Outils mathématiques pour les sciences

CM 3

MATH203

6 CM + 6 TD + 3 TP

Maria Kazakova (LAMA)
Bât. 21, bur. 21

Ce support est en construction, pour toutes remarques maria.kazakova@univ-smb.fr

Chapitre 2. Intégration

Problèmes des quadratures :

Etant donné une courbe, déterminer l'aire qu'elle enserre.

- Il s'avère que cette question est liée à l'autre grande question du XVIIe siècle, la question des tangentes.
- Problème résolu pratiquement par Newton et Leibnitz (fin XVIIe), et rigoureusement par Riemann après l'introduction des limites (milieu XIXe).
- Toute autre "mesure" est en réalité une intégration : longueur des courbes, aires des surfaces, volumes, masses..

Autre application:

Dans le chapitre précédent on a vu que la méthode de variation de la constante abouti en

$$A'(t) = h(t)$$
$$B'(t) = g(t)$$

On doit donc définir A(t) et B(t) comme les primitives de h(t) et g(t)

Construction de l'intégrale : aire sous le graphe d'une fonction

Découpage en rectangle puis somme :

$$\mathscr{A} \sim \sum \mathscr{A}_i = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right) \delta x_i$$

$$\mathscr{A} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right) \delta x_i$$

L'approximation disparaît quand $n \to \infty$

Exemple [Au tableau]

$$\int_0^1 x \, dx$$

à gauche

à droite

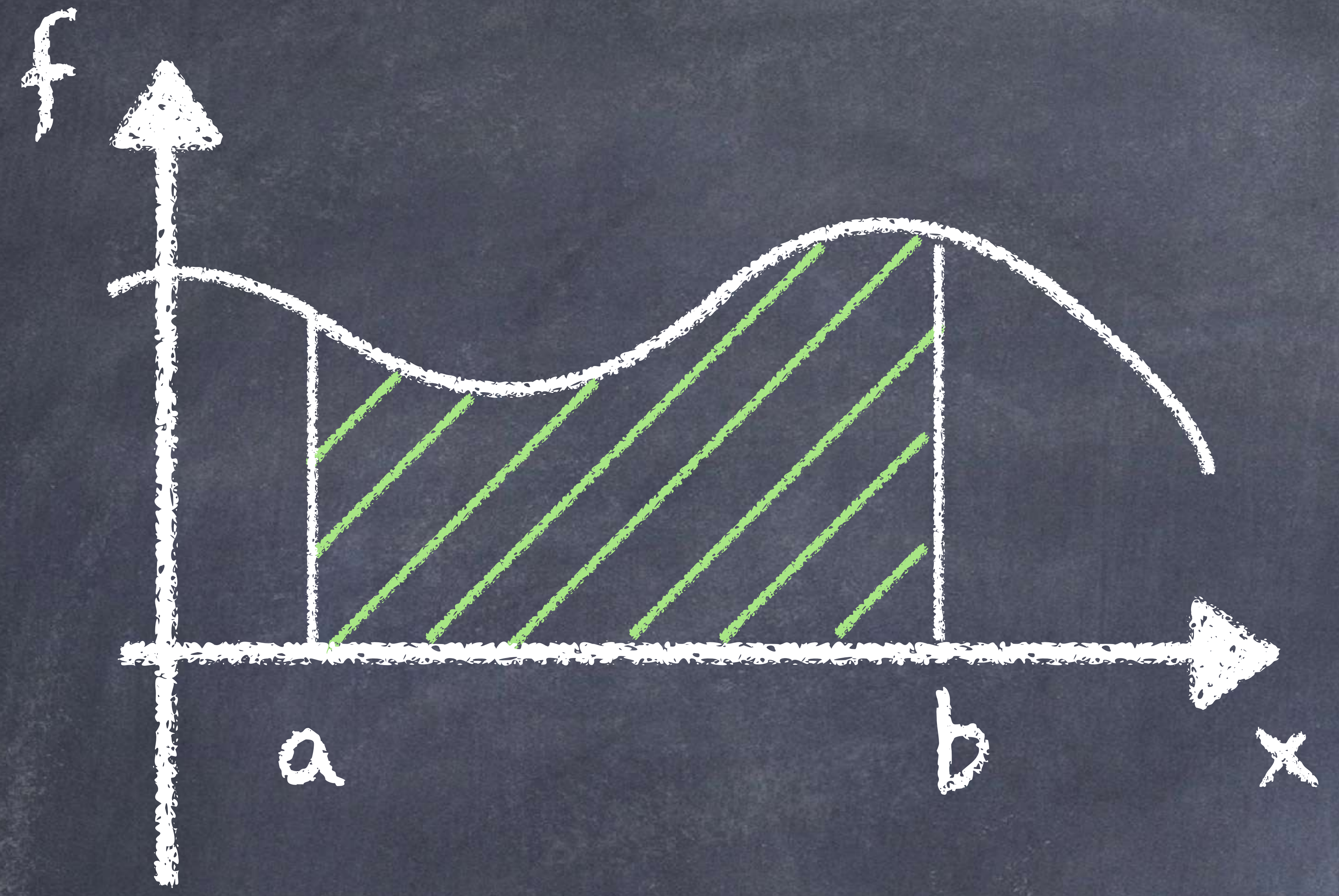
Proposition 1

Si f est continue sur [a, b], la limite de

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathscr{A}_i$$

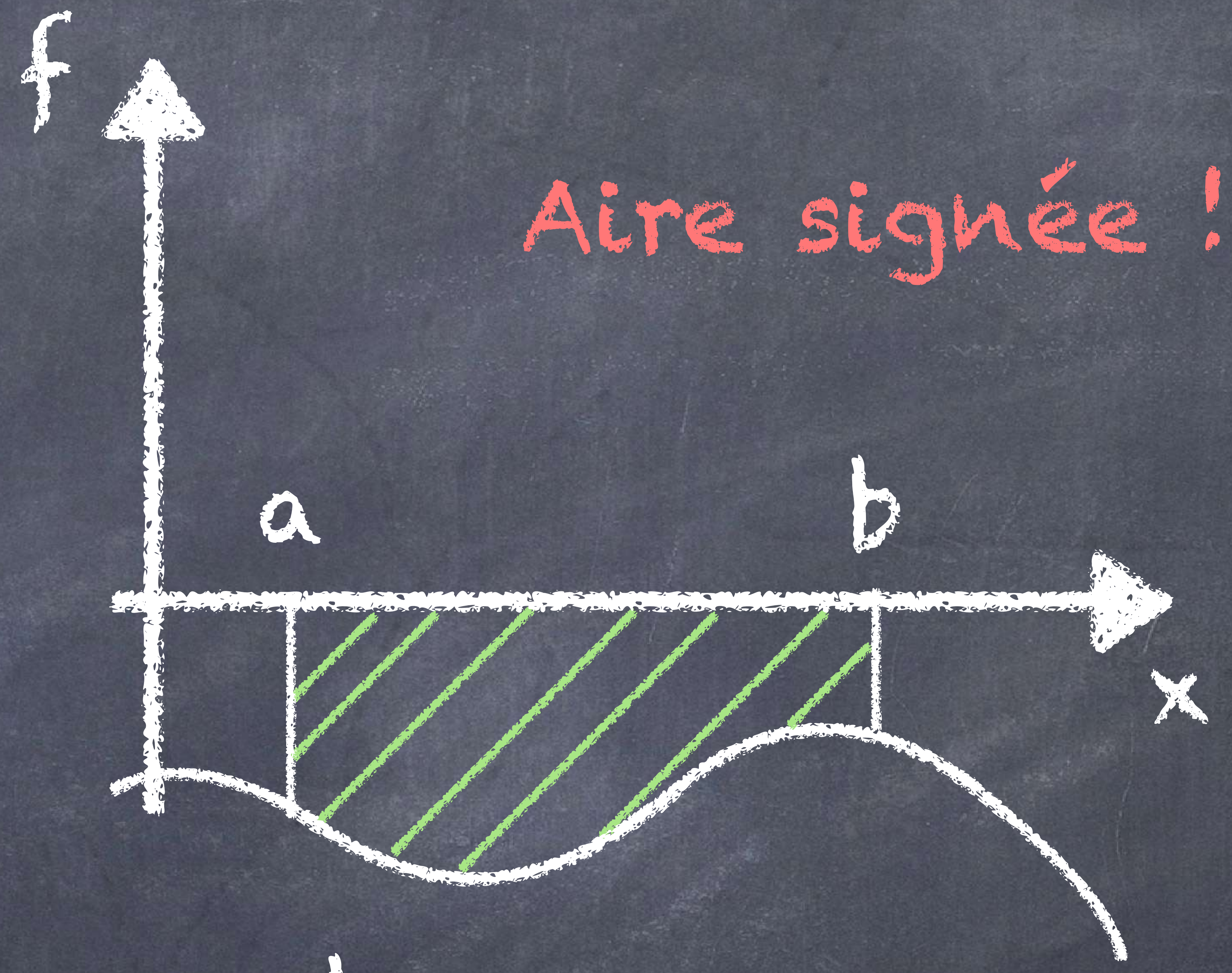
existe, est appelée **intégrale** de f sur [a, b], et notée

$$\int_a^b f(x)\, dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

Aire signée !



$$\int_a^b f(x)\,dx < 0$$

Vers le théorème fondamental de l'analyse

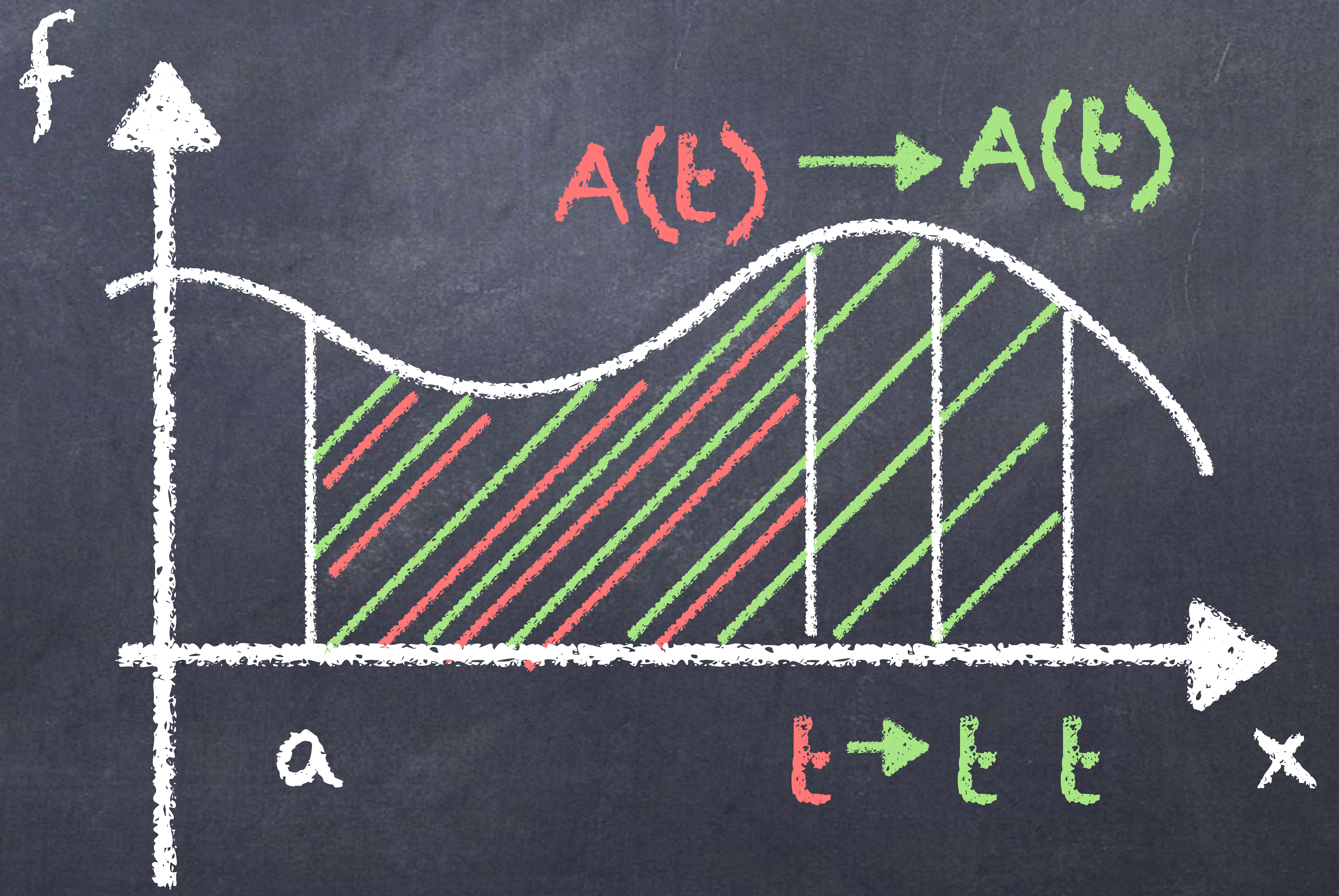
Notons fonction aire $A(t)$:

$A(t)$ = aire délimitée par le graphe,

l'axe des abscisses et les verticales $x = a$ et $x = t$

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

$$A(a) = 0$$



Proposition 2

La dérivée de la fonction aire au point t est f(t)

$$A'(t) = f(t)$$

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h} \sim f(t)$$

$$A'(t) = f(t)$$

A est (fonction) primitive de f

En général, on appelle F primitive de la fonction f, si

$$F'(t) = f(t)$$

Si la fonction $t \mapsto F(t)$ est une primitive, alors $t \mapsto F(t)+C$ est aussi une primitive, pour toute constante C.

Deux primitives de f différent par une constante.

Théorème 1 (fondamental de l'analyse)

Si f est continue sur [a, b], et F est primitive de f sur [a, b], alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Si G est une autre primitive, alors il existe une constante C

t.q. $G(t) = F(t) + C$. Donc la valeur de l'intégrale ne change pas !

Démonstration [Au tableau]

Remarque. Donc pour calculer une intégrale, il faut savoir calculer une primitive ! (si possible)

Notation

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ intégrale (valeur, nombre)

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$ primitive (fonction)

Propriété de l'intégrale

- Positivité: Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$

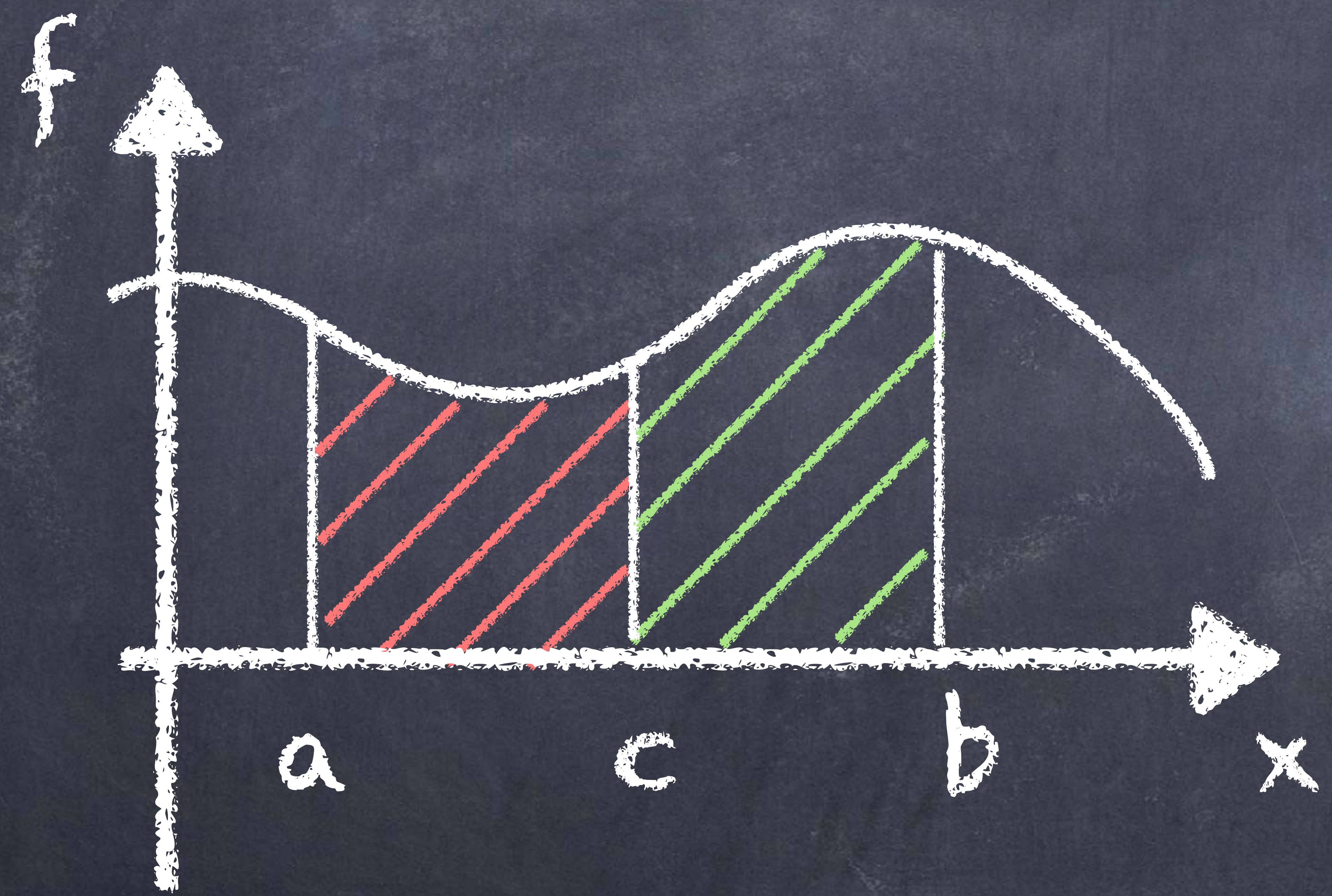
- Linéarité

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

- Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



dériver

$$f \rightleftarrows f'$$

définir une primitive

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$

f	f'
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$ku(x)$	$ku'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
$f(u(x))$	$f'(u(x))\, u'(x)$

Exemples [Au tableau]

Primitives / Intégrales

$$\int e^{2x}dx \qquad \int_0^1 e^{2x}dx$$

$$\int 10(x+1)^4\, dx \qquad \int_{-1}^1 10(x+1)^4\, dx$$

Autres exemples

$$\int x\, \sin(3x^2)dx$$

$$\int \frac{e^{\cos(\ln(x))}\, \sin(\ln(x))}{x}\, dx$$

Proposition 3 (Intégration par parties, IPP)

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Démonstration [Au tableau]

Exemple [Au tableau] $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$

Proposition 4 (Changement de variable)

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(z)dz$$

Démonstration [Au tableau]

Si φ est bijective (on peut définir φ^{-1}) et écrire

$$\boxed{\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_a^b f(x)dx}$$

Formellement: $x = \varphi(t)$

$$\varphi'(t)dt = dx$$

Et on n'oublie pas de changer les bornes !

Exemple [Au tableau]

Remarque. On peut également utiliser ces deux derniers résultats pour définir des primitives.

En effet, on a

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + \int f'(x)g(x)\,dx$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)dx$$

Remarque. Dans certaines situations il n'est pas possible d'écrire une primitive à l'aide d'une combinaison linéaire finie de produits ou compositions de fonctions élémentaires.

$$\mathrm{Ei}(x) = \int \frac{e^x}{x} dx \qquad S(x) = \int \sin x^2 dx \qquad \Phi(x) = \int e^{-x^2} dx$$

$$\mathrm{Si}(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx \qquad C(x) = \int \cos x^2 dx \qquad \mathrm{li}(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$$

$$\mathrm{Ci}(x) = \int \frac{\cos x}{x} dx$$

Exercice. (Pour aller plus loin)
Montrer que $\mathrm{Ei}(x) = \mathrm{li}(e^x) + C$