La répartition des points est indicative et sujette à ajustement.

USMB, Math203 2023-2024

Examen final (Durée : 2h)

Équations différentielles, Intégration, Développement limité

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront de façon importante dans l'appréciation des copies. Les téléphones portables, calculatrice et documents sont interdits.

Bon courage !

5p.

EXERCICE 1 Mécanique céleste : Le problème des deux corps

Le problème des deux corps consiste à étudier le mouvement du systeme de deux points de masses M et m sous l'action de forces gravitationnelles mutuelles. Les deux corps sont considérés comme étant en mouvement sous l'effet des forces gravitationnelles de la gravité mutuelle et sans aucune autre influence.

Imaginez notre soleil et une comète voyageant dans l'espace, la grande différence de leurs masses rendra le mouvement du soleil, par rapport à la comète, insignifiant. On peut donc supposer que le soleil est fixe. À un moment donné, la comète a une position et une vitesse, on decrit sa position par r et φ (voir la figure). Nous introduisons une nouvelle variable $u = \dfrac{1}{r}$. En utilisant la loi en carré inverse et la loi de Kepler, nous pouvons écrire une équation qui relie u et φ :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + k\frac{du}{d\varphi} + u = \frac{\lambda}{mh^2}. \tag{1}$$

où $\lambda = mMG$, G etant la constante gravitationelle universel et $h = \text{const}$.
Pour toutes question qui suit on pose $k = 0$.

1. Montrer que la solution générale de cette equation s'ecrit

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi + K$$

   où vous preciser K.

2. Rappeler la formule trigonometrique pour $\cos(\alpha - \beta)$ et montrer que nous avons

$$r(\varphi) = \frac{1}{K - C\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

   où les constantes C et φ_0 depend des constantes A et B (vous precisez comment).

3. On suppose que pour $\varphi = 0$, r_0 est la distance donné entre le Soleil et la comète et u_r, u_φ sont des composantes de la vitesse, alors nous avons les conditions :

$$u(0) = \frac{1}{r_0}, \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{u_r}{r_0 u_\varphi}.$$

   On peut egalement definir h par

$$h = \frac{u_\varphi}{r_0}.$$

   Determiner les constantes A, B et la solution $u(\varphi)$.

Maintenant on suppose $k \neq 0$ et $\lambda = 0$.

4. En fonction des différentes valeurs de k , écrire la forme générale de la solution de l'équation (1).

1. $u''(\varphi) + u(\varphi) = \frac{GM}{h^2}$ (1)

C'est une équation differentielle non-homogène de second ordre.

On cherche d'abord les racines de l'equation caracteristiques

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

0.5 valeur λ

0.5 forme de la solution (H).

donc la solution de l'éq (H) peut s'ecrire : $u(\varphi) = A\cos\varphi + B\sin\varphi$

Le second membre est une const donc la solution particulière est donnée par $u(\varphi) = \frac{GM}{h^2}$ 0.5 sol. part.

Donc la solution de (1) s'écrit

$$u(\varphi) = A\cos\varphi + B\sin\varphi + K$$

où $K = \frac{GM}{h^2}$

2. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ 0.5 formule

On remarque que

factorisation

$$A\cos\varphi + B\sin\varphi = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\varphi + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\varphi\right)$$ 0.5

On introduit φ_0 : $\cos\varphi_0 = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $\sin\varphi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 0.5 def. φ_0

Donc

$$\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\varphi + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\varphi\right) =$$

$$\sqrt{A^2+B^2}\left(-\cos\varphi_0\cos\varphi + \sin\varphi_0\sin\varphi\right) = -\sqrt{A^2+B^2}\cos(\varphi - \varphi_0)$$

Alors $u(\varphi) = K - \sqrt{A^2+B^2}\cos(\varphi-\varphi_0)$

Et

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = \frac{1}{K - C\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

où $C = \sqrt{A^2+B^2}$

$\varphi_0 : \cos\varphi_0 = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$

resultat pour $r(\varphi)$ 0,5

3. $u(0) = \frac{1}{r_0}$ $\quad \frac{du}{d\varphi}(0) = -\frac{u_r}{r_0 u_\varphi}$

$u(\varphi) = A\cos\varphi + B\sin\varphi + K$

$$\begin{cases} u(0) = A + K \\ \left.\frac{du}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \left(-A\sin\varphi + B\cos\varphi\right)\Big|_{\varphi=0} = B \end{cases}$$

0.5 calcul des derivées

$$A = \frac{1}{r_0} - K$$

$$B = -\frac{u_r}{r_0 u_\varphi}$$

consts 0.5

donc

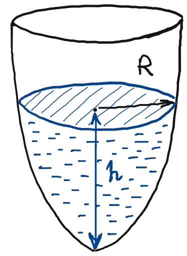
$$u(\varphi) = \left(\frac{1}{r_0} - K\right)\cos\varphi - \frac{u_r}{r_0 u_\varphi}\sin\varphi + \frac{GM}{h^2}$$

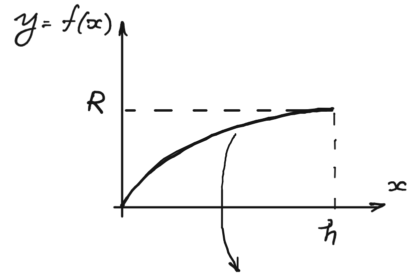
forme de la solution 0.5

4p.

EXERCICE 2 Réservoir

Considérons un réservoir parabolique de volume V rempli d'eau jusqu'au niveau h. Nous voulons calculer le volume initial de l'eau. On suppose qu'à la hauteur h, le rayon du réservoir est égal à R.

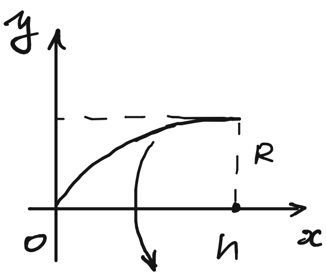




1. Le volume recherché peut être présenté comme le volume du solide de révolution obtenu par rotation du graphe $y = f(x)$ d'une fonction f autour de l'axe des x, et délimité par deux plans d'équations x = a et x = b. Quelle est la fonction f ? Quelles sont les valeurs de a et b ?
2. Calculer V en fonction de R et h.
3. Calculer la surface de réservoir.

Indication. Utiliser les formules (vue en cours) pour un corps de révolution.

1.



$f(x) = a\sqrt{x}$

$f(h) = a\sqrt{h} = R \Rightarrow a = \dfrac{R}{\sqrt{h}}$

Donc $f(x) = \dfrac{R}{\sqrt{h}}\sqrt{x}$ 1 $f(x)$, a, b

En effet, V est le volume de révolution obtenu par rotation de f definie pour $x \in [0, h]$, donc $V = \int_0^h \pi \left(f(x)\right)^2 dx$ 0.5 formule

0.5 primitive + résultat

2. $V = \int_0^h \pi f^2(x)\,dx = \int_0^h \pi \dfrac{R^2}{h} x\,dx = \dfrac{\pi R^2}{h}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^h = \dfrac{\pi R^2}{h}\cdot\dfrac{h^2}{2} = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h$

3. $f'(x) = \dfrac{R}{\sqrt{h}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 0.5 f'

$S = \int_0^h 2\pi\, f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$ 0.5 formule

$$\int_0^h 2\pi \frac{R}{\sqrt{h}} \sqrt{x} \sqrt{1+\frac{R^2}{4hx}}\, dx$$

$$= 2\pi R \int_0^h \sqrt{\frac{x}{h}+\frac{R^2}{4h^2}}\, dx = 2\pi R \cdot \frac{R}{2h} \int_0^h \sqrt{1+\frac{4h}{R^2}x}\, dx$$

$$y = \frac{4h}{R^2}x$$

$$\frac{R^2}{4h} dy = dx$$

$$= \frac{\pi R^2}{h} \frac{R^2}{4h} \int_0^{\frac{4h^2}{R^2}} \sqrt{1+y}\, dy =$$

0.5 la primitive

$$= \frac{\pi R^4}{4h^2} \frac{2}{3} \left[(1+y)^{3/2} \right]_0^{4h^2/R^2} = \frac{\pi R^4}{6h^2} \cdot \left(\left(1+\frac{4h^2}{R^2}\right)^{3/2} - 1 \right)$$

0.5 resultat du calcul

$$= \frac{\pi R}{6h^2} \left(R^3 \left(1+\frac{4h^2}{R^2}\right)^{3/2} - R^3 \right) = \frac{\pi R}{6h^2} \left(\left(R\left(1+\frac{4h^2}{R^2}\right)^{1/2} \right)^3 - R^3 \right)$$

$$= \frac{\pi R}{6h^2} \left(\left(R^2+4h^2\right)^{3/2} - R^3 \right)$$

1,5p.

EXERCICE 3 Developpement limité

L'ecoulement des vagues peut etre decrie par un systeme des equations qui respecte la relation entre la frequence ω et parametre k (nombre d'onde) suivante

$$\omega(k) = k\sqrt{gh_0}\sqrt{\frac{1}{1+(kh_0)^2/3}}$$

où h_0 est la profondeur.

1. Montrer que dans la limite d'eau peu profonde (définie par $kh_0 \ll 1$) l'expression de ω en fonction de k est lineaire.
2. Donner l'expression de $\omega(k)$ en faisant un développement limité à l'ordre deux et trois en kh_0.

calcul/ 0.5 reconnatre DL

$$(1+x)^{\alpha} = 1-\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

1. $$\omega(k) = k\sqrt{gh_0}\left(1+\frac{(kh_0)^2}{3}\right)^{-1/2}$$

$$= k\sqrt{gh_0}\left(1+o((kh_0))\right) \approx \sqrt{gh_0}\,k$$

0.5

la rélation est effectivement linéaire

2. $$\omega(k) = k\sqrt{gh_0}\left(1-\frac{1}{6}(kh_0)^2 + \frac{1}{24}(kh_0)^4 + o((kh_0)^4)\right)$$

l'expression à l'ordre trois est

$$\omega(k) = k\sqrt{gh_0}\left(1-\frac{1}{6}(kh_0)^2 + o((kh_0)^3)\right)$$ 0.5

9,5 p.

EXERCICE 4 Calculs divers

I. 1. Rappeler les développements limités en 0 de $\exp(x)$ et $\cos(x)$ à l'ordre 5.
2. En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$$

3. En utilisant les développements limités usuels, montrez que

$$1 - \frac{(x+1)^{\frac{1}{x}}}{e} = \frac{x}{2} + o(x)$$

au voisinage de 0 . *Indication.* $a^x = e^{x \ln a}$.

II. Calculer les intégrales :

1. $\int x^2(5-x^4)\,dx$ 2. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (*Indication. Changement de variable.*)   3. $\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,dx$

~~3.~~ 4. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ ~~et $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx$ (*Indication. Changement de variable.*)~~

I. 1. $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ 0.5

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4} =$$

0.5

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4!} - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{o(x^5)}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

$$\frac{o(x^5)}{x^4} = \frac{x^5 \varepsilon(x)}{x^4} = x\,\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

0.5

3. $$1 - \frac{(x+1)^{1/x}}{e} = 1 - \exp\left\{ \frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right\}$$ 0.5

$$= 1 - \exp\left\{ \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 1 \right\}$$

0,5 DL ln.

$$= 1 - \exp\left\{ -\frac{x}{2} + o(x) \right\} = 1 - 1 + \frac{x}{2} + o(x) = \frac{x}{2} + o(x)$$

0.5 DL exp.

II

1. $\int x^2(5-x^4)\,dx = \int 5x^2\,dx - \int x^6\,dx = 5\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} + C$ 0.5

2. $\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{lll} t=\sqrt{1-x^2} & t^2 = 1-x^2 & x^2 = 1-t^2 \\ dt = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(-\cancel{2}x)\,dx & & 0.5 \end{array}\right]$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \cdot x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_1^0 (1-t^2)^2\,dt = \int_0^1 (1-2t^2+t^4)\,dt$$

$$= \left[t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15-10+3}{15} = \frac{8}{15}$$

0.5 0.5

3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + \cos^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right]$ 0.5

$$= \int_0^1 \frac{1+(1-t^2)}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{2-t^2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{3-(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$$ 0.5

$$= \int_0^1 \frac{3}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 dt = 3\left[\operatorname{arctg}(t)\right]_0^1 - 1 = \frac{3\pi}{4} - 1$$ 0.5 0.5

4. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \left[\begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \\ du = -\frac{1}{x^2}\,dx \end{array}\right] =$ 0.5

$$= -\int \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^2 du = -\int (\ln u)^2\,du = -\int (\ln u)^2 \cdot 1\,du$$ 0.5

$$= -(\ln x)^2 x + \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \, dx =$$ 0,5

$$= -(\ln x)^2 x + 2 \int \ln x \cdot 1 \, dx =$$

$$= -(\ln x)^2 x + 2 \ln x \cdot x - 2 \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= -(\ln x)^2 x + 2x \ln x - 2x + C$$ 0,5

$$= -\frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x + 2}{x} + C$$ 0,5