

MATH103_MISPI (Mathématiques & applications)

Contrôle des connaissances

Lundi 14 novembre 2022 (13:00–14:30)

Documents, calculatrice, téléphone portable et montre intelligente interdits.

Lors de l'appréciation des copies, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation, de la clarté de la rédaction et de la précision des démonstrations.

Exercice 1 (langage). Soit $x \in \mathbf{R}$. On considère l'assertion

$$(A) : (\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0.$$

1. Montrer que l'assertion (A) est vraie.
2. Écrire la négation de (A) .
3. Donner la contraposée de (A) .
4. Écrire la réciproque de (A) . Est-elle vraie ?
5. Que peut-on en déduire ?

1. On peut raisonner par l'absurde. Supposons $x \neq 0$. En posant $\varepsilon_0 := \frac{|x|}{2} > 0$ (car $x \neq 0$), on a en particulier $|x| < \varepsilon_0$. Or

$$|x| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow |x| < \frac{|x|}{2} \stackrel{|x|>0}{\Leftrightarrow} 2 < 1 \rightarrow \leftarrow$$

Ainsi, $x = 0$. On conclut que (A) est vraie.

2. $\neg(A) : (\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon)$ et $x \neq 0$.
3. Contraposée(A) : $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon_0 > 0, |x| \geq \varepsilon_0)$.
4. Réciproque(A) : $x = 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon)$.

La réciproque est vraie ; en effet, si $x = 0$ alors $\forall \varepsilon > 0, |x| = 0 < \varepsilon$.

5. On en déduit

$$(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Leftrightarrow x = 0.$$

Exercice 2 (fonction/application). Pour chacune des relations suivantes, dire si elle définit une fonction (de la variable x) de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, préciser son domaine de définition, l'explicitier et tracer sommairement son graphe dans ce cas. Puis dire si c'est une application ou une fonction (de la variable x) qui est injective, surjective ou bijective.

1. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, x\mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow y^2 = x^2$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, x\mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow \ln(y) = x$ où $\ln$ désigne le *logarithme népérien*.
3. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, x\mathcal{R}_3 y \Leftrightarrow y = x^2$.
4. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, x\mathcal{R}_4 y \Leftrightarrow y = x^3$.

1. La relation $\mathcal{R}_1$ ne définit pas une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ car $(-1)\mathcal{R}_1 1$ et $1\mathcal{R}_1 1$ donc le graphe de $\mathcal{R}_1$ n'est pas fonctionnel.
2. La relation $\mathcal{R}_2$ définit la fonction $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ avec $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbf{R}$ telle que $f_2(x) = e^x$; f_2 est une application injective (car strictement croissante), non surjective (car $f_2 \geq 0$) donc non bijective.
3. La relation $\mathcal{R}_3$ définit la fonction $f_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ avec $\mathcal{D}_{f_3} = \mathbf{R}$ telle que $f_3(x) = x^2$; f_3 est une application qui n'est pas injective (car $f_3(-1) = 1 = f_3(1)$), non surjective (car $f_3 \geq 0$) donc non bijective.
4. La relation $\mathcal{R}_4$ définit la fonction $f_4 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ avec $\mathcal{D}_{f_4} = \mathbf{R}$ telle que $f_4(x) = x^3$; f_4 est une application, injective (car strictement croissante), surjective donc bijective.

Exercice 3 (nombre/inégalité). On justifiera rapidement les réponses à l'aide d'une propriété appropriée.

1. Soit $x, y \in \mathbf{R}$. On suppose $x + y \in [-2, 1]$ et $x - y \in [-1, 2]$. En déduire un encadrement de x et de y .
2. Soit $z, t \in \mathbf{R}$ tel que $|z + 1| \leq 2$ et $|t - 1| < \frac{1}{2}$.
 - (a) Donner un encadrement de z et t .
 - (b) Donner un encadrement de zt et $\frac{z}{t}$.

1. On a

$$\begin{array}{rcl} -2 & \leq & x + y \leq 1 \\ -1 & \leq & x - y \leq 2 \\ \hline -3 & \leq & 2x \leq 3 \end{array}$$

car l'ordre est compatible avec l'addition.

Ainsi, $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

De manière analogue

$$\begin{array}{rcl} -2 & \leq & x + y \leq 1 \\ -2 & \leq & y - x \leq 1 \\ \hline -4 & \leq & 2y \leq 2 \end{array}$$

Ainsi, $-2 \leq y \leq 1$.

2. On a

$$|z + 1| \leq 2 \Leftrightarrow -1 - 2 \leq z \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq z \leq 1.$$

De manière analogue

$$|t - 1| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}.$$

Comme $t > 0$, on obtient

$$-3t \leq zt \leq t \Rightarrow -\frac{9}{2} < zt < \frac{3}{2}$$

car l'ordre (resp. strict) est compatible avec la multiplication par un scalaire positif ou nul (resp. strictement positif).

À nouveau car $t > 0$

$$-\frac{3}{t} \leq \frac{z}{t} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow -6 < \frac{z}{t} < 2.$$

Exercice 4 (récurrence/binôme).

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

- (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq n$.
 (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.
- (a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
 (b) Développer $(1+x)^n$.
 (c) Développer $(1+x)^{2n}$.
 (d) En remarquant que $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$, en comparant le coefficient de x^n dans les deux expressions et en utilisant **2a**, montrer que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

1. (a) (i) On a $u_0 = 0 \geq 0 = n$.
 (ii) Supposons la propriété vraie à l'ordre n . On a

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geq 3n - 2n + 3 = n + 3 \geq n + 1.$$

On conclut

$$(i) \wedge (ii) \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq n.$$

- (b) En vertu du théorème de comparaison, comme $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2.

Exercice 5 (complexe/racine).

1. (a) Dans $\mathbf{C}$, déterminer les solutions de l'équation $\delta^2 = -5 + 12i$.
 (b) Résoudre l'équation $(2+i)z^2 - (3+2i)z + 1 - \frac{i}{2} = 0$.
2. Soit $a, b \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

- (a) Déterminer les solutions complexes de l'équation

$$\left(\frac{z-a}{z-b} \right)^n = i.$$

- (b) **Question bonus :** Quelle propriété géométrique commune possèdent les images de ces solutions dans le plan complexe ?

1. (a) Posons $\delta = x + iy$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Il vient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (2, 3) \\ \text{ou} \\ (x, y) = (-2, -3) \end{cases}$$

Autrement dit, $\delta = \pm(2 + 3i)$.

- (b) On a

$$\begin{aligned} \Delta &= -(3 + 2i)^2 - 4(2 + i)(1 - \frac{i}{2}) = 9 + 12i - 4 - 2(2 + i)(2 - i) = 5 + 12i - 2|2 + i|^2 \\ &= 5 + 12i - 2(4 + 1) = -5 + 12i. \end{aligned}$$

D'après 1,

$$z_1 = \frac{3 + 2i - (2 + 3i)}{2(2 + i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - i}{2 + i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - i)(2 - i)}{4 + 1} = \frac{1 - 3i}{10}$$

et

$$z_2 = \frac{3 + 2i + 2 + 3i}{2(2 + i)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1 + i}{2 + i} = \frac{5}{2} \cdot \frac{(1 + i)(2 - i)}{5} = \frac{3 + i}{2}.$$

On conclut $\mathcal{S} = \{\frac{1 - 3i}{10}, \frac{3 + i}{2}\}$.

2. On a $z \neq a$ et $z \neq b$. Posons $u = \frac{z - a}{z - b}$. Si $u \neq 1$ i.e. $a \neq b$ alors u est racine n -ième de i .

Ainsi

$$u^n = i \Leftrightarrow u \in \{e^{i\frac{\pi}{2n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} : 0 \leq k < n\}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} u = \frac{z - a}{z - b} &\Leftrightarrow u(z - b) = z - a \Leftrightarrow z(1 - u) = bu - a \Leftrightarrow z \stackrel{u \neq 1}{=} \frac{bu - a}{1 - u} \\ &\Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{be^{i\frac{(1+4k)\pi}{2n}} - a}{1 - e^{i\frac{(1+4k)\pi}{2n}}} : 0 \leq k < n \right\} = \left\{ \frac{ae^{-i(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n})} - be^{i(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n})}}{2 \cos(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n})} : 0 \leq k < n \right\}. \end{aligned}$$

D'autre part, posons $A := M(a)$, $B := M(b)$ et $M := M(z)$. On a

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right|^n = 1 \Leftrightarrow |z - a| = |z - b| \Leftrightarrow M \in \text{Médiatrice}([A, B]).$$

De plus,

$$\arg(z - a) - \arg(z - b) = \arg(a - z) - \arg(b - z) \equiv \frac{\pi}{2n} \left[\frac{2\pi}{n} \right].$$

Autrement dit

$$\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \frac{(1 + 4k)\pi}{2n} \text{ avec } 0 \leq k \leq n - 1.$$

La position de M passe d'un demi-plan limité par (AB) à l'autre en $k = \lceil \frac{2n - 1}{4} \rceil$.