

# Outils mathématiques pour les sciences

CM 4

MATH203

6 CM + 6 TD + 3 TP

Maria Kazakova (LAMA)

Bât. 21, bur. 21



Ce support est en construction, pour toutes remarques [maria.kazakova@univ-smb.fr](mailto:maria.kazakova@univ-smb.fr)

# Encore quelques exemples...

Primitives et calcul d'intégrales

IPP

Changement de variable

# Chapitre 2. Intégration (suite) Applications

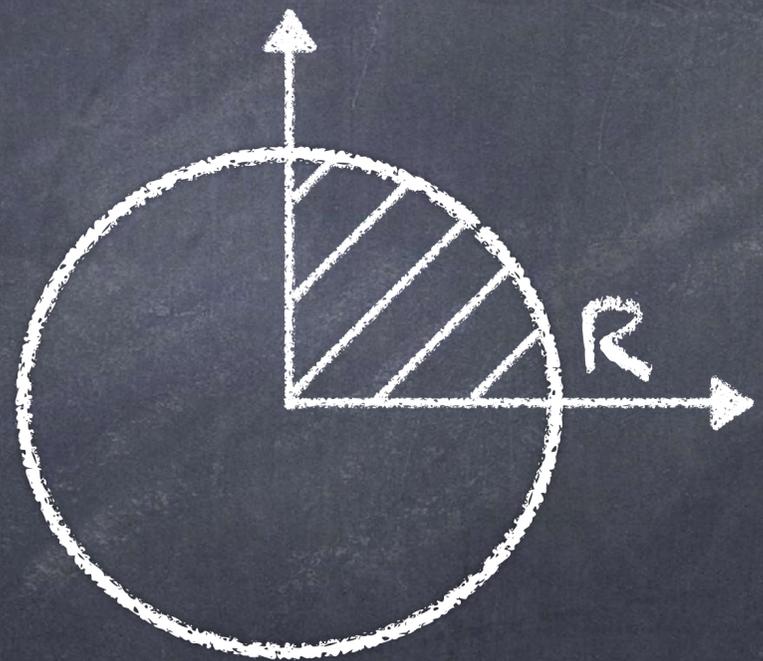
# Volumes, longueurs, surfaces

Les intégrales simples sont utilisées pour des calculs de longueurs, de surfaces (non nécessairement planes) et de volumes.

Exemple. Surface du disque

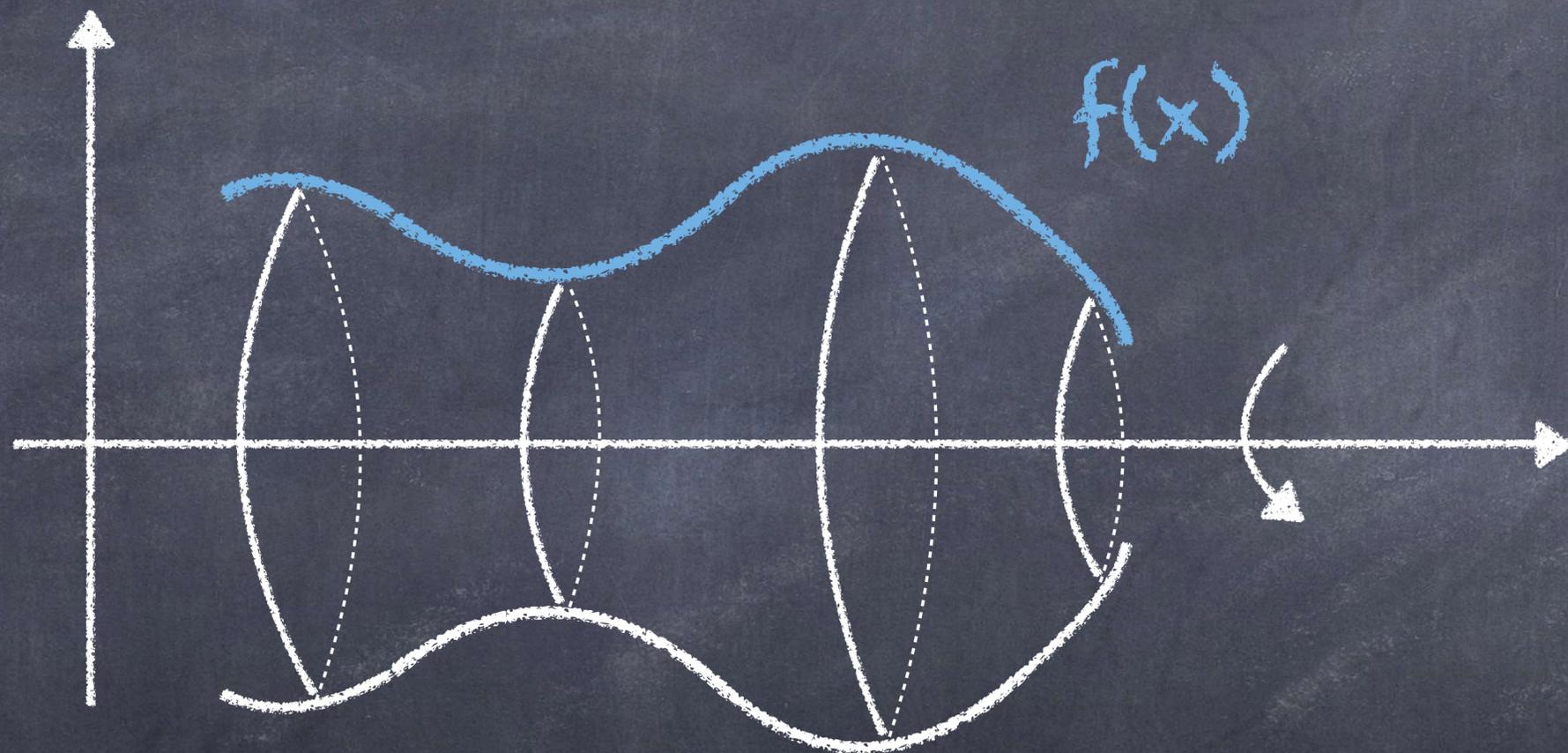
- avec changement de variable
- avec un découpage en  $\theta$

[Au tableau]

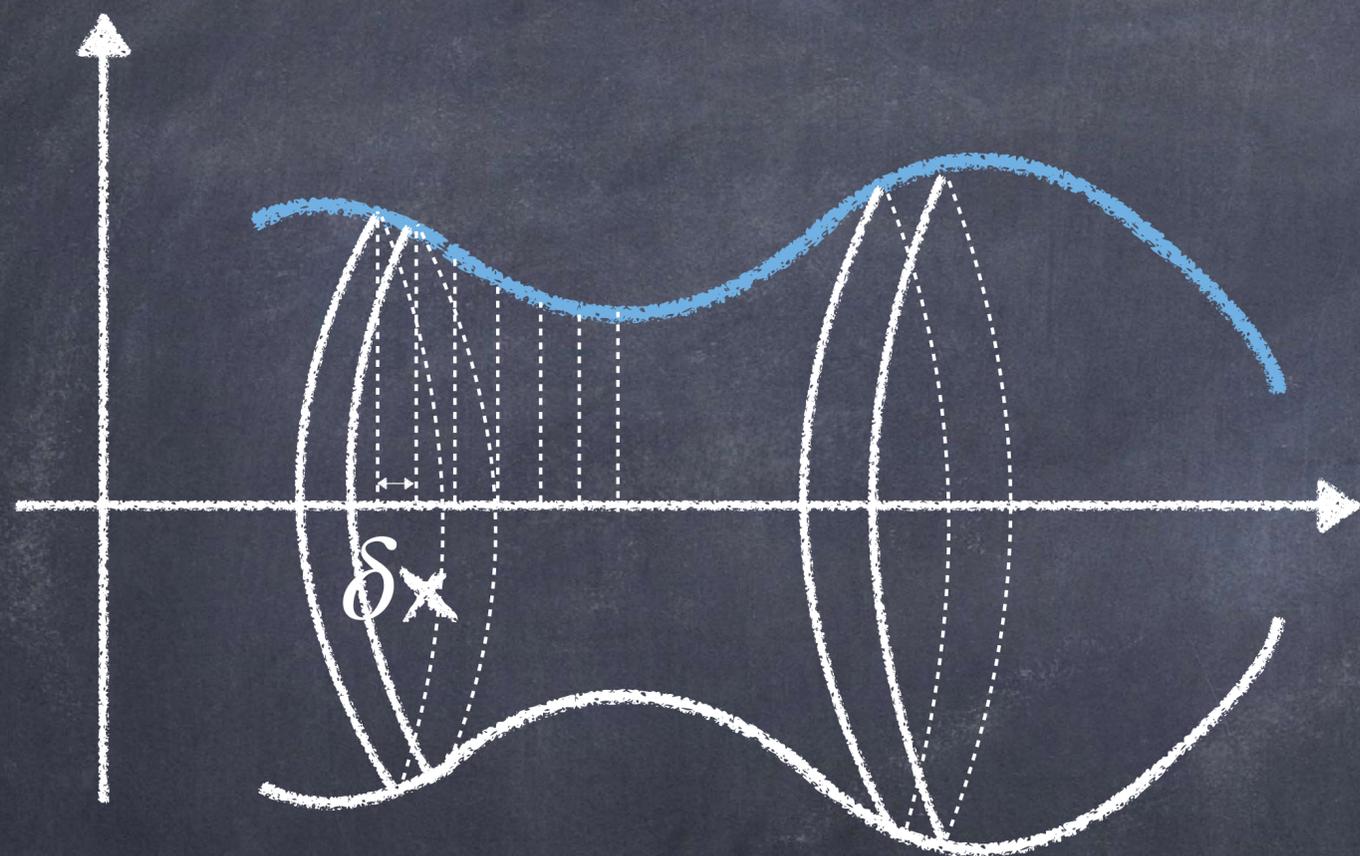


# Volumes de solides de révolution

De révolution : engendré par rotation autour d'un axe.



# Découpage en cylindres et approximation du volume



$$V_i = \delta x \pi (f(x_i))^2$$

# Approximation du volume total

$$V \sim \sum_{i=0}^{n-1} \pi (f(x_i))^2 \delta x$$

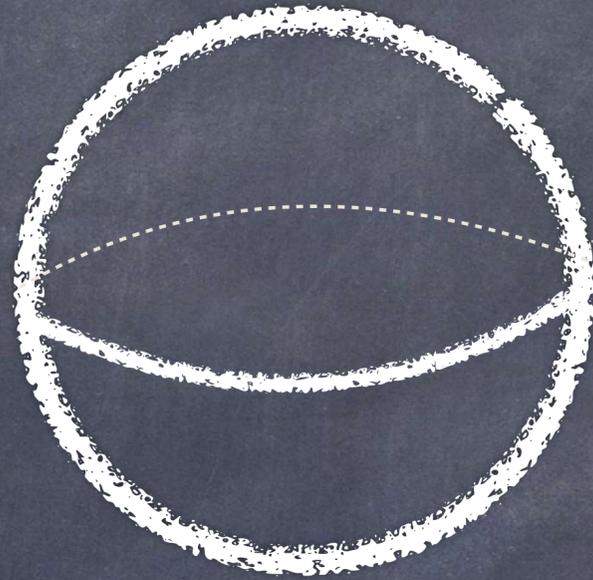
Alors, quand  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi (f(x_i))^2 \delta x = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

# Exemples [Au tableau]

Volume de la sphère



$$\frac{4}{3} \pi R^3$$

Volume du tore

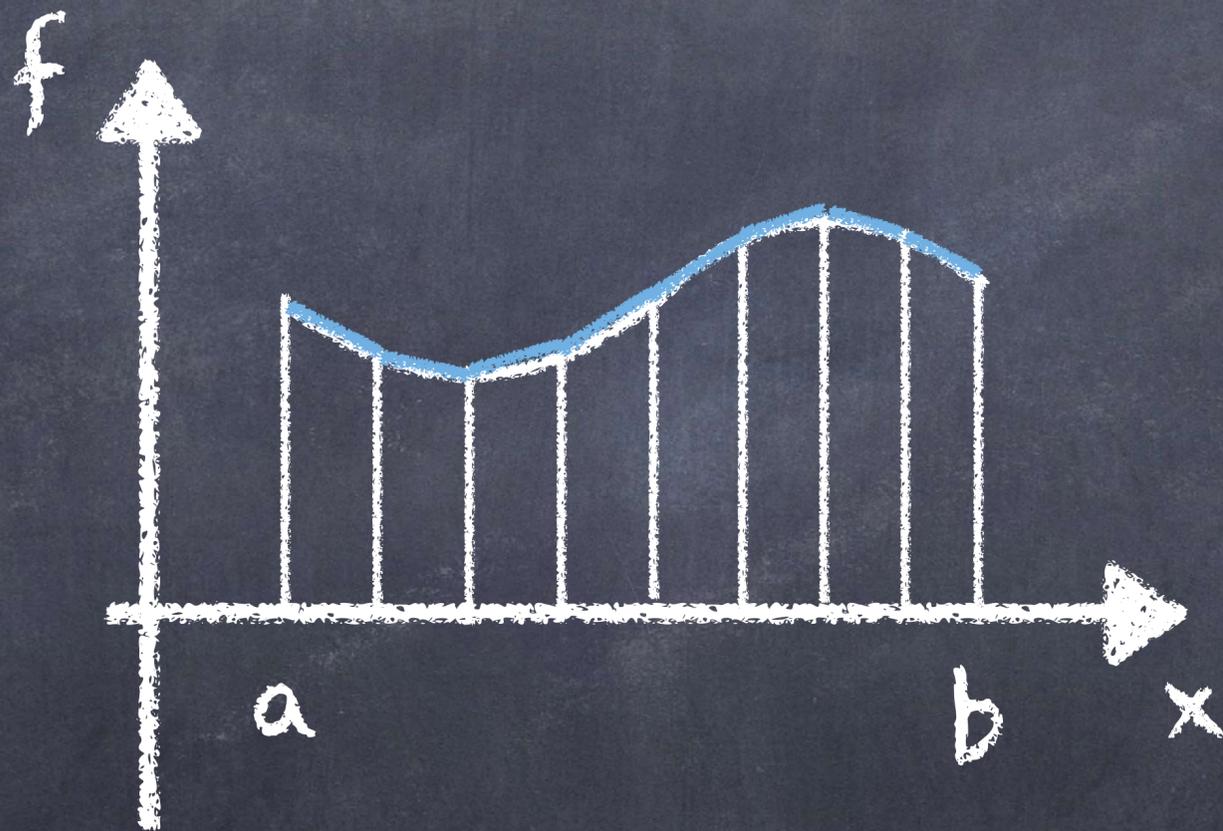


$$2\pi^2 R r^2$$

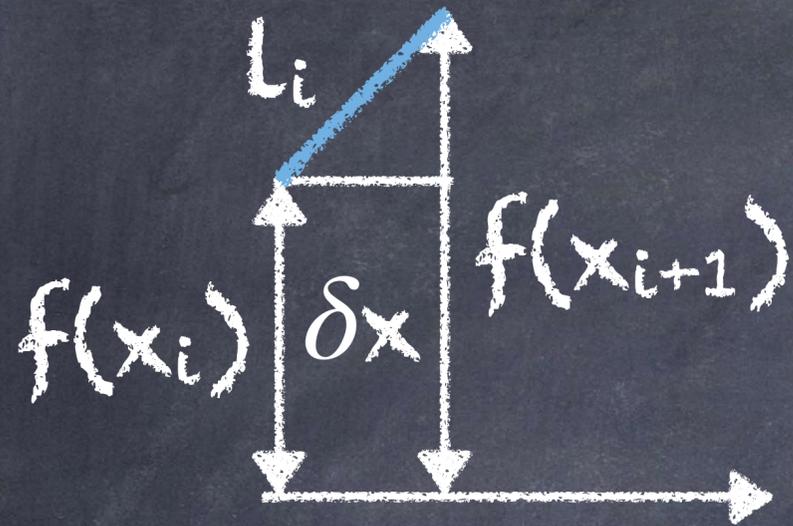
# Longueur d'une courbe

On va calculer la longueur du graphe de la fonction

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$



# Découpage et approximation par les cordes



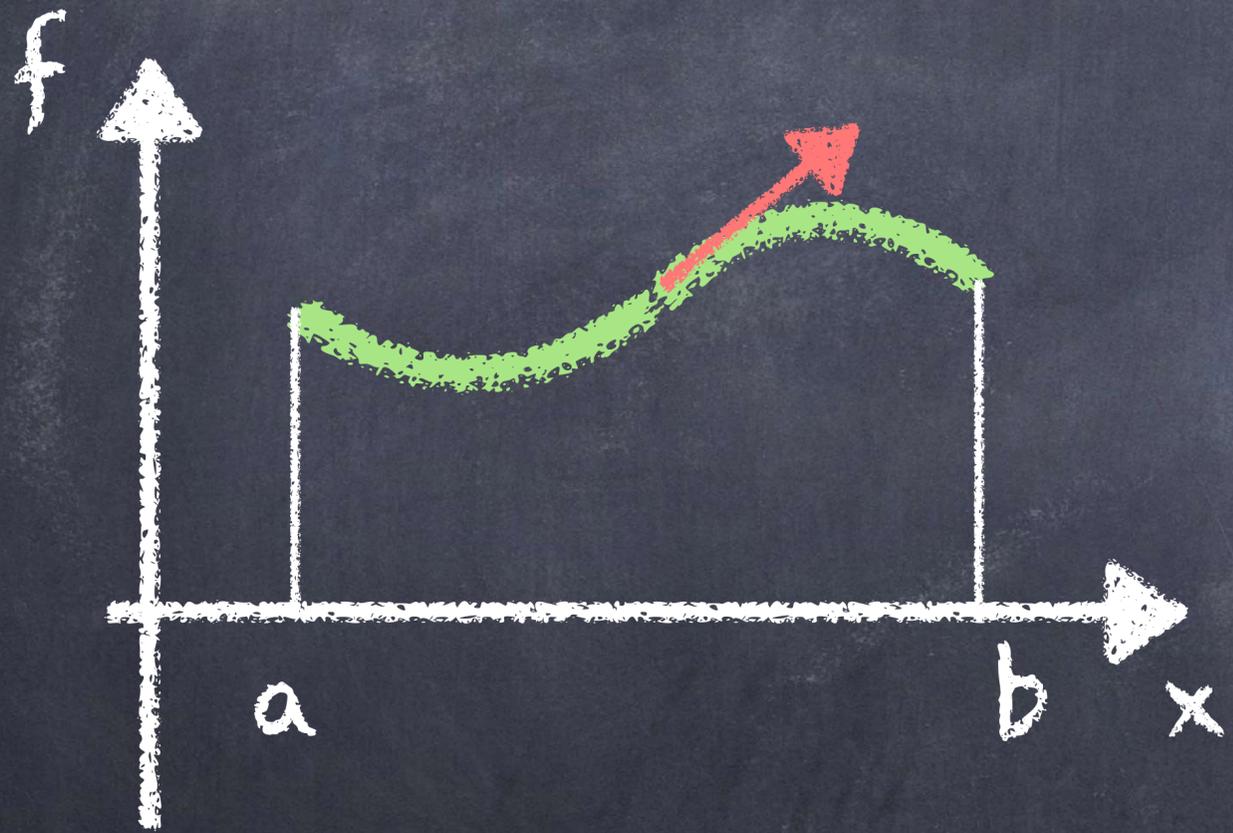
$$L_i = \sqrt{\delta x^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

$$L \sim \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\delta x^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

$$L \sim \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \underbrace{\left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x} \right)^2}_{= f'(y_i)}} \quad \begin{matrix} \delta x \longrightarrow \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

# Longueur d'une courbe

La longueur de la courbe formée par le graphe de  $f$  entre les points d'abscisse  $a$  et  $b$  est :



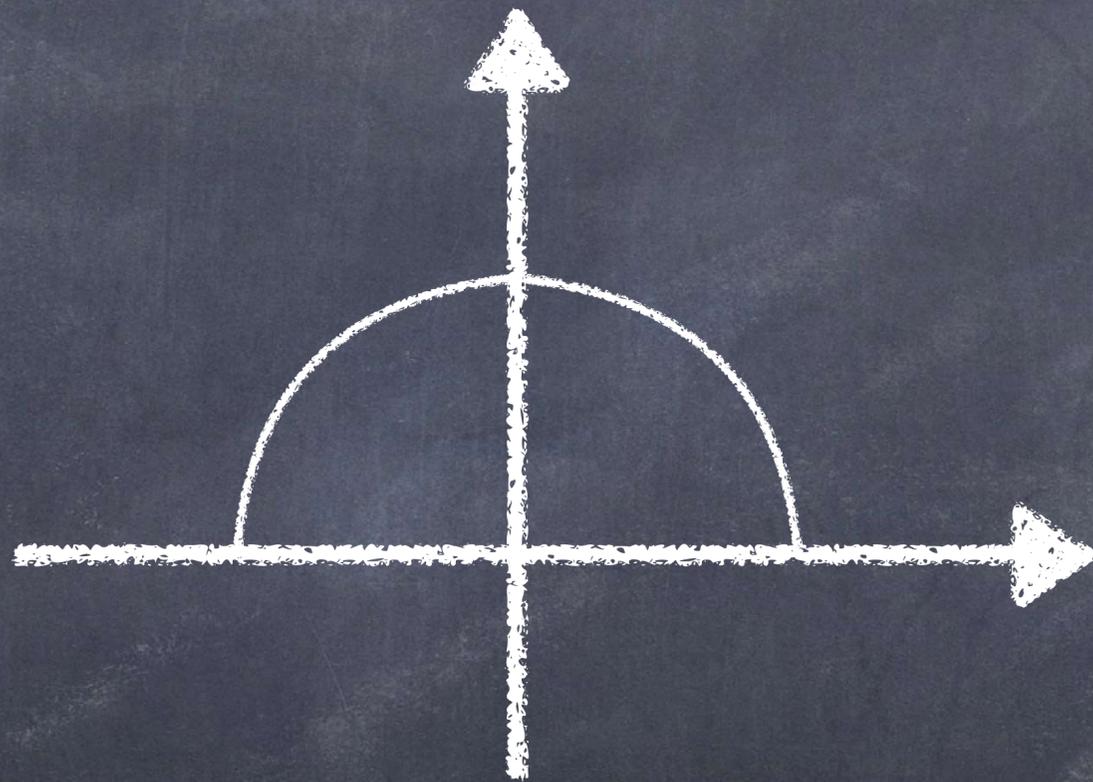
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Longueur de vecteur vitesse

$$\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Exemple : périmètre du cercle

[Au tableau]



$$2\pi R$$

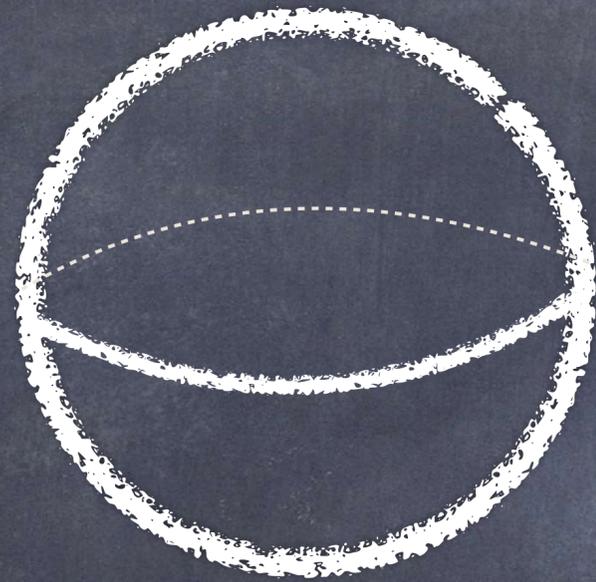
# Aire extérieure d'un solide de révolution

La surface extérieure du solide de révolution obtenu par rotation du graphe de  $f$  autour de l'axe des  $x$ , et délimité par les plans verticaux  $x = a$  et  $x = b$  est :

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

[Au tableau]

Exemple : surface de la sphère.



$$4\pi R^2$$