

MATH103 _ MISPI (Mathématiques & applications)

Corrigé succinct du Contrôle des connaissances

Lundi 20 octobre 2025 (09:45–11:15)

Documents, calculatrice, téléphone mobile, montre intelligente, lunette connectée et agent conversationnel interdits.

Lors de l'appréciation des copies, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation, de la clarté de la rédaction et de la précision des démonstrations.

Exercice 1 (langage). Dans chacune des questions suivantes, dire si l'une des assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ implique l'autre ou si elles sont équivalentes ou bien s'il n'y a aucune relation entre elles.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

(a) $\mathcal{P}$: « $x^2 - 3x + 2 = 0$ » et $\mathcal{Q}$: « $x \in [1, 2]$ ».

(b) $\mathcal{P}$: « $x > 0$ » et $\mathcal{Q}$: « $x^2 - 2x + 1 > 0$ ».

(c) $\mathcal{P}$: « l'entier n est pair » et $\mathcal{Q}$: « l'entier n est divisible par 62 ».

2. Donner la négation de l'assertion :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists x \in \mathbf{R}), (|x| \leq \sqrt{\varepsilon} \text{ et } x^2 > \varepsilon).$$

Laquelle est vraie ?

Puis démontrer l'assertion qui est vraie.

1. (a) On a : $\mathcal{P} \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$. Donc $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

En revanche, $x = \frac{3}{2} \in [1, 2]$ et $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. Donc $\mathcal{Q} \not\Rightarrow \mathcal{P}$.

(b) On a : $\mathcal{Q} \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Dès lors $\mathcal{P} \not\Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \not\Rightarrow \mathcal{P}$.

(c) On a : $n = 2$ est pair et $62 \nmid 2$. Donc $\mathcal{P} \not\Rightarrow \mathcal{Q}$.

Tandis que si $62 \mid n$ alors $\exists q \in \mathbf{N}$, $n = 62q = 2(31q)$ donc n est pair.

D'où $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

2. On a :

$$\begin{aligned} \neg((\exists \varepsilon > 0)(\exists x \in \mathbf{R})(|x| \leq \sqrt{\varepsilon} \text{ et } x^2 > \varepsilon)) &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(|x| > \sqrt{\varepsilon} \text{ ou } x^2 \leq \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(|x| \leq \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow x^2 \leq \varepsilon). \end{aligned}$$

L'assertion $(\exists \varepsilon > 0)(\exists x \in \mathbf{R})(|x| \leq \sqrt{\varepsilon} \text{ et } x^2 > \varepsilon)$ est fausse car si $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbf{R}$ alors $|x| \leq \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow x^2 \leq \varepsilon$ de sorte que le connecteur conjonction « et » renvoie faux.

La preuve de la négation en découle : soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbf{R}$. Alors $|x| \leq \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow x^2 \leq \varepsilon$.

En particulier, on a montré :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(|x| \leq \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow x^2 \leq \varepsilon)$$

(cette assertion justifie la continuité de l'application $x \mapsto x^2$ en $a = 0$).

Exercice 2 (fonction/application). Soit f l'application définie sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ à valeurs dans lui-même par

$$f(1) := 4, \quad f(2) := 1, \quad f(3) := 2, \quad f(4) := 2$$

et g l'application définie pour tout x dans $\mathbf{R}$ par $g(x) := x^2$.

1. f et g sont-elles injectives, surjectives, bijections ?
2. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B := \{2\}$, $B := \{1, 2\}$ puis $B := \{3\}$.
3. Déterminer $g^{-1}(B)$ lorsque $B := \{1\}$ puis $B := [1, 2]$.
4. Calculer les domaines de définition de $g \circ f$ et $f \circ g$, puis déterminer $(f \circ g)^{-1}([1, 2])$ et $(g \circ f)^{-1}([1, 2])$.

1. On a $3 \neq 4$ et $f(3) = 2 = f(4)$ donc f n'est pas injective. De plus, $3 \notin \text{im}(f)$ donc f n'est pas surjective. L'application f n'est donc pas bijective.
On a $-1 \neq 1$ et $g(-1) = (-1)^2 = 1 = g(1)$ donc g n'est pas injective. De plus, $-1 \notin \text{im}(g)$ (car $g \geq 0$) donc g n'est pas surjective. L'application g n'est donc pas bijective.
2. On a $f^{-1}(\{2\}) = \{3, 4\}$, $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3, 4\}$ et $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$.
3. On a $g^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$ et $g^{-1}([1, 2]) = [-\sqrt{2}, -1] \sqcup [1, \sqrt{2}]$.
4. On a $\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \{1, 2, 3, 4\} : f(x) \in \mathbf{R}\} = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathbf{R} : g(x) \in \{1, 2, 3, 4\}\} = \{\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm 2\}$.
Enfin, $(f \circ g)^{-1}([1, 2]) = g^{-1}(f^{-1}([1, 2])) = g^{-1}(\{2, 3, 4\}) = \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm 2\}$ tandis que $(g \circ f)^{-1}([1, 2]) = f^{-1}(g^{-1}([1, 2])) = f^{-1}([- \sqrt{2}, -1] \sqcup [1, \sqrt{2}]) = \{1\}$.

Exercice 3 (nombre/inégalité).

1. On se donne deux réels x et y vérifiant $2 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq -1$. Trouver des encadrements des quantités $3x + 1$, $3 - 2x$, xy et $\frac{x}{y}$.
2. Donner une expression de $f(x) = 2|x - 1| - 3|x + 2|$ ne contenant plus de valeur absolue (on distinguera plusieurs intervalles).

1. Soit $x \in [2, 5]$ et $y \in [-3, -1]$. L'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire positif ou nul tandis que la multiplication par un réel strictement négatif inverse le sens de l'inégalité. On a :

$$- \quad 3 \cdot 2 + 1 \leq 3x + 1 \leq 3 \cdot 5 + 1 \text{ i.e.}$$

$$7 \leq 3x + 1 \leq 16,$$

$$- \quad -2 \cdot 5 \leq -2x \leq -2 \cdot 2 \Leftrightarrow 3 - 10 \leq 3 - 2x \leq 3 - 4 \text{ i.e.}$$

$$-7 \leq 3 - 2x \leq -1,$$

$$- \quad x \geq 0 \Rightarrow -3x \leq xy \leq -x \Rightarrow -3 \cdot 5 \leq -3x \leq xy \leq -x \leq -2 \text{ i.e.}$$

$$-15 \leq xy \leq -2,$$

$$- \quad -1 \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{3} \xrightarrow{x \geq 0} -x \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{x}{3} \text{ d'où}$$

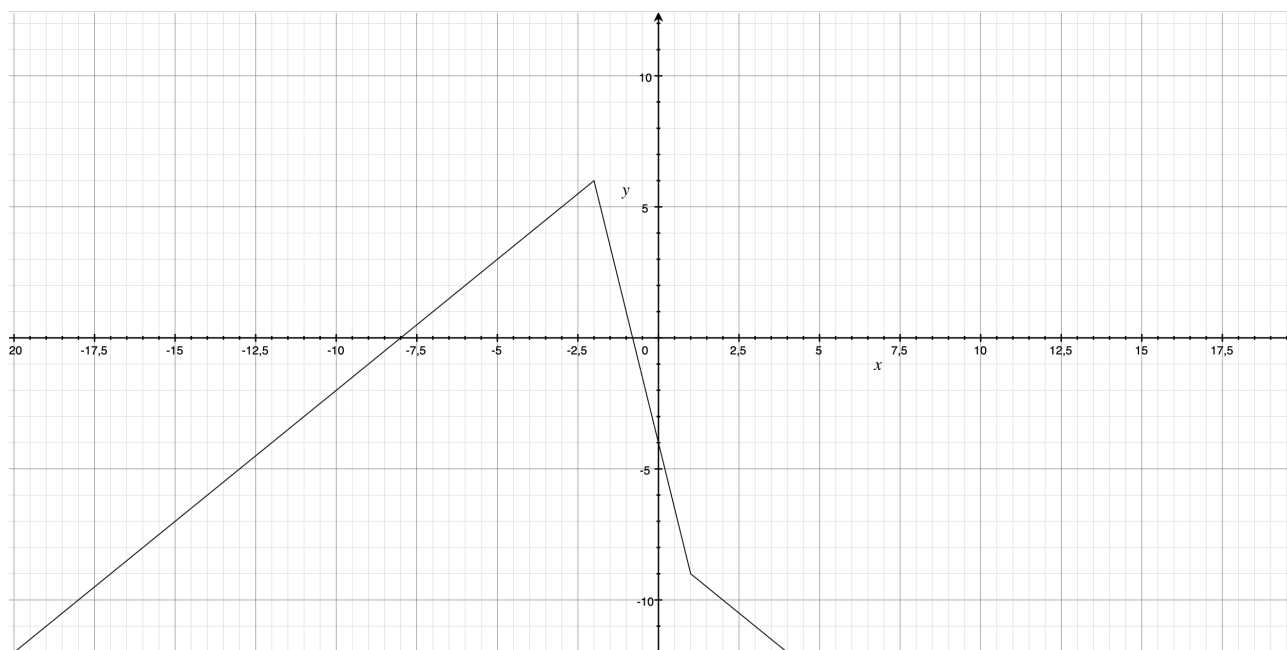
$$-5 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{2}{3}.$$

2. On a $|x - 1| = \max(x - 1, 1 - x)$ avec coupure en $x = 1$ tandis que $|x + 2| = \max(x + 2, -x - 2)$ avec coupure en $x = -2$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2 x - 1 $		$2 - 2x$	6	$2 - 2x$	0	$2x - 2$	
$-3 x + 2 $		$3x + 6$	0	$-3x - 6$	-9	$-3x - 6$	
f		$x + 8$	6	$-5x - 4$	-9	$-x - 8$	

Récapitulons :

$$f(x) = \begin{cases} x + 8 & \text{si } x \leq -2 \\ -5x - 4 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ -x - 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Exercice 4 (binôme). Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- Développer $(1 + (-1))^n$ à l'aide du binôme de Newton.
- En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$.
- En déduire que $\sum_{\substack{k=0 \\ 2k \leq n}}^n \binom{n}{2k} = \sum_{\substack{k=0 \\ 2k+1 \leq n}}^n \binom{n}{2k+1}$.
- Déduire de la question précédente la valeur de $\sum_{\substack{k=0 \\ 2k \leq n}}^n \binom{n}{2k}$ en fonction de n (*indication :*

on pourra calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ en utilisant la formule du binôme de Newton.)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. À l'aide de la formule du binôme du Newton, on obtient :

$$(1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k.$$

2. D'après la question précédente, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1 - 1)^n = 0^n = 0$.

3. On a :

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{\substack{k=0 \\ 2k \leq n}}^n \binom{n}{2k} - \sum_{\substack{k=0 \\ 2k+1 \leq n}}^n \binom{n}{2k+1} \text{ car } (-1)^l = \begin{cases} 1 & \text{si } l = 2k \\ -1 & \text{si } l = 2k+1 \end{cases}$$

i.e.

$$\sum_{\substack{k=0 \\ 2k \leq n}}^n \binom{n}{2k} = \sum_{\substack{k=0 \\ 2k+1 \leq n}}^n \binom{n}{2k+1}.$$

4. On a :

$$(1 + 1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ 2k \leq n}}^n \binom{n}{2k} + \sum_{\substack{k=0 \\ 2k+1 \leq n}}^n \binom{n}{2k+1} \stackrel{3.}{=} 2 \sum_{\substack{k=0 \\ 2k \leq n}}^n \binom{n}{2k}$$

d'où

$$\sum_{\substack{k=0 \\ 2k \leq n}}^n \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

Exercice 5 (polynôme & complexe).

1. Soit $P := X^4 + 1 \in \mathbf{R}[X]$.
- (a) Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 + \sqrt{2}X + 1$. En déduire une factorisation de $X^4 + 1$ en polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ en justifiant proprement l'irréductibilité des facteurs.
- (b) Déduire de la question précédente, les racines complexes de $X^4 + 1 = 0$.
2. Résoudre sur $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 = 8 - 6i$.

1. (a) La division euclidienne de $X^4 + 1$ par $X^2 + \sqrt{2}X + 1$ conduit à

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$$

i.e. le quotient est égal à $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et le reste est nul.

Cette écriture fournit une décomposition de $X^4 + 1$ en irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ car ses facteurs sont de degré 2 à discriminant < 0 .

- (b) On a $X^2 + \sqrt{2}X + 1 = (X - z_1)(X - \bar{z}_1)$ avec $z_1 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ tandis que

$$X^2 - \sqrt{2}X + 1 = (X - z_2)(X - \bar{z}_2) \text{ avec } z_2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Finalement, $z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z \in \{e^{i\frac{\pi}{4}}, -e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, -e^{i\frac{3\pi}{4}}\}$ (racine quatrième de -1).

2. Posons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbf{R}$, il vient :

$$\begin{cases} a^2 & - & b^2 & = & 8 \\ 2ab & & & = & -6 \\ a^2 & + & b^2 & = & \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 & = & 9 \\ b^2 & = & 1 \\ ab & = & -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & \pm 3 \\ b & = & \pm 1 \\ ab & = & -3 \end{cases}$$

C'est-à-dire $z = 3 - i$ ou $z = -3 + i$.