

Corrigé de la feuille 4 : nombres complexes

Exercice 1. Questions de cours : se reporter au polycopié.

Exercice 2. Quelle est la forme trigonométrique de 1 ? de i , de -2 ? de $z = -e^{i\frac{\pi}{3}}$?

Solution. Il est recommandé de placer tous les points images des complexes suivants sur une figure avec le cercle trigonométrique.

- 1 a pour module 1 et argument $0 [2\pi]$: $1 = e^{0i} = \cos 0 + i \sin 0$. On préférera peut-être écrire $1 = e^{2i\pi}$... ou même tout simplement 1 (!). Les réels positifs sont tous égaux à leur module et ont pour argument $0 [2\pi]$.
- $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Exemple classique du cours.
- $-2 = 2e^{i\pi}$: tous les réels négatifs ont pour argument $\pi [2\pi]$ et pour module leur valeur absolue.
- $-e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\pi} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Exercice 3. Trouver la forme exponentielle des nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$ puis placer les points images dans le plan complexe. En utilisant $\frac{z_1}{z_2}$ trouver les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Solution. La méthode consiste à calculer le module puis à le mettre en facteur. On identifie alors $\cos \theta$, $\sin \theta$ et donc θ dans les cas simples ... à condition de bien connaître les lignes trigonométriques usuelles.

- $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, donc $z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- $|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, donc $z_2 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$.
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{4}$. D'autre part, en utilisant les formes trigonométriques : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$. On a donc $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ d'où :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}+1}{4} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}+1}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 4.

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -3 - 5i, \quad z_2 = (1+i)^5, \quad z_3 = -5ie^{i\alpha} (\alpha \in \mathbb{R})$$

Indications : pour z_1 , donner une valeur approchée de l'argument dans $] -\pi, \pi]$. Pour z_2 , ne pas développer.

2. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}, \quad z_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha (\alpha \in \mathbb{R}), \quad z_3 = -\cos \alpha - i \sin \alpha (\alpha \in \mathbb{R})$$

3. Donner, en fonction de l'entier relatif k , la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$(a) \quad z_k = e^{ik\pi} \qquad (b) \quad z_k = e^{i(\frac{\pi}{2}+k\pi)}$$

Solution.

- $|z_1| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$, donc $z_1 = \sqrt{34}e^{i\theta}$ avec $\cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{34}}$ et $\sin \theta = \frac{-5}{\sqrt{34}}$.
 $\arccos(\frac{-3}{\sqrt{34}}) \simeq 1,659 \in [0, \pi]$ mais $\sin \theta < 0$ donc $\theta = -\arccos(\frac{-3}{\sqrt{34}}) \simeq -1,659$. En résumé :

$$|z_1| = \sqrt{34} \text{ et } \arg(z_1) \simeq -1,659 [2\pi].$$

- On a vu à l'exercice 3 que $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $z_2 = \sqrt{2}^5 e^{i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$:

$$|z_2| = 4\sqrt{2} \text{ et } \arg(z_2) = \frac{5\pi}{4} [2\pi].$$

- $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc $z_3 = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha} = 5e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$

$$|z_3| = 5 \text{ et } \arg(z_3) = \alpha - \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

- $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$.
 • $z_2 = \overline{\cos \alpha + i \sin \alpha} = e^{-i\alpha}$.
 • $z_3 = -e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+\pi)}$.
 3. (a) $z_k = (e^{i\pi})^k = (-1)^k$.
 (b) $z_k = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{ik\pi} = (-1)^k i$.

Exercice 5.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
- Quels sont les formes exponentielles des solutions ? Montrer qu'elles vérifient $z^3 = 1$ et retrouver ce résultat à l'aide de l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
- Montrer que la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 est nulle. Ce résultat se généralise-t-il à la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe non nul ?

Solution.

- Le discriminant : $\Delta = -3 < 0$. Cette équation a donc deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

- On reconnaît immédiatement des lignes trigonométriques usuelles : $z_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
 On a $z_1^3 = e^{-3i\frac{2\pi}{3}} = e^{-2i\pi} = 1$ et $z_2^3 = \overline{z_1^3} = 1$.

Remarque : dans le cours on a noté z_2 par j et on a $z_1 = \bar{j} = j^2$.

En choisissant $a = z_1$ et $b = 1$ on obtient $z_1^3 - 1 = (z_1 - 1) \underbrace{(z_1^2 + z_1 + 1)}_{=0} = 0$, idem avec z_2 .

- On rappelle que les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 peuvent s'écrire sous la forme $1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$ avec $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Elles forment donc, dans cet ordre, n termes successifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $u \neq 1$ et on a :

$$1 + u + \dots + u^{n-1} = \frac{1 - u^n}{1 - u} = 0$$

car $u^n = 1$.

Enfin, si $Z = re^{i\theta}$ est un nombre complexe non nul, avec $r > 0$, ses racines $n^{\text{èmes}}$ sont données par $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}u^k$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, donc :

$$z_0 + z_1 + \dots + z^{n-1} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}(1 + u + \dots + u^{n-1}) = 0,$$

la réponse est donc : oui.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z :

1. $z^2 = -10 - 24i$.
2. $z^5 = -3$.
3. $z^3 = 4(1 + i\sqrt{3})$.
4. $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.
5. $(4+2i)z^2 - 2(3+2i)z + 2 - i = 0$.
6. $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$.

Solution.

1. On pose $z = x + iy$: $z^2 = -10 - 24i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -10 \\ 2xy = -24 \end{cases}$
On adjoint la relation $x^2 + y^2 = |z^2| = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ et on obtient $x^2 = 8$, $y^2 = 18$. Comme $xy < 0$ on a finalement $z = \sqrt{2}(2-3i)$ ou $z = \sqrt{2}(-2+3i)$.
2. $-3 = 3e^{i\pi}$. Il suffit donc d'appliquer le cours : $z = \sqrt[5]{3}e^{i(\frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5})}$, avec $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$. En particulier, pour $k = 2$ on obtient la solution évidente $-\sqrt[5]{3}$.
3. $4(1+i\sqrt{3}) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$. On a donc $z = 2e^{i(\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{9})}$, avec $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, ou encore $z \in \{2e^{i\frac{\pi}{9}}, 2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{i\frac{5\pi}{9}}\}$.
4. Posons $Z = \frac{2z+1}{z-1}$. L'équation $Z^4 = 1$ a pour solutions $Z \in \{1, i, -1, -i\}$. D'autre part, $Z = \frac{2z+1}{z-1} \iff 2z+1 = Z(z-1) \iff (2-Z)z = -Z-1$ donc, comme $Z \neq 2$, $z = \frac{Z+1}{Z-2}$.
On obtient donc, après calculs, les solutions $z \in \{-2, \frac{-1-3i}{5}, 0, \frac{-1+3i}{5}\}$.
5. On trouve $\Delta = 4(-5+12i)$ et on va donc chercher à écrire ce discriminant sous la forme $\Delta = (2\delta)^2$. En posant $\delta = x + iy$ on construit le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13 \end{cases}$
d'où $x^2 = 4$, $y^2 = 9$ et $xy > 0$. On a donc $\Delta = [2(2+3i)]^2$ et les solutions de l'équation sont (**après calculs**) :
$$z_1 = \frac{2(3+2i) - 2(2+3i)}{2((4+2i))} = \frac{1-i}{4+2i} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i, \quad z_2 = \frac{2(3+2i) + 2(2+3i)}{2((4+2i))} = \frac{5+5i}{4+2i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$
6. On trouve $\Delta = 25(-3-4i)$ et on va donc chercher à écrire ce discriminant sous la forme $\Delta = (5\delta)^2$. En posant $\delta = x + iy$ on construit le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \end{cases}$
d'où $x^2 = 1$, $y^2 = 4$ et $xy < 0$. On a donc $\Delta = [5(1-2i)]^2$ et les solutions de l'équation sont (**après calculs**) :

$$z_1 = \frac{5-14i-5(1-2i)}{2} = -2i, \quad z_2 = \frac{5-14i+5(1-2i)}{2} = 5-12i.$$

Exercice 7. En effectuant un minimum de calculs, déterminer et représenter dans le plan complexe chacun des ensemble suivants, où $M(z)$ est le point d'affixe z :

1. $E_1 = \{M(z) ; z \in \mathbb{C} \text{ et } |\operatorname{Re}(z)| = 5\}$.
2. $E_2 = \{M(z) ; z \in \mathbb{C} \text{ et } |z+3i| = 5\}$.
3. $E_3 = \{M(z) ; z \in \mathbb{C} \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]\}$.
4. $E_4 = \{M(z) ; z \in \mathbb{C} \text{ et } \arg(z-2) = \frac{\pi}{4} [2\pi]\}$.

5. $E_5 = \{M(z); z \in \mathbb{C} \text{ et } \arg(z - 2i + 3) = \frac{\pi}{3} [2\pi]\}.$

6. $E_6 = \{M(z); z = 2e^{ix} \text{ et } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]\}.$

7. $E_7 = \{M(z); z \in \mathbb{C} \text{ et } |z + 1| < 2\}.$

8. $E_8 = \{M(z); z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Im}(z) > \frac{1}{2}\}.$

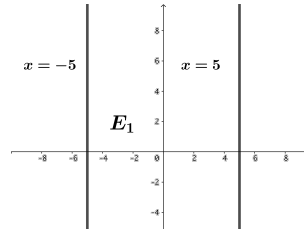
9. $E_9 = \{M(z); z \in \mathbb{C} \text{ et } \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \pi\}.$

Solution. On suppose le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

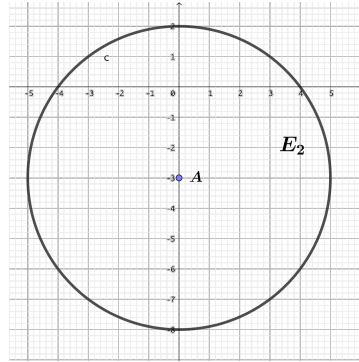
1. Si on pose $z = x + iy$ alors

$$M(z) \in E_1 \iff |x| = 5 \iff x = -5 \text{ ou } x = 5,$$

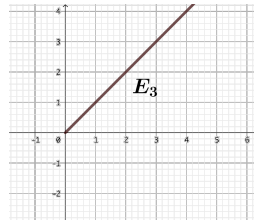
donc E_1 est la réunion des droites D_1 d'équation $x = -5$ et D_2 d'équation $x = 5$.



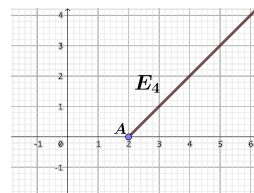
2. Soit A le point d'affixe $-3i$ (coordonnées $(0, -3)$), alors $M(z) \in E_2 \iff AM = 5$ (car $|z + 3i| = |z - (-3i)|$) donc $E_2 = \mathcal{C}(A, 5)$.



3. $M(z) \in E_3 \iff (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ donc E_3 est la demi-droite Δ_3 d'équation $y = x, x > 0$.

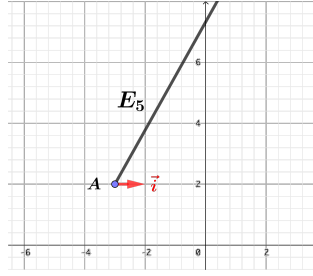


4. Soit A le point d'affixe 2 (donc de coordonnées $(2, 0)$) alors $M(z) \in E_4 \iff (\vec{i}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ donc E_4 est la demi-droite Δ_4 translatée de la précédente par le vecteur $2\vec{i}$, d'équation $y = x - 2, x > 2$.

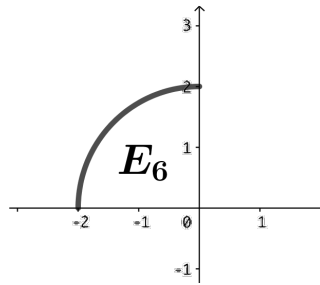


5. Soit A le point d'affixe $-3 + 2i$ (donc de coordonnées $(-3, 2)$) alors

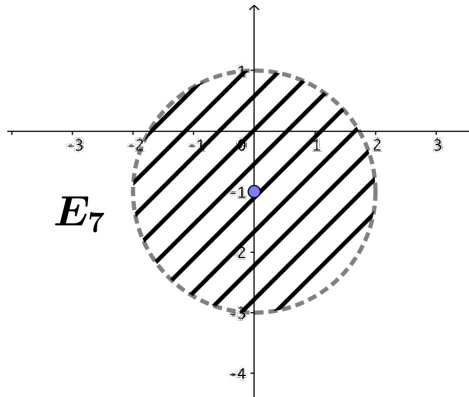
$M(z) \in E_5 \iff (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{AM}}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ donc E_5 est la demi-droite Δ_5 d'origine A qui fait un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec la demi-droite $(A, \vec{i})$.



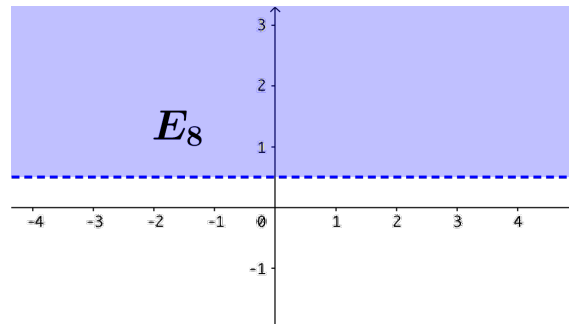
6. $M(z) \in E_6 \iff |z| = 2$ et $\arg z = x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \iff OM = 2$ et $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ donc E_6 est le quart de cercle représenté ci-dessous.



7. Soit A le point d'affixe -1 (coordonnées $(-1, 0)$), alors $M(z) \in E_2 \iff AM < 2$ (car $|z + 1| = |z - (-1)|$) donc $E_2 = \mathcal{D}(A, 2)$, disque ouvert de centre A et de rayon 2.



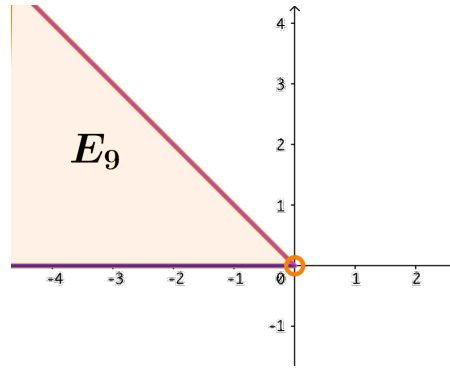
8. Si on pose $z = x + iy$ alors $M(z) \in E_8 \iff y > \frac{1}{2}$: c'est un demi-plan ouvert.



9. E_9 est le secteur angulaire fermé limité par les demi-droites

$$\Delta_9 : y = -x, x \leq 0 \text{ et } \Delta'_9 : y = 0, x \leq 0$$

privé de l'origine.



Exercice 8. Formules d'Euler.

1. Linéariser $\cos^4 \theta$ et $\sin^3 \theta$.
2. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Déterminer le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$.
Indication : factoriser par $e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Solution.

1.

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + 4e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 4e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{2} + 4 \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + 3 \right) \\ &= \frac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 = \frac{-1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{-1}{4} \left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - 3 \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) \\ &= \frac{-1}{4} (\sin(3\theta) - 3\sin \theta). \end{aligned}$$

$$2. z = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2 \cos \frac{\theta}{2}.$$

$$\theta \in]-\pi, \pi[\implies -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos \frac{\theta}{2} > 0 \text{ et on a :}$$

$$|z| = 2 \cos \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg(z) = \frac{\theta}{2} [2\pi].$$

Exercice 9. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{(1-i)^{115}}{(1+i)^{108}}.$
2. $z_2 = \frac{(2+i)^3 + (1-i)^2}{1+i+(2i-1)^2}.$

Solution.

$$\begin{aligned} 1. z_1 &= \frac{(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^{115}}{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{108}} = \sqrt{2}^7 e^{-i\frac{223\pi}{4}} = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{223 \times 2\pi}{8}}. \text{ Or } \frac{223}{8} = 27 + \frac{7}{8} \text{ (faire la division euclidienne) donc } e^{-i\frac{223 \times 2\pi}{8}} = e^{-i(27 \times 2\pi + \frac{7}{8} \times 2\pi)} = e^{-i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}. \text{ Finalement } z_1 = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

$$2. \quad z_2 = \frac{(8 + 12i + 6i^2 + i^3) + (1 - 2i + i^2)}{1 + i + (4i^2 - 4i + 1)} = \frac{2 + 9i}{-2 - 3i} = \frac{(2 + 9i)(-2 + 3i)}{(-2 - 3i)(-2 + 3i)} = \frac{-31 - 12i}{13}.$$

Exercice 10. Écrire le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ sous forme d'un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution. Il faut trouver les racines de ce polynôme, donc résoudre l'équation $x^4 + x^2 + 1 = 0$. On pose $y = x^2$ et on résout l'équation du second degré $y^2 + y + 1 = 0$: les solutions sont $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (voir exercice 5). Ensuite : $x^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \iff x = \pm e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $x^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \iff x = \pm e^{-i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})(X + e^{i\frac{\pi}{3}})(X + e^{-i\frac{\pi}{3}}).$$

En regroupant, comme ci-dessus, les facteurs qui contiennent des racines conjuguées on obtient :

$$(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}) = X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1 \quad \text{et} \quad (X + e^{i\frac{\pi}{3}})(X + e^{-i\frac{\pi}{3}}) = X^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1$$

et finalement, dans $\mathbb{R}[X]$, on obtient la factorisation (que l'on peut trouver aussi par « tâtonnements ») :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

Pour travailler en autonomie

Exercice 11. Soit z un nombre complexe. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

- $A : \operatorname{Im}(z^2) = (\operatorname{Im}(z))^2$.
- $B : |2 + iz| = |2i - \bar{z}| \implies \operatorname{Im}(z) = 0$.
- $C : |1 + iz| = |1 - i\bar{z}| \implies \operatorname{Re}(z) = 0$.

Solution.

- En posant $z = x + iy$, A équivaut à $2xy = y^2$, soit $y(y - 2x) = 0$. L'égalité a lieu si et seulement si $y = 0$ ou $y = 2x$, donc A est fausse.
- En posant $z = x + iy$,

$$B \iff |2 - y + ix|^2 = |-x + (2 + y)i|^2 \iff x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 4y + 4 \iff y = 0,$$

donc A est vraie.

Autre méthode : on peut remarquer, en multipliant le premier membre par i qui est de module 1, que $|2 + iz| = |2i + -z|$. En considérant les point $\Omega(2i)$, $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ on a donc $B \iff \Omega M = \Omega M'$.

Si $\operatorname{Im}(z) \neq 0$, c'est à dire si $M \neq M'$, l'égalité $\Omega M = \Omega M'$ n'est vraie que sur la médiatrice de $[MM']$ qui est l'axe réel, donc fausse pour Ω . On retrouve donc ainsi que B est vraie.

- On remarque que $1 - i\bar{z} = \overline{1 + iz}$, on a donc toujours $|1 + iz| = |1 - i\bar{z}|$ et C est fausse.

Exercice 12 (4 pts).

1. Déterminer sans calcul l'ensemble des points $\mathcal{H}$ des points du plan dont l'axe z vérifie $\left|z + \frac{1}{3}\right| = |z - 2i|$. Représenter cet ensemble.

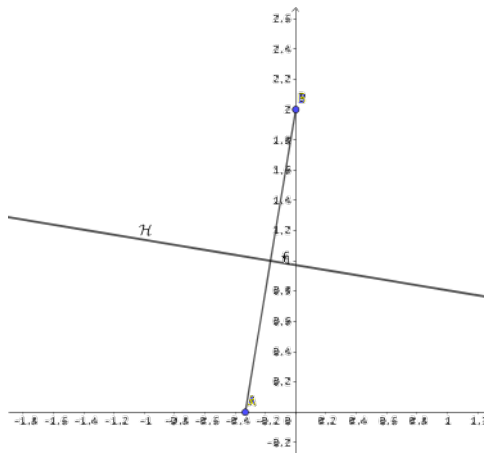
2. Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose, quand c'est possible, $Z = \frac{3z + 1}{\bar{z} + 2i}$.

(a) Quel est l'ensemble E des nombres complexes z pour lesquels on peut calculer Z ?

- (b) Pour $z \in E$, montrer que $|Z| = 3 \iff \left|z + \frac{1}{3}\right| = |z - 2i|$. En déduire l'ensemble $\mathcal{K}$ des points du plan d'axe z tels que $|Z| = 3$.

Solution.

- Soient A le point d'affixe $z_A = -\frac{1}{3}$, B le point d'affixe $z_B = 2i$ et $M(z)$. L'égalité équivaut à $MA = MB$ donc $\mathcal{H}$ est la médiatrice du segment $[A, B]$.



- $E = \{z \in \mathbb{C}; \bar{z} \neq -2i\} = \{z \in \mathbb{C}; z \neq 2i\} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.
 - $|Z| = \frac{|3z+1|}{|\bar{z}+2i|}$, donc $|Z| = 3 \iff |3z+1| = 3|\bar{z}+2i|$. Or $|3z+1| = 3\left|z + \frac{1}{3}\right|$ et $|\bar{z}+2i| = |\overline{z-2i}| = |z-2i|$ d'où l'équivalence annoncée.
Finalement, comme $B(2i) \notin \mathcal{H}$ on a $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.

Exercice 13 (5,5 pts). *Les deux questions sont indépendantes.*

- Soit $Z = 8 - 8i\sqrt{3}$.
 - Déterminer la forme exponentielle de $1 - i\sqrt{3}$ puis celle de Z .
 - En écrivant z sous la forme $z = re^{i\theta}$, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres complexes z tels que $z^3\bar{z} = Z$ et représenter les points images des éléments de $\mathcal{S}$ (on trouvera deux solutions).
- Résoudre les équations suivantes :

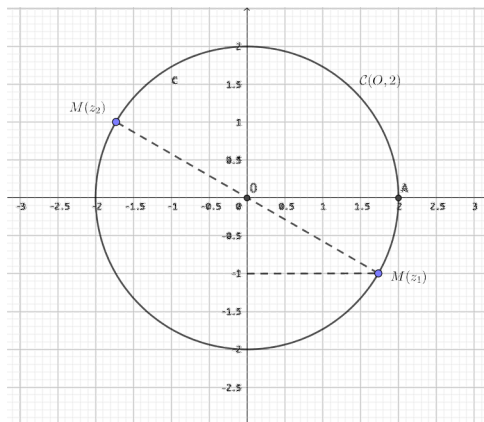
$$(E_1) z^2 + 3z + 3 = 0, \quad (E_2) z^2 + 3z + 3i = 0.$$

Solution.

- On a $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Si θ est un argument de $1 - i\sqrt{3}$ alors $\cos \theta = 1/2$ et $\sin \theta = -\sqrt{3}/2$ donc $\theta = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $\boxed{1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}}$. Enfin $\boxed{Z = 8(1 - i\sqrt{3}) = 16e^{-\frac{i\pi}{3}}}$.
 - On a $z^3\bar{z} = r^3e^{3i\theta} re^{-i\theta} = r^4e^{2i\theta}$ donc $z^3\bar{z} = Z \iff r^4 = 16$ et $2\theta = -\frac{i\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
Ceci donne $r = 2$ et $\theta = -\frac{i\pi}{6} + k\pi$, c'est à dire encore, avec $k = 0$ et $k = 1$:

$$\theta = -\frac{i\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } \theta = -\frac{i\pi}{6} + \pi = \frac{5i\pi}{6} [2\pi].$$

On a donc deux solutions opposées : $\boxed{\mathcal{S} = \{z_1 = 2e^{-\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3} - i, z_2 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = -z_1 = -\sqrt{3} + i\}}$.



2. $(E_1) \quad \Delta = 9 - 12 = -3$ donc les solutions sont : $z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} = \overline{z_1}$.

$(E_1) \quad \Delta = 9 - 12i$ et on cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\delta^2 = \Delta \iff x^2 - y^2 = 9 \text{ et } 2ixy = -12i.$$

On a aussi $x^2 + y^2 = |\delta^2| = |\Delta| = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$.

On en déduit que $x^2 = 12$, $y^2 = 3$ et $xy < 0$ d'où $\delta = \pm(2\sqrt{3} - i\sqrt{3})$. Les solutions de l'équation

sont finalement : $z_1 = \frac{-3 - 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-3 + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 14. Soit a un réel.

1. Écrire $\frac{1+ia}{1-ia}$ sous forme exponentielle (on posera $a = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$).
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \frac{1+ia}{1-ia}$.

Solution.

1. En posant $a = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ on obtient $\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1+i\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1-i\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$.

Remarque : la fonction tangente définit une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ donc α existe, est unique si on impose $\alpha \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et est alors donné par $\alpha = \arctan(a)$.

2. On cherche z sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$. Les solutions de $z^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ sont les n racines $n^{\text{èmes}}$ de $e^{2i\alpha}$: on a $r = 1$ et $\theta = \frac{2\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Exercice 15. Soit $\theta \in] -\pi, \pi[$. On pose $a(\theta) = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$ et $b(\theta) = 1 + \cos \theta - i \sin \theta$.

1. Montrer que l'on peut écrire $a(\theta)$ sous la forme $re^{i\alpha}$ où l'on précisera r et α en fonction de θ .
2. Donner le module et un argument de $a(\theta)$.
3. En déduire le module et un argument de $b(\theta)$.

Solution.

1. On peut utiliser un résultat de l'exercice 8. Sinon, si on connaît bien les formules usuelles, on écrit

$$a(\theta) = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

On peut donc prendre $r = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ et $\alpha = \frac{\theta}{2}$.

2. $\theta \in] -\pi, \pi[\implies -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos \frac{\theta}{2} > 0$. Ainsi $|a(\theta)| = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ et $\arg(a(\theta)) = \frac{\theta}{2} [2\pi]$.
3. On remarque que $b(\theta) = a(-\theta) = \overline{a(\theta)}$ donc $|b(\theta)| = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ et $\arg(b(\theta)) = -\frac{\theta}{2} [2\pi]$.