

Examen final (Durée : 2h)**Équations différentielles, intégrales, développements limités**

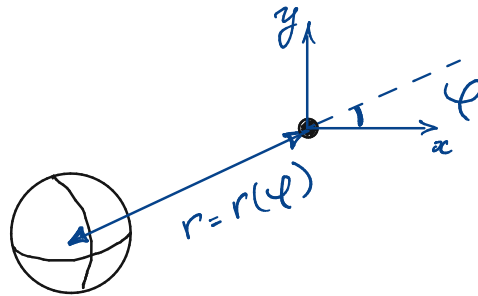
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des calculs interviendront de façon importante dans l'appréciation des copies. Les téléphones portables, calculatrices et documents sont interdits.

Bon courage !

EXERCICE 1 Mécanique céleste : le problème à deux corps

Le problème à deux corps consiste à étudier le mouvement du système constitué de deux points matériels de masses M et m en interaction mutuelle. Les deux corps sont considérés comme étant en mouvement sous le seul effet des forces gravitationnelles qu'ils exercent l'un sur l'autre.

Imaginez notre Soleil et une comète voyageant dans l'espace. Comme l'énorme masse solaire rend le mouvement du Soleil par rapport à la comète insignifiant, on peut supposer que le Soleil est fixe. À tout moment, la comète a une position décrite par r et φ (voir la figure).



Nous introduisons une nouvelle variable $u = \frac{1}{r}$. En utilisant la loi en carré inverse et la loi de Kepler, nous pouvons écrire une équation qui relie u et φ :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad (1)$$

en posant $\mu = MG$, où G est la constante universelle de gravitation et h est une constante > 0 .

1. Montrer que la solution générale de cette équation s'écrit

$$u(\varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi + K,$$

où l'on précisera la constante K .

2. Rappeler la formule trigonométrique pour $\cos(\alpha - \beta)$ et montrer qu'on a

$$r(\varphi) = \frac{1}{K - C \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

où les constantes C et φ_0 dépendent des constantes A et B (on précisera comment).

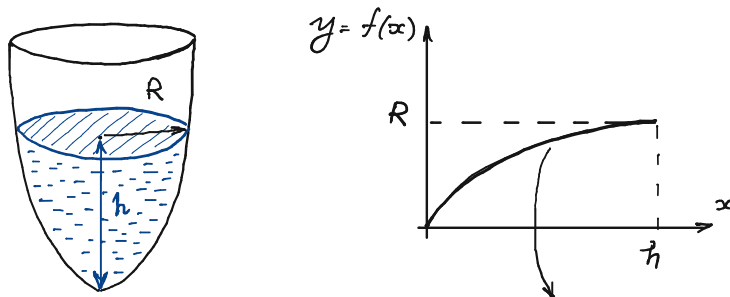
3. Au moment où on a $\varphi = 0$, la distance entre le Soleil et la comète est notée r_0 et les composantes de la vitesse de la comète dans le repère polaire sont notées v_r et v_φ . On a donc les conditions suivantes :

$$u(0) = \frac{1}{r_0}, \quad \frac{du}{d\varphi}(0) = -\frac{v_r}{r_0 v_\varphi}.$$

On obtient également $h = r_0 v_\varphi$. Déterminer les constantes A , B et la solution $u(\varphi)$ en fonction de r_0 , v_r , v_φ , G et M .

EXERCICE 2 Réservoir

Considérons un réservoir parabolique vertical rempli d'eau jusqu'au niveau h (voir la figure). Nous voulons calculer le volume d'eau V qu'il contient. On suppose qu'à la hauteur h le rayon du réservoir est égal à R .



1. Le volume recherché peut être présenté comme le volume du solide de révolution obtenu par rotation autour de l'axe des x du graphe $y = f(x)$ d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs de a et b ? Quelle est la fonction f ?
2. Calculer V en fonction de R et h .
3. Calculer la surface du réservoir qui est en contact avec l'eau en fonction de R et h .

Indication : utiliser les formules (vues en cours) pour un solide de révolution.

EXERCICE 3 Développement limité

La propagation d'une vague dans les zones côtières avec une profondeur caractéristique h_0 est représentée par une onde dont la fréquence ω s'exprime en fonction d'un paramètre k (appelé "nombre d'onde") de la façon suivante (où g désigne la valeur de la pesanteur terrestre) :

$$\omega(k) = k\sqrt{gh_0} \sqrt{\frac{1}{1 + (kh_0)^2/3}}.$$

1. Montrer que dans la limite d'eau peu profonde (c'est-à-dire lorsque kh_0 est très petit) l'expression de ω en fonction de k est linéaire.
2. Donner le développement limité de $\omega(k)$ en 0 à l'ordre 3 dans la variable kh_0 .

EXERCICE 4 Calculs divers

- I.** 1. Rappeler les développements limités en 0 de $\exp(x)$ et $\cos(x)$ à l'ordre 5.
2. En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}.$$

3. En utilisant les développements limités usuels, montrer qu'on a

$$1 - \frac{(x+1)^{\frac{1}{x}}}{e} = \frac{x}{2} + o(x)$$

au voisinage de 0. *Rappel : $a^x = e^{x \ln a}$ pour tous nombres réels $a > 0$ et x .*

- II.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int x^2(5 - x^4) dx$
2. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ (Indication : faire le changement de variable $t = \sqrt{1 - x^2}$.)
3. $\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{1 + \sin^2 x} dx$ (Indication : faire le changement de variable $t = \sin x$.)
4. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ (Indication : faire le changement de variable $u = 1/x$ et une intégration par parties.)