

MATH103_MISPI : Mathématiques & applications

Contrôle continu 1.

24 octobre 2024, 9h15-11h45

Documents, calculatrice, téléphone portable et montre intelligente interdits.
Lors de l'appréciation des copies, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation, de la clarté de la rédaction et de la précision des démonstrations.

Exercice 1 (questions de cours).

1. Donner la contraposée de l'assertion $P \Rightarrow Q$.
2. Pour $0 \leq k \leq n-1$, démontrer l'égalité $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
3. Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$: énoncer avec précision le théorème.
4. Quels sont les nombres complexes z tels que $|z|^2 = z^2$?

1. La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
2. Soit $0 \leq k \leq n-1$. On a

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1)}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

3.

Théorème. Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors,

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2, A = BQ + R \text{ avec } \deg R < \deg B.$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \bar{z} = z, z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z \in \mathbb{R}^* \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 (Fonctions/Image directe/Image réciproque).

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = |x+3| - |2x+1|.$$

1. Exprimer f sans utiliser de valeur absolue (on pourra distinguer différents intervalles).
2. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.
3. Déterminer l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$.
4. Déterminer les ensembles $f([-2, 1])$ et $f^{-1}([-2, 1])$.
5. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$. (On remarquera que $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$.)

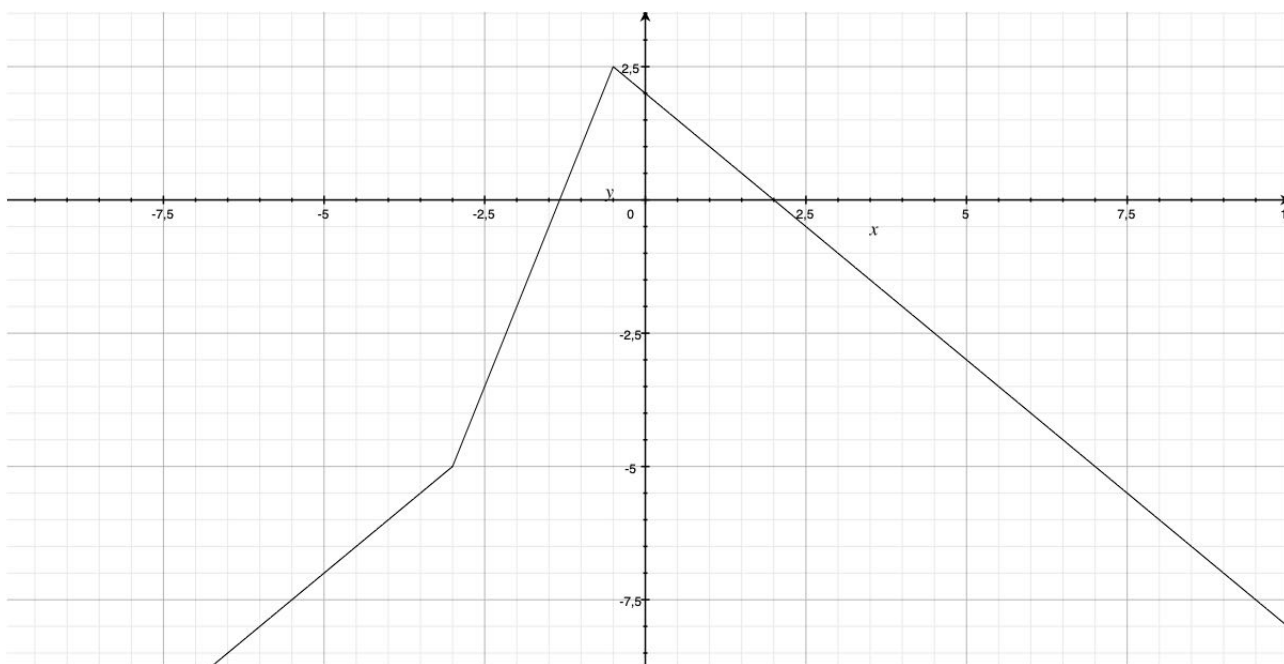
6. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

7. L'application f est-elle surjective? L'application f est-elle injective?

1.

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$ x+3 $	$-x-3$	0	$x+3$	$x+3$
$ 2x+1 $	$-2x-1$	5	0	$2x+1$
f	$x-2$	-5	$3x+4$	$-x+2$

2.



3. $\{f = 0\} = \left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$.

4. Par le graphique, on a

$$f([-2, 1]) = \left[-2, \frac{5}{2}\right] \text{ et } f^{-1}([-2, 1]) = [-2, -1] \cup [1, 4] \quad .$$

5. $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) < 0\} = \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

6. $f(\mathbb{R}) = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$;

7. L'application f n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 3$.

8. L'application f n'est pas injective car $f\left(-\frac{4}{3}\right) = f(2) = 0$.

Exercice 3 (récurrence/binôme). On considère l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx. \quad (1)$$

1. Démontrer (1) par récurrence sur n .
2. Démontrer (1) en utilisant la formule du binôme.

1. (a) $n = 0 : (1+x)^0 = 1 = 1+0x \geq 1+0x$
(b) Supposons la propriété établie pour un entier $n \in \mathbb{N}$.
Comme $(1+x)^n \geq 1+nx$ par l'hypothèse de récurrence, il vient en multipliant de part et d'autre de cette inégalité par $1+x \geq 0$ (car $x \in \mathbb{R}_+$) :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

La conjonction de (a) et (b) permet de conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$$

2. Si $n = 0$ ou $n = 1$ alors

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x \text{ et } (1+x)^1 = 1+x \geq 1+1x$$

d'où l'inégalité dans ces 2 cas.

Si $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ alors on a, par la formule du binôme de Newton :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1+nx + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k \geq 1+nx$$

$$\text{car } \binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{k} \geq 0 \text{ et } x^k \geq 0.$$

Exercice 4 (polynôme).

1. Effectuer la division euclidienne de $A := X^5 - X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 2X + 4$ par $B := X^3 + 2X + 3$.
 2. Sans effectuer la division euclidienne de A par $X+1$, montrer que $X+1$ divise A .
1. On obtient $A = B(X^2 - X + 1) + 2X^2 + 3X + 1$ où $Q = X^2 - X + 1$ est le quotient et $R = 2X^2 + 3X + 1$ est le reste de la division euclidienne de A par B (on a bien $\deg R = 2 < 3 = \deg B$).
 2. On a $B(-1) = 0$ et $R(-1) = 0$ donc $A(-1) = 0$; A est donc divisible par $X+1$.

Exercice 5 (trigonométrie). On considère l'équation

$$2\cos^2 \theta - 3\sin \theta - 3 = 0. \quad (2)$$

1. Montrer que (2) peut s'écrire avec uniquement des $\sin \theta$.
2. Déterminer les racines du polynôme $P(X) = -2X^2 - 3X - 1$.
3. Résoudre (2).

1. Comme $\cos^2 = 1 - \sin^2$, (2) s'écrit

$$-2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 1 = 0.$$

2. Les racines (qui sont réelles) de P sont -1 et $-\frac{1}{2}$.
3. L'équation (2) s'écrit $P(\sin \theta) = 0$. Compte tenu de ??., il reste à résoudre $\sin \theta = -1$ et $\sin \theta = -\frac{1}{2}$. Par conséquent :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 6 (complexe/racine).

1. Résoudre l'équation $\delta^2 = -3 + 4i$ dans $\mathbb{C}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $z^2 - (1 - 2i)z - 2i = 0$.

1. Posons $\delta = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Il vient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x, y) = (1, 2) \\ \text{ou} \\ (x, y) = (-1, -2) \end{matrix}$$

Autrement dit, $\delta = \pm(1 + 2i)$.

2. On a $\Delta = (-(1 - 2i))^2 - 4(-2i) = 1 - 4 - 4i + 8i = -3 + 4i$. D'après 1,

$$z_1 = \frac{1 - 2i + 1 + 2i}{2} = 1 \text{ et } z_2 = \frac{1 - 2i - (1 + 2i)}{2} = -2i$$

On conclut $\mathcal{S} = \{1, -2i\}$.