

Feuille D'EXERCICE 3 : Développements limités**1 Évaluation de dérivées à partir de données discrètes**

Lorsqu'on enregistre un signal $s(t)$ (par exemple un son) avec un appareil numérique, celui-ci procède à un échantillonnage, c'est-à-dire qu'il récupère la valeur du signal à différents instants t_i , séparés d'une durée τ appelée le temps d'échantillonnage. L'appareil délivre alors une suite de valeurs s_i discrètes, plutôt qu'une fonction continue. Cet exercice s'intéresse au problème d'évaluer les dérivées du signal à partir des valeurs discrètes, lorsque τ est petit.

1. Représenter une courbe $s(t)$ quelconque et indiquer schématiquement les grandeurs t_i et s_i sur cette courbe.
2. Donner la relation entre t_{i+1} , t_i et τ .
3. En faisant un développement limité au premier ordre, donner une expression approchée de s_{i+1} en fonction de s_i , de τ et de s'_i , la valeur de la dérivée de s prise au point $t = t_i$. Proposer une façon d'évaluer s'_i à partir des mesures de s_i et s_{i+1} .
4. En faisant un développement limité au second ordre de s_{i-1} et s_{i+1} , montrer que la dérivée seconde de s peut être évaluée par l'expression

$$s''_i \approx -\frac{2s_i - s_{i-1} - s_{i+1}}{\tau^2}$$

5. Proposer une façon similaire d'évaluer la dérivée troisième de s au point t_i , à partir des s_i .

2 Chute avec frottements

Lorsqu'on étudie la chute d'un corps, sous l'effet de la gravité, en présence de frottements, on peut dans certains cas trouver une expression analytique donnant la vitesse en fonction du temps. Dans les deux cas ci-dessous, montrer que dans la limite où les frottements deviennent très faibles, on retrouve le cas de la chute libre.

1. Pour un frottement de la forme $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, on trouve que

$$\dot{z}(t) = -\frac{mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t/m}\right)$$

2. Pour un frottement de la forme $\vec{F} = -\alpha v\vec{v}$, on trouve que

$$\dot{z}(t) = -\sqrt{\frac{mg}{\alpha}} \tan\left(\sqrt{\frac{\alpha g}{m}} t\right)$$

En relativité restreinte, on introduit les grandeurs fondamentales

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

où v désigne la vitesse d'une particule et c la vitesse de la lumière.

1. L'énergie d'un corps est donnée par $E = \gamma mc^2$ où m désigne la masse de la particule. Dans la limite non-relativiste, (définie par $v \ll c$), donner l'expression de E en fonction de m , v et c , en faisant un développement limité au second ordre en v/c . Identifier les deux termes de l'expression obtenue.
2. Le traitement relativiste de l'effet Doppler relativiste indique que lorsqu'une source lumineuse s'éloigne de nous à la vitesse v , sa fréquence apparente est donnée par

$$f = f_0 \times \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Que devient cette expression dans la limite non-relativiste ?

4 Calcul mental

Calculer sans machine l'ordre de grandeurs des expressions suivantes en utilisant les développements limités :

$$a = 0,99^3 \quad , \quad b = \frac{1}{10,1} \quad , \quad c = \frac{1}{10,1} + \frac{1}{9,9}$$

5 Comportement local

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$, et en déduire la position de la tangente de f en 0 par rapport au graphe de f .

6 Développement limité et comportement asymptotique

On considère la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. On pose $h = \frac{1}{x}$ et $F(h) = f(x)$.

1. Que vaut $F(h)$?
2. On suppose $h \geq 0$. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de F en 0 pour $h \geq 0$. En déduire l'équation de l'asymptote au graphe de f en $+\infty$. Quelle est la position de ce graphe par rapport à son asymptote ?
3. On suppose maintenant $h \leq 0$. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de F en 0 pour $h \leq 0$.

En déduire l'équation de l'asymptote au graphe de f en $-\infty$. Quelle est la position de ce graphe par rapport à son asymptote ?