

Feuille D'EXERCICE 2 : Intégration

1 Des intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(-2x) dx$
2. $\int_{-1}^1 (1+x^3)^4 x^2 dx$
3. $\int_{-1}^1 x e^{2x} dx$
4. $\int_0^1 \frac{e^x}{2+e^x} dx$. (On pourra faire le changement de variable $u = e^x$)

2 Intégration par partie

Calculer les intégrales suivantes avec la méthode d'intégration par parties

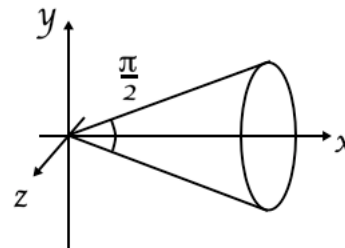
1. $\int_0^1 x e^x dx$
2. $\int_0^1 x^2 e^x dx$
3. $\int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$
4. $\int \ln(x) dx$
5. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$

3 Changement de variable

Utiliser le changement de variable indiqué pour calculer les intégrals :

1. $\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} dx$ ($t = e^x$)
2. $\int_1^2 t^3 e^{-t^2} dt$ ($v = t^2$)
3. $\int \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$ ($x = \sqrt{t}$)
4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{1+\cos(x)} dx$ ($u = \cos(x)$)

On cherche à calculer le volume du cône C représenté sur le dessin suivant, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de longueur 2.



1. Le cône C est le solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des x du graphe d'une fonction f . Quelle est cette fonction ?
2. Calculer le volume du cône C .

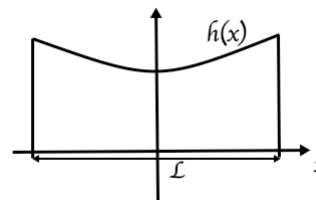
5 Longueur du fil

La hauteur d'un fil tendu entre deux points varie comme un cosinus hyperbolique : au-dessus du point d'abscisse x cette hauteur est donnée par

$$h(x) = \alpha \cosh(\beta x)$$

où α et β sont deux constantes (dépendant de la tension et du poids du fil), et

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



1. Rappeler (ou retrouver) les formules trigonométriques hyperboliques : $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \dots$, $\cosh'(x) = \dots$, $\sinh'(x) = \dots$
2. On suppose que $\alpha \times \beta = 1$. Quelle est la longueur d'un fil tendu entre deux poteaux espacés d'une distance L ?

6 Surface d'un entonnoir

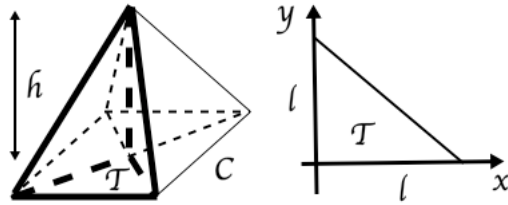
1. Dessiner le solide obtenu par révolution autour de l'axe des x du graphe de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \frac{x^3}{3}.$$

2. Calculer la surface extérieure de ce solide.

7 Volume de la pyramide de Khéops

La pyramide de Khéops est une pyramide à base carrée, de hauteur $h = 137m$ et de côté $c = 230m$.



1. En suivant les diagonales de la base, on découpe la pyramide en 4 tétraèdres dont la base est un triangle rectangle isocèle T . Donner la longueur ℓ du côté de ce triangle.
2. Montrer que les points de T peuvent être décrits par un système d'inégalité de la forme $a \leq x \leq b, c \leq y \leq f(x)$ où a, b, c sont des constantes et f est une fonction que l'on précisera.
3. Exprimer la hauteur de la pyramide au-dessus d'un point de T en fonction des coordonnées (x, y) du point.
4. Justifier par un découpage que le volume V du quart de pyramide soit donné par le calcul suivant :

$$V = \int_0^\ell \left(\int_0^{\ell-x} h - \frac{h}{\ell}x - \frac{h}{\ell}y dy \right) dx$$

5. Calculer l'intégrale.
6. En déduire le volume de la pyramide de Khéops.

Primitives des fonctions usuelle

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I :

$f(x)$	Une primitive de f sur I
$u'(x) \times (u(x))^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\frac{1}{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$u'(x) \times \cos(u(x))$	$\sin(u(x))$
$u'(x) \times \sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$
$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = u'(x) \times (1 + \tan^2(u(x)))$	$\tan(u(x))$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\arcsin(u(x))$
$\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\arctan(u(x))$