutatif.
3. Posons $A_4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$(S1) \Leftrightarrow A_4X = B_4.$$

4. (a) Le système linéaire est $(S)\begin{cases} -2x - y + z = a \\ -2x - 2y + 3z = b \\ -x - y + 2z = c \end{cases}$.
   (b) On a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = -c \\ -2x - y + z = a \\ -2x - 2y + 3z = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = -c \\ y - 3z = a-2c \\ -z = b-2c \end{cases}$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & & & = & -a+b-c \\ & y & & = & a-3b+4c \\ & & z & = & -b+2c \end{array}\right.$$

Dès lors, pour tout B, (S) admet une unique solution X_B. La matrice A_4 est donc inversible et

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fin de l'épreuve