

MATH103_MISPI (Mathématiques & applications)

Contrôle des connaissances

Mardi 14 novembre 2023 (15:45–17:15)

Documents, calculatrice, téléphone portable et montre intelligente interdits.

Lors de l'appréciation des copies, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation, de la clarté de la rédaction et de la précision des démonstrations.

Exercice 1 (langage). Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer (une réponse non justifiée ne sera pas considérée).

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R}, e^x \leq M$.
2. $\exists A \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, (x \leq A \Rightarrow x^5 \leq 1)$.
3. $\forall A \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, (x \geq M \Rightarrow \ln x \geq A)$.
4. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On a

$$f \text{ positive sur } I \iff (\forall x \in I)(\forall \mu > 0), f(x) > -\mu.$$

1. Vrai.

Soit $x \in \mathbf{R}$. En posant $M := e^x$, on a évidemment, $e^x \leq M$. Autrement dit

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\exists M_x := e^x \in \mathbf{R}), e^x \leq M.$$

2. Vrai.

On a

$$\forall x \in \mathbf{R}, (x \leq 1 \Rightarrow x^5 \leq 1)$$

car si $x \leq 0$ alors $x^5 \leq 0 \leq 1$ (5 est impair) tandis que si $0 < x \leq 1$ alors $0 \leq x^{k+1} \leq x^k$, $k \in \mathbf{N}$. Ainsi

$$(\exists A := 1 \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R}), x \leq A \Rightarrow x^5 \leq 1.$$

En réalité, tout réel $A \in]-\infty, 1]$ convient.

3. Vrai.

Soit $x \in \mathcal{D}_{\ln} = \mathbf{R}_+^*$ et $A \in \mathbf{R}$. On a

$$\ln x \geq A \Leftrightarrow e^{\ln x} \geq e^A \Leftrightarrow x \geq e^A > 0$$

car exp et ln sont croissantes et réciproques l'une de l'autre. Ainsi

$$x \geq e^A \Rightarrow \ln x \geq A.$$

Récapitulons,

$$(\forall A \in \mathbf{R})(\exists M := e^A \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R}), x \geq M \Rightarrow \ln x \geq A.$$

4. Vrai.

($\Rightarrow$)

$$f \text{ positive sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow (\forall x \in I)(\forall \nu < 0), f(x) \geq 0 > \nu$$

$$\Rightarrow (\forall x \in I)(\forall \mu > 0), f(x) > -\mu$$

($\Leftarrow$) Supposons $\neg(f \text{ positive sur } I)$ i.e. $\exists a \in I, f(a) < 0$. Autrement dit

$$(\exists a \in I)(\exists \mu := -f(a) > 0), f(a) \leq -\mu$$

On a démontré la contraposée.

Exercice 2 (fonction/application). On considère l'application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
 $x \mapsto 1 - x^2$.

1. Quelle est, par f , l'image directe de $[-2, 1]$? l'image réciproque de $[-3, 1]$? les antécédents de -3 ?
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Trouver deux exemples de couples (I, J) d'intervalles de $\mathbf{R}$ tels que la fonction

$$g : I \rightarrow J \\ x \mapsto 1 - x^2$$

soit bijective.

4. Déterminer à l'aide de la représentation graphique de f les ensembles suivants :

$$f(]-3, 2]), \quad f^{-1}(]-3, 2]), \quad f^{-1}(f(]-3, 2])), \quad f(f^{-1}(]-3, 2])), \quad f^{-1}([-8, -3]).$$

1. On a $f([-2, 1]) = f([-2, 0]) \cup f([0, 1]) = [-3, 1] \cup [0, 1] = [-3, 1]$; $f^{-1}([-3, 1]) = [-2, 2]$; $f^{-1}(-3) = \{-2, 2\}$ donc les antécédents de -3 sont -2 et 2 .
2. L'application f n'est pas injective car $f(-2) = -3 = f(2)$ avec $-2 \neq 2$; l'application f n'est pas surjective car $2 \in \mathbf{R}$ n'est pas atteint ($2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = -1$).
3. On peut poser $(I, J) = (\mathbf{R}_+,] - \infty, 1])$ ou $(I, J) = (\mathbf{R}_-,] - \infty, 1])$ où f_I est strictement monotone.
4. On a $f(]-3, 2]) =]-8, 1]$; $f^{-1}(]-3, 2]) =]-2, 2[$; $f^{-1}(f(]-3, 2])) = f^{-1}(]-8, 1]) =]-3, 3[$; $f(f^{-1}(]-3, 2])) = f(]-2, 2]) = [-3, 1]$; $f^{-1}([-8, -3]) = [-3, -2[\cup]2, 3]$.

Exercice 3 (inégalité). On justifiera les réponses à l'aide d'une propriété appropriée. Soient x et y deux réels tels que $x \in [-3, 2]$ et $y \in [2, 4]$.

1. Donner un encadrement des réels $a = x + y$ et $b = x - y$.
2. Donner un encadrement des réels $c = xy$ et $d = \frac{y}{1 + x^2}$.

1. On a

$$\begin{aligned} -3 &\leq x \leq 2 \\ 2 &\leq y \leq 4 \\ \Rightarrow -1 &\leq a \leq 6 \end{aligned}$$

car l'addition est compatible avec l'ordre.

De manière analogue

$$\begin{aligned} -3 &\leq x \leq 2 \\ -4 &\leq -y \leq -2 \\ \Rightarrow -7 &\leq b \leq 0 \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} -3 &\leq x \leq 2 \\ \Rightarrow -3y &\leq c \leq 2y \end{aligned}$$

car la multiplication par un scalaire positif ou nul est compatible avec l'ordre.

Or

$$\begin{aligned} -12 &\leq -3y \text{ et } 2y \leq 8 \\ \Rightarrow -12 &\leq c \leq 8 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} -3 &\leq x \leq 2 \\ \Rightarrow 0 &\leq x^2 \leq 9 \\ \Rightarrow \frac{1}{10} &\leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{5} &\leq \frac{y}{1+x^2} \leq 4 \end{aligned}$$

Exercice 4 (somme & factoriel). Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. (a) Soit $k \in \mathbf{N}$. Prouver que

$$(k+1)! - k! = k \cdot k!$$

- (b) En déduire une expression simple de la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n k \cdot k!$ en fonction de n .

2. (a) Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer que

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

- (b) En déduire une expression simple de la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$ en fonction de n .

1. (a) On a $(k+1)! - k! = k!(k+1-1) = k \cdot k!$.

(b) On a

$$\sum_{k=0}^n k \cdot k! = \sum_{k=0}^n ((k+1)! - k!) = \sum_{k=1}^{n+1} k! - \sum_{k=0}^n k! = (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1.$$

2. (a) On a

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

(b) On a

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 5 (polynôme). Les questions 1 & 2 sont indépendantes.

1. (a) Effectuer la division euclidienne de $A := X^4 + X^2 + 1$ par $B := X^2 + X + 1$.

(b) Que peut-on en déduire sur A ?

2. (a) Soit $a, b \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Développer $(a+b)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- (b) Prouver que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

- (c) Montrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
- (d) Quel est le coefficient de x^3 dans $(2x - 4)^5$?
1. (a) On obtient $A = B(X^2 - X + 1)$ où $Q = X^2 - X$ est le quotient et $R = 0$ est le reste de la division euclidienne de A par B (on a bien $\deg R = -\infty < 2 = \deg B$).
- (b) Le polynôme A n'est pas irréductible dans $\mathbf{R}[X]$ et $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ est une factorisation en polynômes irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ (car les facteurs sont de degré 2 à discriminant < 0).
2. (a) On a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- (b) En posant $a = b := 1$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n.$$

- (c) En posant $a := -1$ et $b := 1$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1 + 1)^n = 0^n = 0.$$

- (d) Le coefficient de x^3 dans $(2x - 4)^5$ est égal à

$$\binom{5}{3} 2^3 (-4)^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 5 \cdot 2^8 = 5 \cdot 256 = 1280.$$

Exercice 6 (complexe/racine).

1. (a) Dans $\mathbf{C}$, déterminer les solutions de l'équation $\delta^2 = -5 + 12i$.
- (b) Résoudre l'équation $(2 + i)z^2 - (3 + 2i)z + 1 - \frac{i}{2} = 0$.
2. Soit a un réel.
- (a) Écrire $\frac{1 + ia}{1 - ia}$ sous forme exponentielle (*indication : on pourra poser $a = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$*).
- (b) Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^n = \frac{1 + ia}{1 - ia}$.

1. (a) Posons $\delta = x + iy$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Il vient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (2, 3) \\ \text{ou} \\ (x, y) = (-2, -3) \end{cases}$$

Autrement dit, $\delta = \pm(2 + 3i)$.

(b) On a

$$\begin{aligned}\Delta &= -(3+2i)^2 - 4(2+i)(1-\frac{i}{2}) = 9+12i-4-2(2+i)(2-i) = 5+12i-2|2+i|^2 \\ &= 5+12i-2(4+1) = -5+12i.\end{aligned}$$

D'après 1,

$$z_1 = \frac{3+2i-(2+3i)}{2(2+i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-i}{2+i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-i)(2-i)}{4+1} = \frac{1-3i}{10}$$

et

$$z_2 = \frac{3+2i+2+3i}{2(2+i)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1+i}{2+i} = \frac{5}{2} \cdot \frac{(1+i)(2-i)}{5} = \frac{3+i}{2}.$$

On conclut $\mathcal{S} = \{\frac{1-3i}{10}, \frac{3+i}{2}\}$.

2. (a) Comme $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R}$ est surjective, il existe (en réalité un unique) $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $a = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Il vient

$$\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}.$$

(b) On a

$$z^n = \frac{1+ia}{1-ia} \Leftrightarrow z^n = e^{2i\alpha} \Leftrightarrow z = \rho e^{i\theta} \text{ avec } \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv \frac{2\alpha}{n} [\frac{2\pi}{n}] \end{cases}.$$

D'où

$$\mathcal{S} = \{e^{2i \cdot \frac{\alpha}{n}}, e^{2i \cdot \frac{\alpha+\pi}{n}}, e^{2i \cdot \frac{\alpha+2\pi}{n}}, \dots, e^{2i \cdot \frac{\alpha+(n-1)\pi}{n}}\}$$

(de cardinal n) avec $\alpha = \arctan a$.