Outils mathématiques pour les sciences

MATH203

6 CM + 6 TD + 3 TP

Maria Kazakova (LAMA)
Bât. 21, bur. 21

Ce support est en construction, pour toutes remarques maria.kazakova@univ-smb.fr

INSCRIPTION – Cours moodle
Clé: MATH203-2024

Note
CT 80%
TP 20% (reporté en seconde session)

Les supports du cours sont disponibles sur moodle,
exemple et preuves sont faites au tableau (prendre des notes!)

Competences

Modéliser pour résoudre des problèmes pratiques

- Identifier un modèle mathématique lors de la mise en équation d'une expérience scientifique.
- Effectuer un calcul élémentaire à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique ou numérique.
- Interpréter les résultats obtenus afin de répondre à une problématique.

Communiquer avec pertinence à l'oral et à l'écrit

- Utiliser les outils de communication courants.
- Structurer/rédiger/présenter selon une méthodologie adaptée.

Programme:

* CM 1-2
Introduction
Équations différentielles du deuxième ordre. Méthode de résolution des équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants.

* CM 3-4
Calcul intégral. Méthodes de calcul intégral (changement de variable, intégration par parties).

* CM 5-6
Développements limités. Formule de Taylor-Young, développements limités de fonctions usuelles.

Biblio (voir moodle):

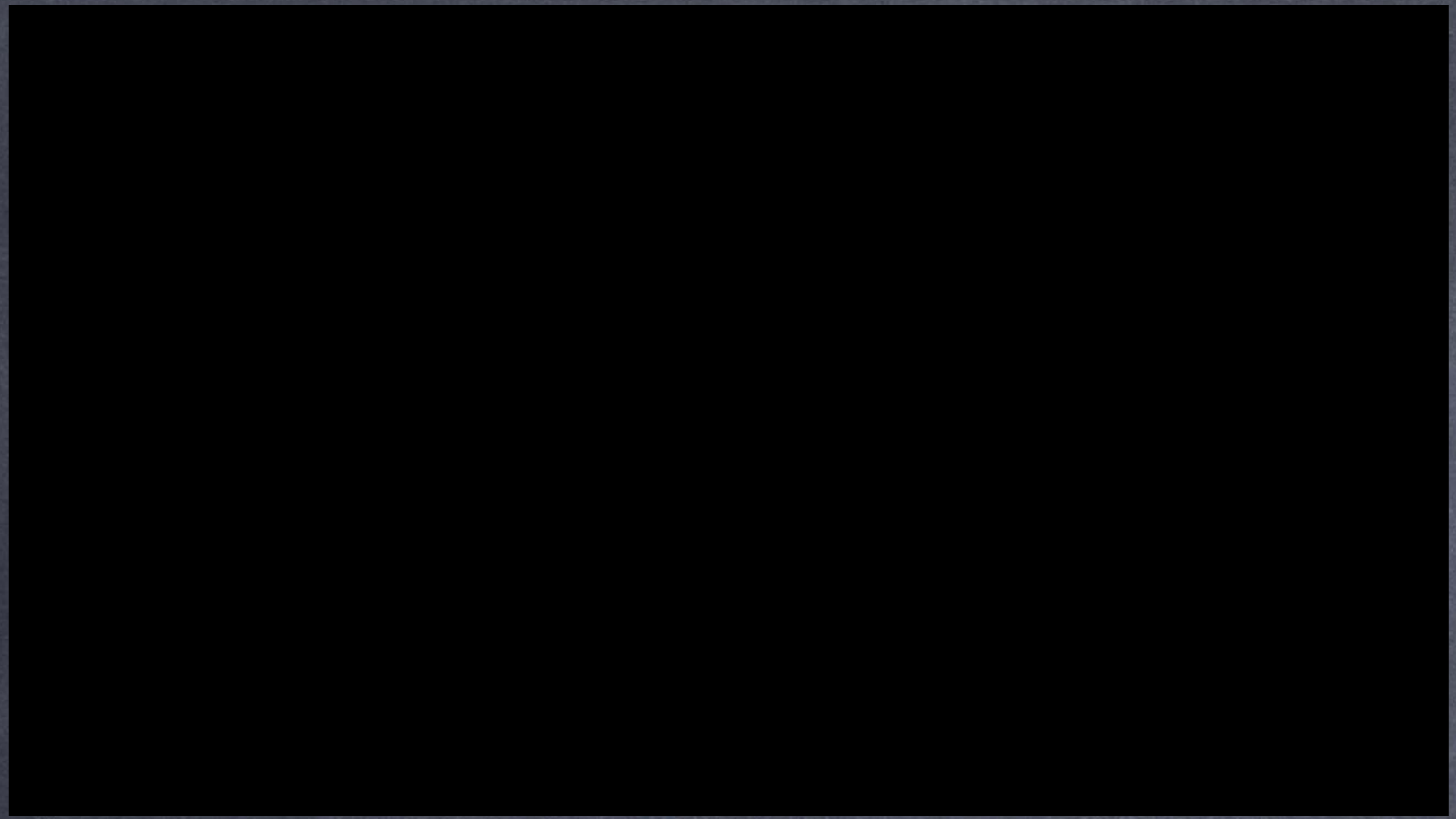
Recommendation des livres

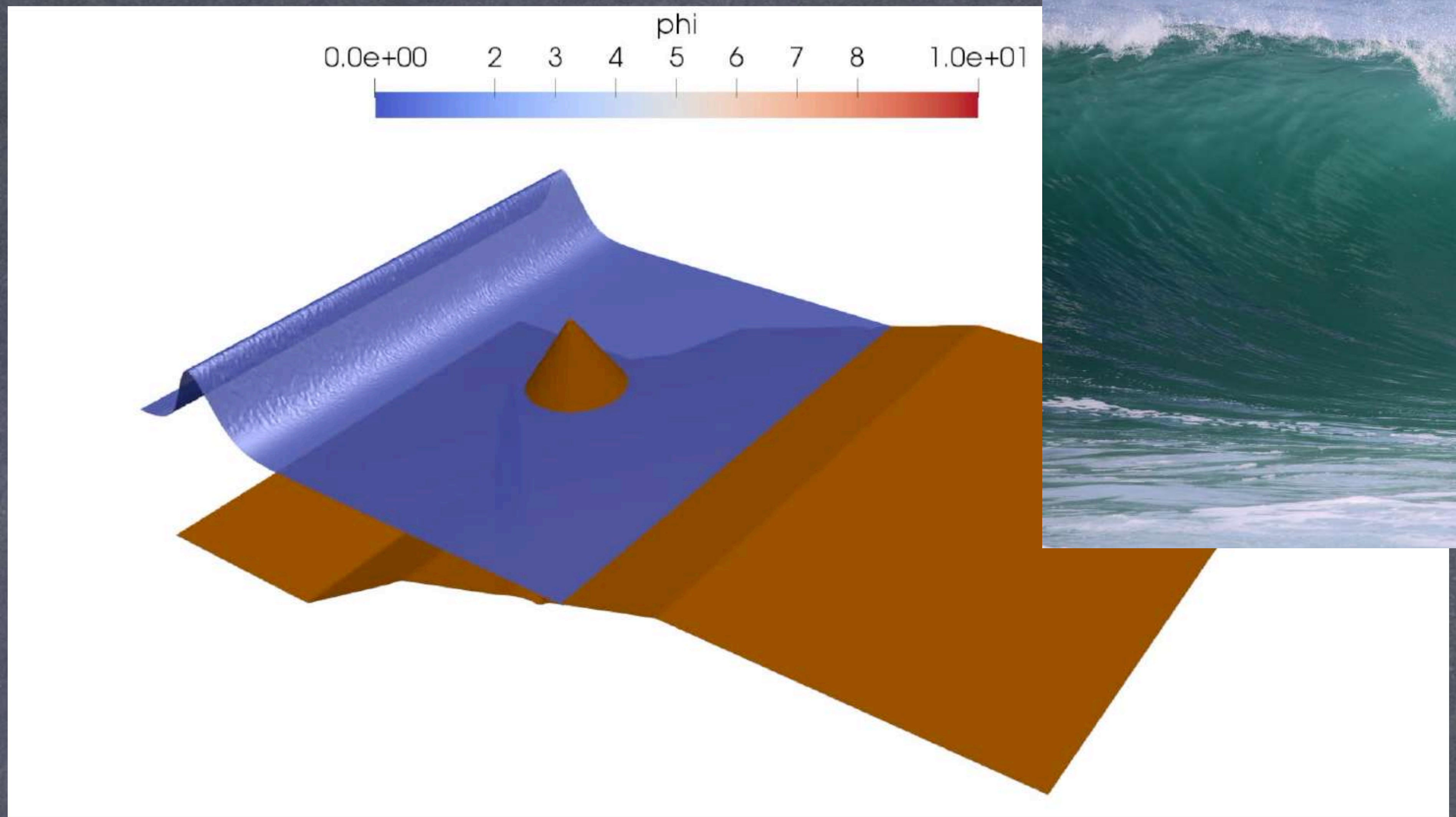
+ Supports des cours et documents

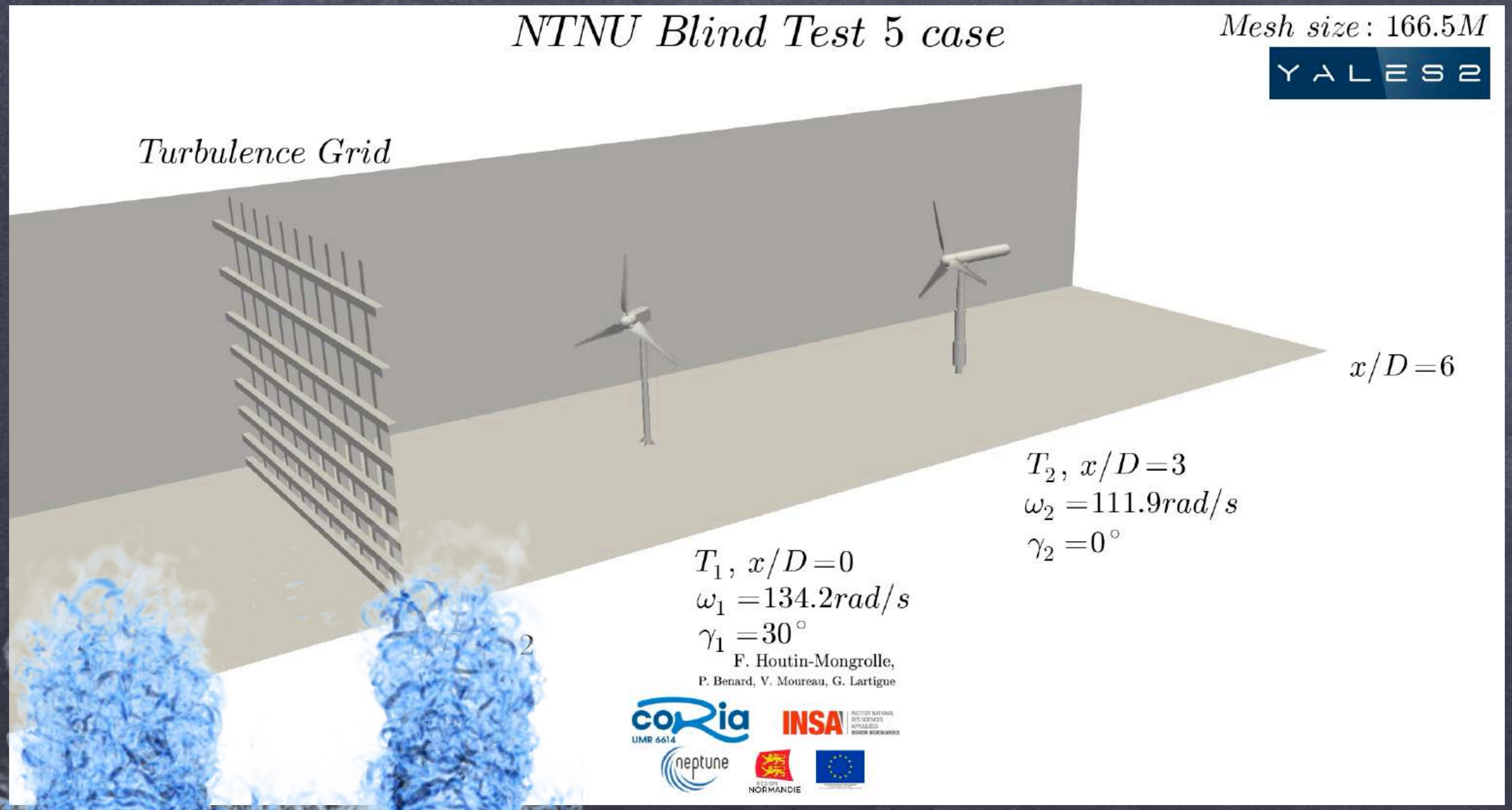
La Modélisation Mathématique:

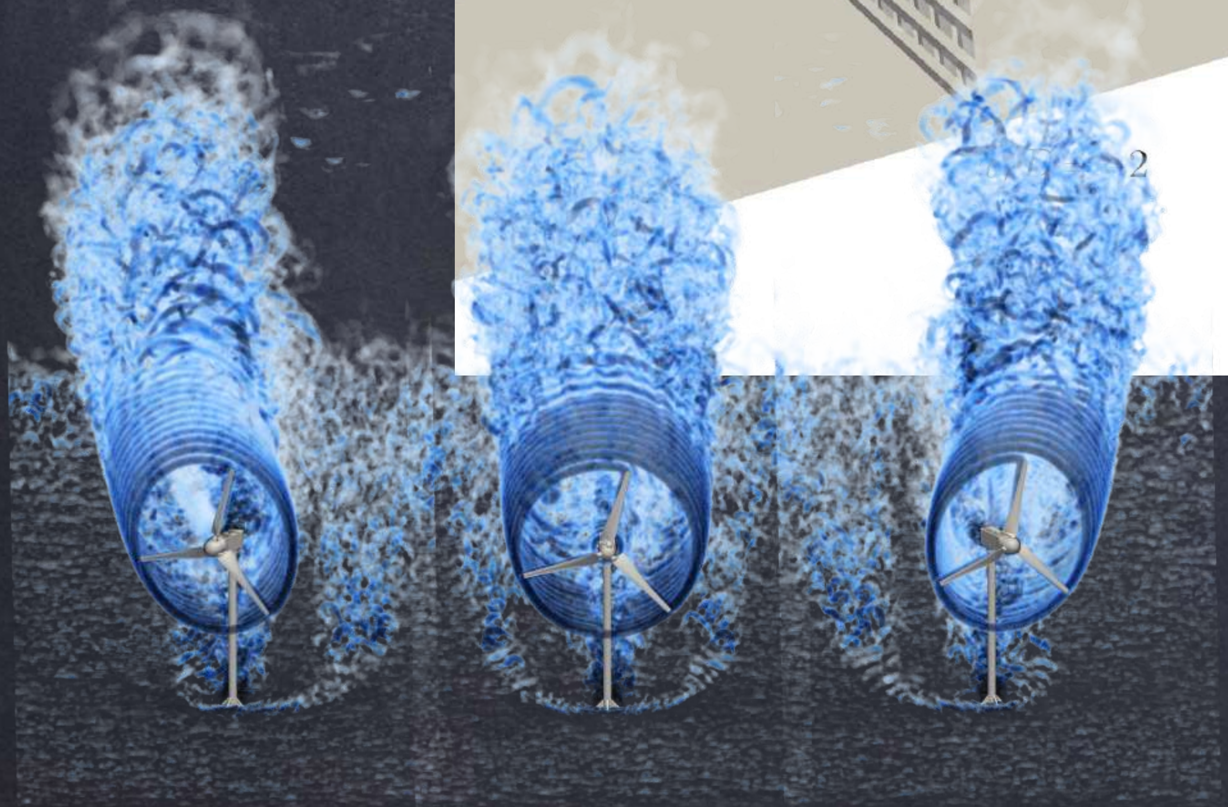
Problème concret (physique, biologie, chimie...)

Equations avec des dérivées, calculs des intégrales, etudes des fonctions









- Ecrire un modèle
- Construire un algorithme (Exacte ou Numérique)
- Analyser
- Estimer
- Controler

bjectifs d'apprentissage CM 1-2:

- Étudier les applications des équations différentielles du second ordre à la physique (exemple)

- Apprendre les méthodes de résolution des équations différentielles, linéaires, du second ordre, a coefficients constants:
  cas homogène et non-homogène

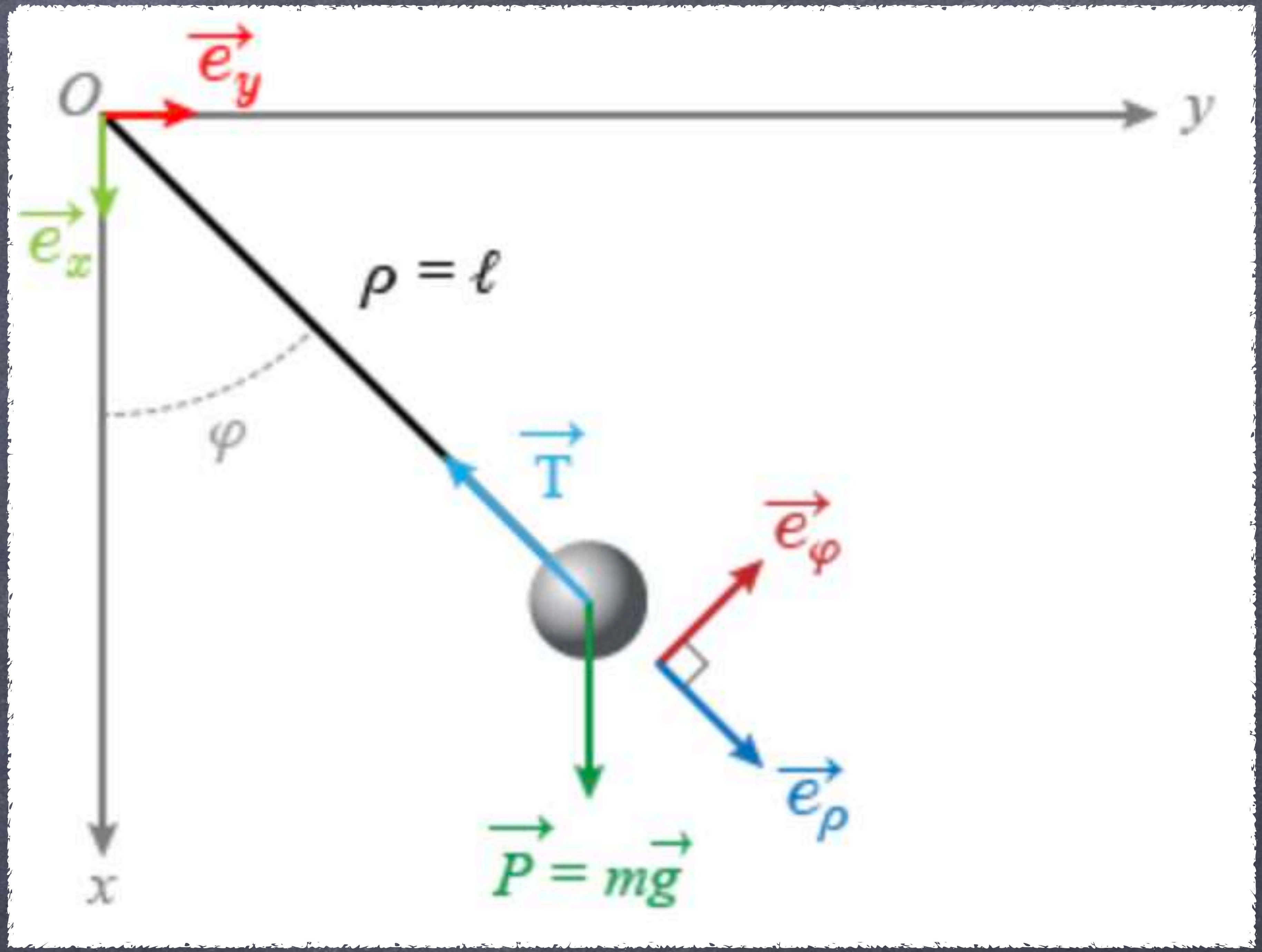
Modèle mathématiques de la physique: Pendule simple

Principe fondamental de la mécanique

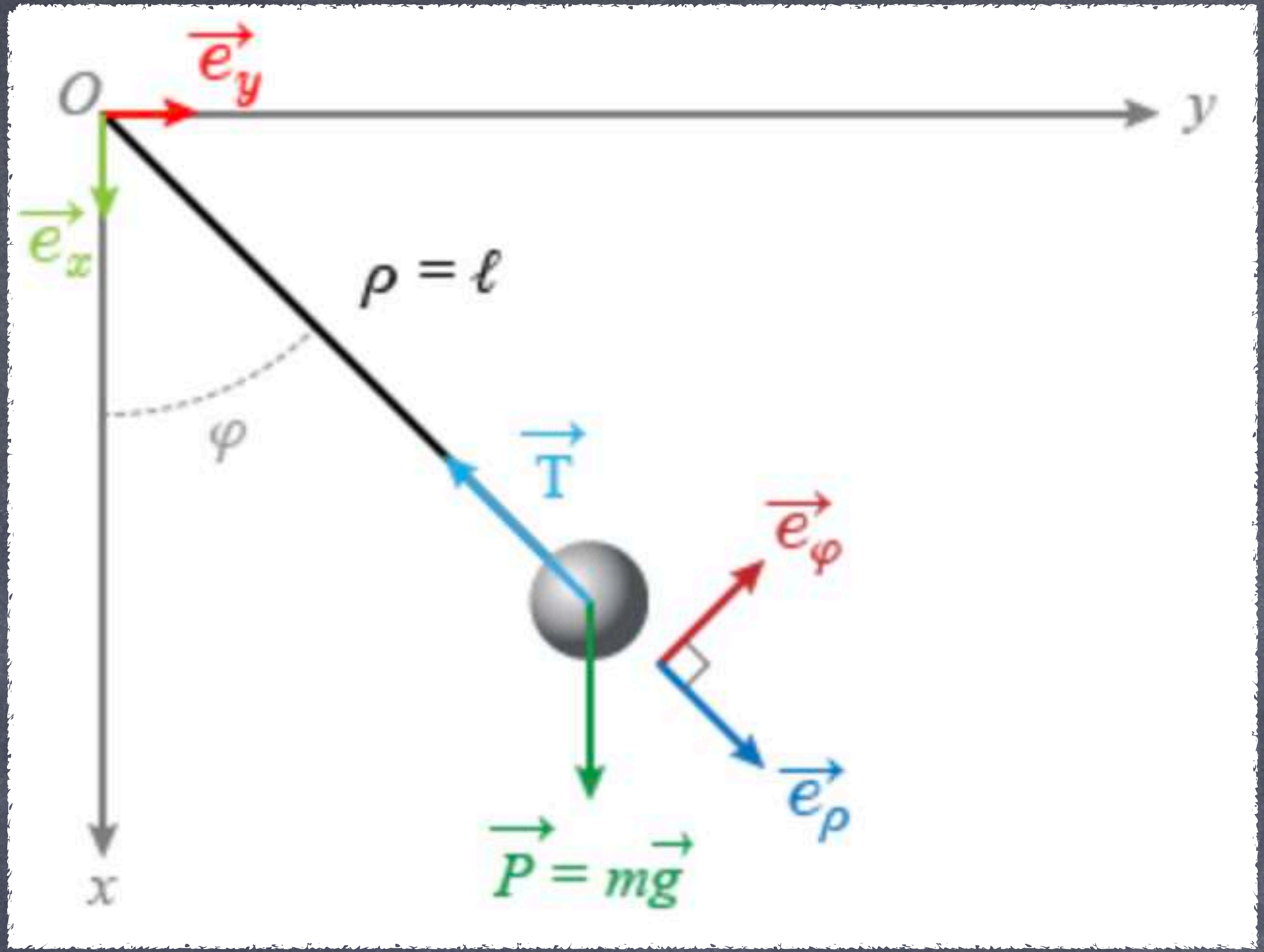
La somme des forces s'exerçant sur le pendule est égale au produit de sa masse par son accélération.

P : poids, vertical, vers le bas, de norme mg.

T : traction du l, parallèle au fil.



$$\overline{P} + \overline{T} = m\,\overline{a}$$



Position, vitesse et accélération du pendule en coordonnées, en fonction de $\varphi(t)$

$$a = (-l\cos(\varphi)(\varphi')^2 - l\sin(\varphi)\varphi'')\,\overline{e}_x +$$
$$(-l\sin(\varphi)(\varphi')^2 + l\cos(\varphi)\varphi'')\,\overline{e}_y$$

Projection orthogonalement à $\overline{T}$: produit scalaire avec

$$\overline{u} = -\sin(\varphi)\,\overline{e}_x + \cos(\varphi)\,\overline{e}_y$$

Équation différentielle du second ordre non-linéaire

$$\varphi''(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t)) = 0$$

Approximation des petits angles :

Si $\varphi(t)$ est petit , alors $\sin(\varphi) \sim \varphi$

En effet, $\lim_{\varphi \to 0} \dfrac{\sin(\varphi)}{\varphi} = 1$

En utilisant cette approximation, on obtient l'équation approchée

$$\varphi''(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t)) = 0$$

$\sin(\varphi(t)) \sim \varphi(t)$

$\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$

$$\boxed{\varphi''(t) + \omega^2\varphi(t) = 0}$$

On a obtenu une <u>équation différentielle</u>

- du second ordre
- linéaire
- homogène (sans second membre)
- à coefficients constants

Recherche des solutions au (vrai) tableau

Chapitre 1
Résolution des equations différentielles d'ordre deux

Définition. On appelle une équation différentielles ordinaires (EDO) une relation

$$F\left(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y''(t), y'(t), y(t)\right) = f(t)$$

$y = y(t)$ une fonction inconnue (à déterminer)
F une fonction connue
n ordre de l'équation
f seconde membre ($f=0$ homogène, $f\neq 0$ non-homogène)

Dans ce cours les équations qu'on va étudier sont des cas particuliers (simples) de cette definition, mais elles décrivent la réalité physique pour certaines approximations!

Équations différentielles linéaires (F est une fonction linéaire) du second ordre (n=2) à coefficients constants (a,b,c = const, a≠0)

$$(E) : a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = f(t)$$

On peut encore simplifier (E)

- primitive:

$$y'(t) = f\,(t)$$

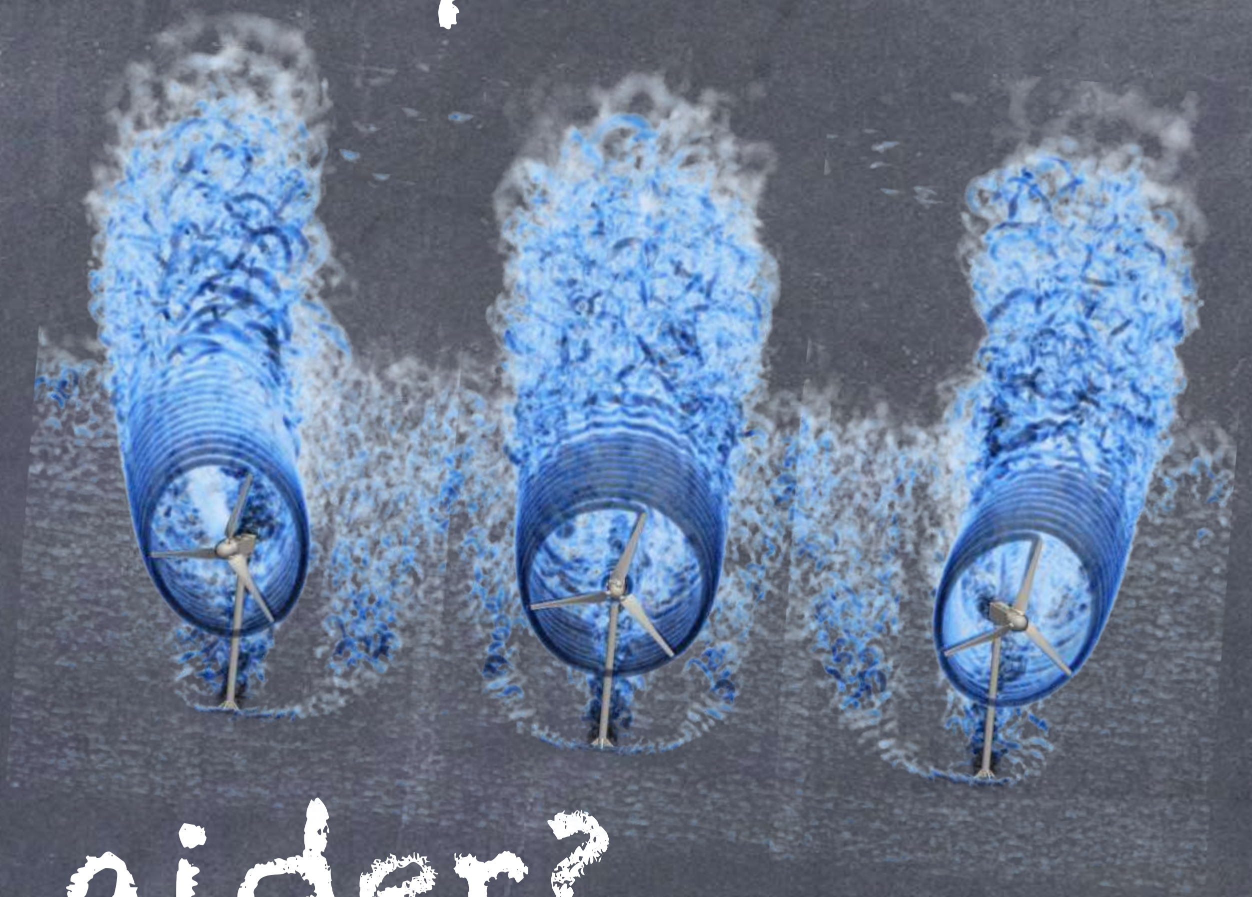
- linéaire, premier ordre ($n = 1$), homogène ($f=0$):

$$y'(t) + c\, y(t) = 0$$

- linéaire, premier ordre, non-homogène ($f \neq 0$) :

$$y'(t) + c\, y(t) = f\,(t)$$

Définir la solution de (E) c'est déterminer le mouvement d'un système physique, donc prédire son comportement!



Comment les mathématiques peuvent nous aider?

- Fournir une méthode de résolution
- Donner les conditions pour lesquelles la solution (unique) peut être déterminée

Méthode: calcul de solutions dans le cas homogène

Equation homogène = second membre nul, i.e. $f(t) = 0$

$$(H) : a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = 0$$

Equation caractéristique:

$$(C) : a\, r^2 + b\, r + c = 0$$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$, on peut avoir:

- $\Delta > 0$
- $\Delta = 0$
- $\Delta < 0$

Selon la valeur de Δ la solution de (H) va s'écrire différemment!

1. Si $\Delta > 0$,

nous avons deux solutions réelles de (C) :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Les solutions de (H) sont de la forme

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

avec A et B des constantes.

2. Si $\Delta < 0$,

nous avons deux solutions complexes de (C) :

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Les solutions de (H) sont de la forme

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

avec A et B des constantes arbitraires

(mais cette fois-ce complexes)

Pour avoir la forme réelle de $y(t)$, on remarque

$r_{1,2}$ sont les solutions complexes conjuguées, donc

$$r_{1,2} = \lambda \pm i\,\omega, \qquad \lambda = -\frac{b}{2a},\ \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Et les solution réelles de (H) sont de la forme

$$y(t) = e^{\lambda t}\,(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

avec A et B des constantes arbitraires.

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta}$$

remarque au (vrai) tableau

Ecriture équivalente :

$$y(t) = C\, e^{\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } (C, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

3. Si $\Delta = 0$,

nous avons une solution:

$$r = -\frac{b}{2a}$$

Et les solutions de (H) sont de la forme

$$y(t) = A\, e^{r_1 t} + B\, t\, e^{r_2 t}$$

avec A et B des constantes arbitraires.

Pourquoi telle forme des solutions?

Théorème 1

L'ensemble des solutions de l'equation homogène (H) forme un espace vectoriel de dimension 2.

Une base $(y_1(t), y_2(t))$ est donnée par

- $(e^{r_1 t}, e^{r_2 t})$ si $\Delta > 0$
- $(e^{\lambda t}\cos(\omega t), e^{\lambda t}\sin(\omega t))$ si $\Delta < 0$
- (e^{rt}, te^{rt}) si $\Delta = 0$

Preuve. [Admise]

Exemples au (vrai) tableau

- $y'' + 3y' + 2y = 0$
- $y'' + 4y' + 4y = 0$
- $y'' + y = 0$
- $y'' + 2\,y' + 2y = 0$ (exercice)

- $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$
- $y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$
- $y(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$
- ?

Résumé: Calcul de solutions dans le cas (H)

Théorème 2

Les solutions de

$$(H) : a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = 0$$

sont

- Si $\Delta > 0$, $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

- Si $\Delta < 0$, $r_{1,2} = \lambda \pm i\omega$, avec $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$, $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$$y(t) = \tilde{A}e^{r_1 t} + \tilde{B}e^{r_2 t}, \quad (\tilde{A},\tilde{B}) \in \mathbb{C}^2 \text{ (t.q. } \forall t \; y(t) \in \mathbb{R} \text{)}$$

ou, équivalent,

$$y(t) = e^{\lambda t}\left(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)\right), \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

ou, équivalent,

$$y(t) = C\, e^{\lambda t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (C,\varphi) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta = 0$, $r = -\dfrac{b}{2a}$

$$y(t) = A\, e^{rt} + B\, t\, e^{rt}, \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

ou, équivalent,

$$y(t) = (A + Bt)\, e^{rt}, \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

On peut maintenant calculer toutes les solutions, peut - on garantir l'unicité?

Théorème 3

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(t_0, y_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction $\mathscr{C}^1$

Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exemple [Au tableau]

Méthode: calcul de solutions dans le cas non-homogène

Théorème 4

L'ensemble de toutes les solutions de

$$(E) : a\ y''(t) + b\ y'(t) + c\ y(t) = f(t)$$

est obtenu en ajoutant une solution particulière de (E) à toutes les solutions de (H)

$$(H)\ a\ y''(t) + b\ y'(t) + c\ y(t) = 0$$

i.e. $y(t) = y_H(t) + y_{part}(t)$, $y_H(t)$ est les solutions de (H) et

$$a\ y_{part}''(t) + b\ y_{part}'(t) + c\ y_{part}(t) = f(t)$$