Université Savoie Mont Blanc **Année 2023-2024**
L1 MPC

MATH203 : Outils mathématiques pour les sciences 2

TP 2 : Intégration numérique et application.

Méthodes d'intégration numérique

Une intégrale
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
ne se calcule pas toujours de manière analytique (donc exacte) : on vous a surtout montré celles pour lesquelles c'est possible ! Dans le cas contraire, il existe de nombreuses méthodes numériques permettant d'en obtenir une *bonne* approximation. On présente ci-dessous quatre méthodes très simples à mettre en œuvre. Pour tester ces méthodes, on a choisi la fonction $x \mapsto 1/x$ de façon à pouvoir comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte.

On a représenté figure 1 le graphe de la fonction
$$f\,:\,x \mapsto \frac{1}{x} \text{ pour } x > 0$$
il s'agit de calculer
$$I = \int_1^2 f(x)\,dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\ .$$
On subdivise l'intervalle $[1, 2]$ en n sous-intervalles
$$[x_i, x_{i+1}], 0 \leq i \leq n-1, \text{ de même longueur } h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}.$$
On note donc
$$h = \frac{b-a}{n}$$
et pour $i = 0, \ldots, n$, $x_i = a + ih$.

À l'aide de la relation de Chasles, on se ramène à calculer une approximation de
$$I(i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$
qui correspond à l'aire coloriée ci-dessous.

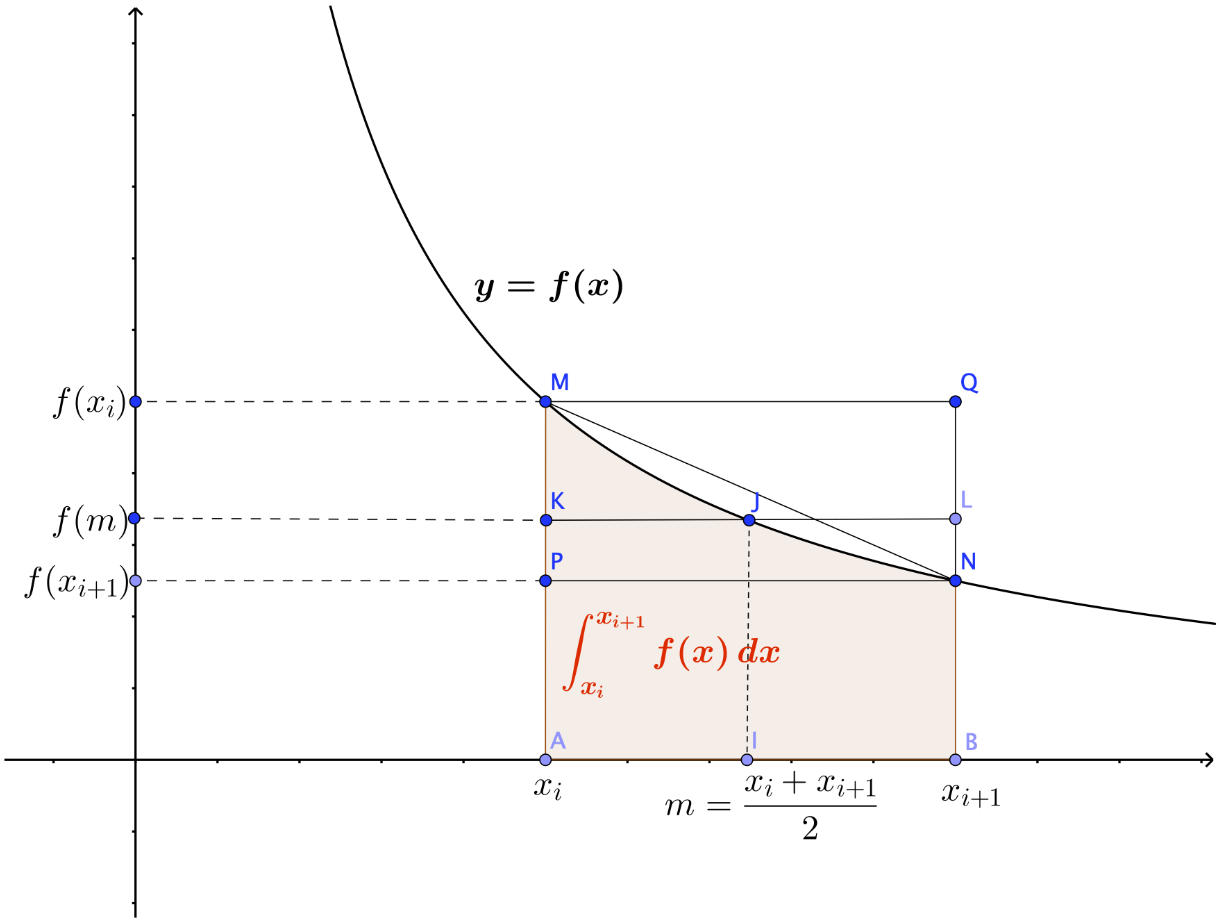

FIGURE 1 – *rectangles, point milieu et trapèze*

Ainsi :

— la méthode des *rectangles avec point à gauche* consiste à approcher $I(i)$ par l'aire $f(x_i)\,h$ du rectangle $ABQM$,

— la méthode des *rectangles avec point à droite* consiste à approcher $I(i)$ par l'aire $f(x_{i+1})\,h$ du rectangle $ABNP$,

— la méthode du *point milieu* consiste à approcher $I(i)$ par l'aire $f(m)\,h$ du rectangle $ABLK$, où on a posé $m = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$,

— la méthode des *trapèzes* consiste à approcher $I(i)$ par l'aire $\dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\,h$ du trapèze $ABNM$, on remarque immédiatement qu'elle revient à prendre la moyenne arithmétique des valeurs correspondant aux méthodes des rectangles avec point à gauche et point à droite.

On a alors

$$I \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{I}(i)$$

où $\tilde{I}(i)$ désigne l'approximation de $I(i)$ choisie. Ainsi on aura les différentes formules :

– Rectangle avec point à gauche :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh)$$

– Rectangle avec point à droite :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{k=1}^{n} f(a+kh)$$

– Point milieu :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{k=0}^{n-1} f(a+(k+1/2)h)$$

– Trapèze :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + h\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Par exemple, la méthode des rectangles avec point à gauche s'écrit :

$$I \simeq h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \qquad \text{(rectangle avec point à gauche)}$$

et voici le code Python pour cette première méthode :

```
################################################
# Methodes des rectangles avec point a gauche
################################################
# f : fonction a integrer
# a : extremite gauche
# b : extremite droite
# n entier >= 1 : nombre de sous-intervalles
def I_rect_gauche(f,a,b,n):
        h = (b-a)/n # pas de la subdivision reguliere
        # Formule du rectangle : point a gauche
        X = np.linspace(a,b-h,n)
        return h*np.sum(f(X))
```