

Math 203, Feuille 2.

1.

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(-2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \sin(-2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 0 = 0.$$

$$2. \int_{-1}^1 (1+x^3)^4 x^2 dx = \left[\frac{1}{5} \frac{(1+x^3)^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2^5}{15} - \frac{0}{15} = \frac{32}{15}$$

$$3. \int_{-1}^1 x e^{2x} dx = \left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{2} dx$$

$$= \frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} - \frac{e^2 - e^{-2}}{4}$$

$$= \frac{e^2 + 3e^{-2}}{4}$$

$$4. \int_0^1 \frac{e^x}{2+e^x} dx = \int_1^e \frac{du}{2+u} = \left[\ln(2+u) \right]_1^e = \ln(2+e) - \ln(3).$$

2. Intégrales par partie:

$$1. \int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e-1)$$

$$= 1.$$

$$2. \int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - \left(2 \left[x e^x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx \right)$$

$$= e - 2e + 2 \left[e^x \right]_0^1 = -e + 2(e-1) = e-2.$$

$$3. \int_0^\pi x^2 \cos x dx = \left[x^2 \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \sin x dx$$

$$= - \left(\left[2x(-\cos x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi -2 \cos x dx \right)$$

$$= - \left(2\pi + \left[2 \sin x \right]_0^\pi \right) = -2\pi$$

$$4. \int \ln x dx = \int 1 \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x - x$$

$$5. \int_1^2 x^2 \ln x dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{3} 8 \ln 2 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3} \ln 2 - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}.$$

3. Changement de variable:

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} dx = \int_1^e \frac{2 dt}{t + \frac{1}{t}} = \int_1^e \frac{2t}{t^2+1} dt$$

$$= \left[\ln(t^2+1) \right]_1^e = \ln(e^2+1) - \ln 2.$$

$$\int_1^4 t^3 e^{-t^2} dt = \int_1^4 v e^{-v} \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} \left(\left[v(-e^{-v}) \right]_1^4 - \int_1^4 -e^{-v} dv \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-4e^{-4} + e^{-1} + \left[-e^{-v} \right]_1^4 \right)$$

$$= -2e^{-4} + \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}e^{-1} = -\frac{5}{2}e^{-4} + e^{-1}$$

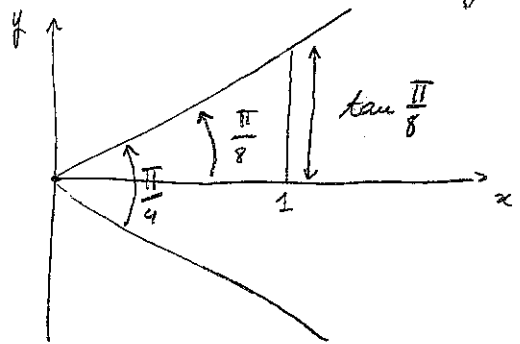
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2x dx}{1+x} = 2 \int \frac{x+1-1}{1+x} dx = 2 \int 1 dx - 2 \int \frac{1}{1+x} dx$$

$$= 2x - 2 \ln(1+x) = 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}).$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1 + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos x}}{1 + \cos x} \sin x dx \\
 &= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u(1+u)} du = - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u(1+u)} du \\
 &= - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1+u-u}{u(1+u)} du = - \int_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du \\
 &= - \left(\left[\ln u - \ln(1+u) \right]_1^{\frac{1}{2}} \right) = - \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln 2 \right) \\
 &= - \ln\left(\frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).
 \end{aligned}$$

4. Volume d'un cône :

1. Dans le plan des x, y :



Le solide est engendré par la rotation du graphe de $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot x$.

2. Le volume est

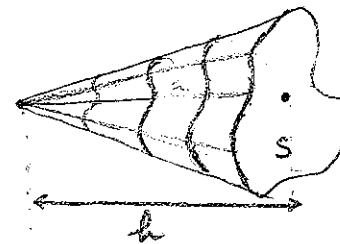
$$V = \int_0^2 \pi f(x)^2 dx = \int_0^2 \pi \left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) x \right)^2 dx$$

$$= \pi \left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)^2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \pi \left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)^2 \cdot \frac{8}{3}.$$

Rem : Le $\frac{\pi}{8}$ vient d'une erreur de l'énoncé, initialement prévu avec un cône d'ouverture $\frac{\pi}{2}$, donnant une pente $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ à la pente de f , donc 1. On peut cependant montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Comment ?

• En écrivant le résultat sous la forme

$\frac{1}{3} \pi (2 \tan\left(\frac{\pi}{8}\right))^2 \times 2$ on retrouve la formule usuelle : $\frac{1}{3} S \times h$ avec S la surface de la base et h la hauteur du cône. Pouvez-vous retrouver cette formule, pour un cône dont la base est quelconque ?



5. Longueur d'un fil.

$$1. \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \text{ et } \sinh'(x) = \cosh(x).$$

2. La longueur est

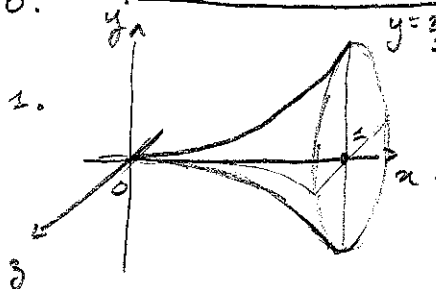
$$l = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sqrt{1 + (\alpha \beta \sinh(\beta x))^2} dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sqrt{1 + \sinh(\beta x)^2} dx$$

$$= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sqrt{\cosh(\beta x)^2} dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cosh(\beta x) dx$$

$$= \left[\frac{\sinh(\beta x)}{\beta} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) - \frac{1}{\beta} \sinh\left(-\frac{\beta L}{2}\right)$$

$$= \frac{2 \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\beta}$$

6. Surface d'un entonnoir



2. L'aire est donnée par

$$\int_0^1 2\pi \frac{x^3}{3} \sqrt{1+(x^2)^2} dx = \frac{2\pi}{12} \int_0^1 4x^3 \sqrt{1+x^4} dx$$

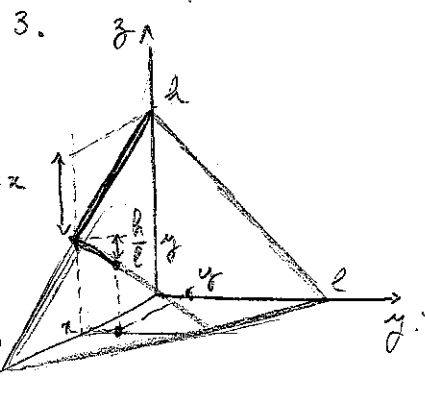
$$= \frac{\pi}{6} \left[\frac{2}{3} (1+x^4)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{18} (2\sqrt{2} - 1)$$

$$= \frac{(2\sqrt{2} - 1)\pi}{9}$$

7. Volume de pyramide

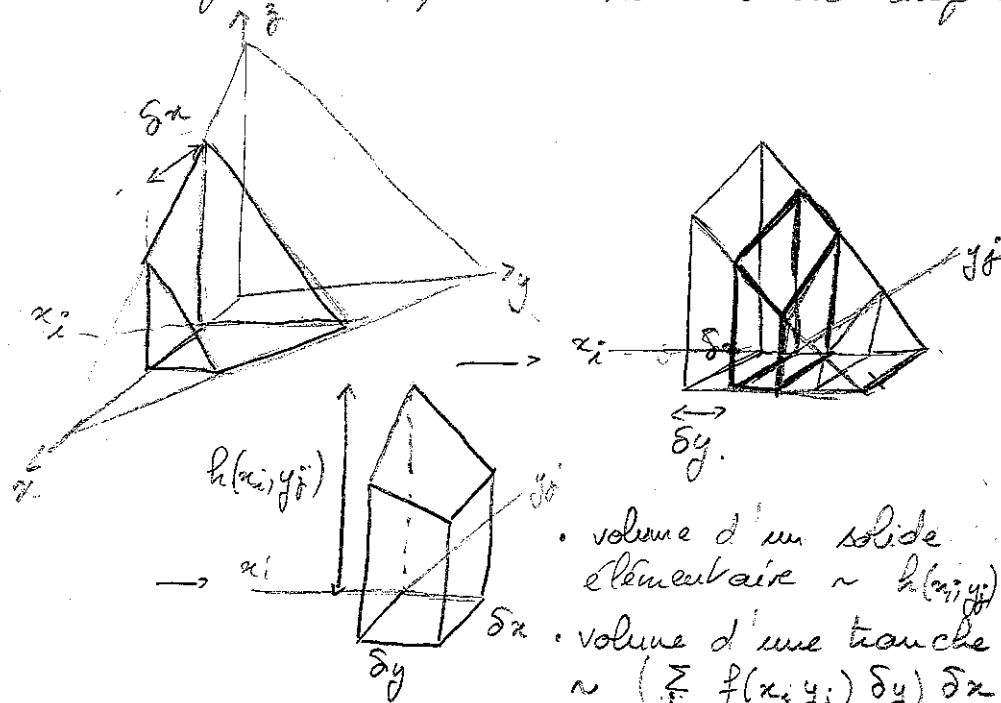
1. On a $2l^2 = c^2 \Rightarrow l = \frac{c}{\sqrt{2}}$

2. $(x, y) \in T \Leftrightarrow 0 \leq x \leq l$
 $0 \leq y \leq l - x$



$$z = h - \frac{h}{l}x - \frac{h}{l}y$$

4. On découpe la pyramide en tranches de largeur δx , puis en tranches de largeur δy .



• volume d'un solide élémentaire $\sim h(x_i, y_i) \cdot \delta x \delta y$
 • volume d'une tranche $\sim \left(\sum_i f(x_i, y_i) \delta y \right) \delta x$

Quand $j \rightarrow +\infty$, $\sum_j h(x_i, y_j) \delta y \rightarrow \int_0^{l-x} h(x_i, y) dy$ (surface de la base).

Volume de la pyramide $\sim \sum_i \left(\int_0^{l-x_i} h(x_i, y) dy \right) \delta x$

Quand $i \rightarrow +\infty$, $\sum_i \left(\int_{y=0}^{l-x_i} h(x_i, y) dy \right) \delta x$

tend vers $\int_{x=0}^l \left(\int_{y=0}^{l-x} h(x, y) dy \right) dx$

5.

$$\int_0^l \int_0^{l-x} \left(h - \frac{h}{l} x - \frac{h}{l} y \right) dy dx = \int_0^l \left[\left(h - \frac{h}{l} x \right) y - \frac{h}{l} \frac{y^2}{2} \right]_0^{l-x} dx$$

$$= \int_0^l \left(\left(h - \frac{h}{l} x \right) (l-x) - \frac{h}{l} \frac{(l-x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^l \frac{1}{2} \frac{h}{l} (l-x)^2 dx = \frac{h}{2l} \left[-\frac{(l-x)^3}{3} \right]_0^l$$

$$= \frac{h}{2l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{h l^2}{6} = \frac{h}{6} \left(\frac{c}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{h c^2}{12}$$

6. La pyramide a un volume de $4 \frac{h c^2}{12}$

$= \frac{h c^2}{3}$. (On retrouve la formule du volume d'un cône : $\frac{1}{3} S \times h$, avec S la