

**Feuille D'EXERCICE 1 : Équations différentielles****1 Cinématique de tramway**

Un tramway automatique se déplace entre deux arrêts  $A$  et  $B$ . Il est programmé pour que son accélération soit linéaire en la distance parcourue : en notant  $x$  la distance entre le tramway et l'arrêt  $A$ , son accélération est égale à

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_0 - a_1x$$

avec  $a_0$  et  $a_1$  deux constantes positives données.

1. On note  $(E)$  l'équation différentielle satisfaite par  $x(t)$ . Quel est son ordre ? Quel est son second membre ? Quelle est l'équation homogène associée à  $(E)$  ?
2. Résoudre  $(E)$ , toujours en fonction de  $a_0$  et  $a_1$ .
3. Le tramway démarre de  $A$  et s'arrêtant en  $B$  (sa vitesse en  $A$  et en  $B$  est nulle), donner le temps du trajet de  $A$  à  $B$ .
4. Quelle est la vitesse maximale atteinte par le tramway ?

**2 Oscillateur harmonique forcé**

On s'intéresse à la résolution des équations de la forme de  $(R)$  décrivant, en physique, un oscillateur harmonique forcé

$$(R) : m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t),$$

avec  $m, \alpha, k$  et  $F_0$  des constantes positives. On introduit pour cela la grandeur complexe  $\underline{x}(t)$  dont la partie réelle est égale à la grandeur physique  $x(t)$ .

1. Montrer que les parties réelles des solutions complexes de l'équation  $(C)$  suivante sont des solutions de l'équation  $(R)$  :

$$(C) : \ddot{\underline{x}} + \beta\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

où l'on explicitera les grandeurs  $\beta$  et  $\omega_0$ .

2. Résoudre l'équation homogène associée à  $(C)$ . (On distinguera trois cas de figure).
3. Trouvez une solution particulière de l'équation complète sous la forme  $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{i\omega t}$ .
- 4.\* Montrer que pour des temps longs, les solutions de  $(R)$  ont un comportement proche de celui d'un oscillateur de pulsation  $\omega$ , dont on étudiera l'amplitude en fonction de  $\omega$ .

**3 Quelques équations hors contexte**

Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1.  $2y'' + y' - y = 0$
2.  $2y'' + y' - y = 5$
3.  $2y'' + y' - y = (2x + 7)e^x$
4.  $2y'' + y' - y = 5 + (2x + 7)e^x$
5.  $2y'' + y' - y = \sin(x) + 3\cos(x)$
6.  $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 2$
7.  $4y'' - 4y' + y = 9e^{-x}$
- 8.\*  $4y'' - 4y' + y = xe^{x/2}$ . (*Indication.* On peut remarquer que le second membre est solution de l'équation différentielle homogène ; on cherchera une solution particulière sous la forme  $P(x)e^{x/2}$ , avec  $P(x)$  un polynôme, sans fixer le degré de  $P$  a priori).

**4 Fibre optique**

En optique, lorsqu'on étudie une fibre transparente cylindrique composée d'un milieu dont l'indice  $n$  varie avec l'éloignement  $z$  à l'axe, selon la loi

$$n(z) = n_0 \sqrt{1 - \alpha z^2}$$

où  $\alpha$  désigne une constante, on trouve que les rayons lumineux qui entrent dans la fibre en faisant un angle  $\theta_0$  avec l'axe obéissent à l'équation suivante

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta_0} - 1 - \frac{\alpha z^2}{\cos^2 \theta_0},$$

où  $z(x)$  désigne la distance entre l'axe de la fibre et le rayon lumineux, et  $x$  l'avancement dans la fibre.

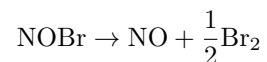
1. En dérivant cette équation par rapport à  $x$ , montrer que

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\alpha z}{\cos^2 \theta_0}$$

2. Donner la forme des solutions de l'équation différentielle ci-dessus, en distinguant les cas  $\alpha > 0$  et  $\alpha < 0$ .
3. Exprimer  $z'(0)$  en fonction de  $\theta_0$ .
4. On suppose que le rayon étudié entre dans la fibre par son centre, c'est à dire que  $z(0) = 0$ . Donner l'expression de  $z(x)$  en fonction de  $x$  dans le cas où  $\alpha > 0$ , et dans le cas où  $\alpha < 0$ .
5. Discuter l'allure des rayons lumineux, suivant le signe de  $\alpha$ .

## 5 Cinétique d'une réaction

La réaction de décomposition du bromure de nitrosyle s'écrit :



Cette réaction suit une loi de vitesse dont on cherche à déterminer l'ordre. Autrement dit, on a :

$$(E) : \frac{d[\text{NOBr}](t)}{dt} = -k([\text{NOBr}](t))^\alpha,$$

où  $[\text{NOBr}](t)$  désigne la concentration de bromure de nitrosyle à l'instant  $t$ ,  $k$  est une constante positive, et l'ordre de la loi de vitesse cherché est  $\alpha = 0, 1$  ou  $2$ .

1. On suppose que  $\alpha = 0$ . Résoudre l'équation différentielle  $(E)$ , et tracer l'allure de  $[\text{NOBr}]$  en fonction du temps.
2. On suppose maintenant que  $\alpha = 1$ . Résoudre  $(E)$  dans ce cas, tracer l'allure de  $[\text{NOBr}]$  en fonction du temps, puis l'allure de  $\ln([\text{NOBr}])$ .
3. On suppose enfin que  $\alpha = 2$ . Montrer à l'aide de  $(E)$  que la fonction  $\frac{1}{[\text{NOBr}](t)}$  a une dérivée constante. En déduire l'allure possible de  $[\text{NOBr}](t)$ .
4. Des mesures expérimentales de concentration de bromure de nitrosyle à différents instants sont données dans le tableau suivant :

|                                  |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| temps en $s$                     | 0    | 6,2  | 10,8 | 14,7 | 20,0 | 24,6 |
| $[\text{NOBr}]$ en mol. $m^{-3}$ | 25,0 | 19,1 | 16,2 | 14,4 | 12,5 | 11,2 |

Quel est l'ordre de la réaction ?