Chapitre 5 : fonctions usuelles

L1 MATH103_MISPI

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Sommaire

1. Quelques rappels
2. Logarithme népérien, fonction exponentielle
3. Fonctions puissances
4. Fonctions trigonométriques

Sommaire

1 Quelques rappels

2 Logarithme népérien, fonction exponentielle

3 Fonctions puissances

4 Fonctions trigonométriques

Intervalles de **R**

Définition

Un *intervalle* de **R** est une partie I de **R** qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I \times I, \forall z \in \mathbf{R}, \quad x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in I$$

Si un réel z est compris entre deux éléments x et y appartenant à I, alors il doit lui-même appartenir à I ;
$\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle de **R**.

Intervalles de **R**

On peut classer ainsi les intervalles de **R** :

- **Intervalles bornés :**

$[a, b] = \{ x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b \}$ (intervalle fermé)

$]a, b[= \{ x \in \mathbf{R} : a < x < b \}$ (intervalle ouvert)

$[a, b[= \{ x \in \mathbf{R} : a \leq x < b \}$ (intervalle semi-ouvert)

$]a, b] = \{ x \in \mathbf{R} : a < x \leq b \}$ (intervalle semi-ouvert)

Intervalles de **R**

On peut classer ainsi les intervalles de **R** :

- **Intervalles non-bornés :**

$[a, +\infty[= \{ x \in \mathbf{R} : a \leq x \}$

$]a, +\infty[= \{ x \in \mathbf{R} : a < x \}$

$]-\infty, b] = \{ x \in \mathbf{R} : x \leq b \}$

$]-\infty, b[= \{ x \in \mathbf{R} : x < b \}$

$\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$.

Monotonie sur un intervalle

Une fonction croissante « conserve l'ordre » tandis qu'une fonction décroissante « inverse l'ordre »

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$:

- On dit que f est *croissante* si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I \times I,\ x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

- On dit que f est ***strictement*** *croissante* si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I \times I,\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Monotonie sur un intervalle

Une fonction croissante « conserve l'ordre » tandis qu'une fonction décroissante « inverse l'ordre »

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$:

- On dit que f est *décroissante* si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I \times I,\ x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

- On dit que f est ***strictement*** *décroissante* si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I \times I,\ x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Parité

- f est une fonction *paire* si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = f(x)$$

Dans ce cas le graphe de f en repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe Oy

- f est une fonction *impaire* si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

Dans ce cas le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine O

Symétries

- Si

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \Big(a+x \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow a-x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(a+x)=f(a-x)\Big)$$

alors le graphe de f en repère orthogonal est *symétrique par rapport à la droite verticale d'équation* $x = a$

- Si

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ \Big(a-x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(a-x)=f(x)\Big)$$

alors le graphe de f en repère orthogonal est *symétrique par rapport à la droite verticale d'équation* $x = \dfrac{a}{2}$

Symétries expliquées

- Soit $(x', y') \in \mathcal{G}_f := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathcal{D}_f, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbf{R}^2$, *graphe de f*.

Posons $x := x' - a \in \mathbf{R}$. Alors $x' = a + x \in \mathcal{D}_f$ et $a - x = a - (x' - a) = 2a - x' =: x'' \in \mathcal{D}_f$. Par suite $f(x'') = f(x')$ *i.e.* $(x'', f(x'')) = (x'', f(x')) \in \mathcal{G}_f$. Autrement dit,

$$(x, y) \in \mathcal{G}_f \Rightarrow (2a - x, y) \in \mathcal{G}_f.$$

Le graphe $\mathcal{G}_f$ est donc stable par la symétrie orthogonale

$$\begin{array}{rccc} s : & \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (2a - x, y) \end{array}$$

d'axe d'équation $x = a$.

Le graphe $\mathcal{G}_f$ est ainsi symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$.

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Symétries expliquées

- Pour la seconde assertion, on remarque que

$$(\forall x \in \mathcal{D}_f,\ a - x \in \mathcal{D}_f)$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, \left(\frac{a}{2} + x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow a - (\frac{a}{2} + x) = \frac{a}{2} - x \in \mathcal{D}_f\right)$$

Et donc $f(\frac{a}{2} - x) = f(\frac{a}{2} + x)$ dès que $\frac{a}{2} + x \in \mathcal{D}_f$.

On se retrouve ainsi dans la situation précédente (où $\frac{a}{2}$ est substitué à a).
On conclut que $\mathcal{G}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.

Périodicité

- f est une fonction *périodique* s'il existe un réel $T > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ x + T \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

On dit que T est *une période* de f. Le plus petit de ces réels $T > 0$ (s'il existe) est appelé la *période* de f

La représentation graphique étant faite sur un intervalle quelconque de longueur T, la courbe complète s'obtient en effectuant les translations de vecteurs $n\,T\vec{i}$ avec $n \in \mathbf{Z}$ (si $T > 0$).

Sommaire

1 Quelques rappels

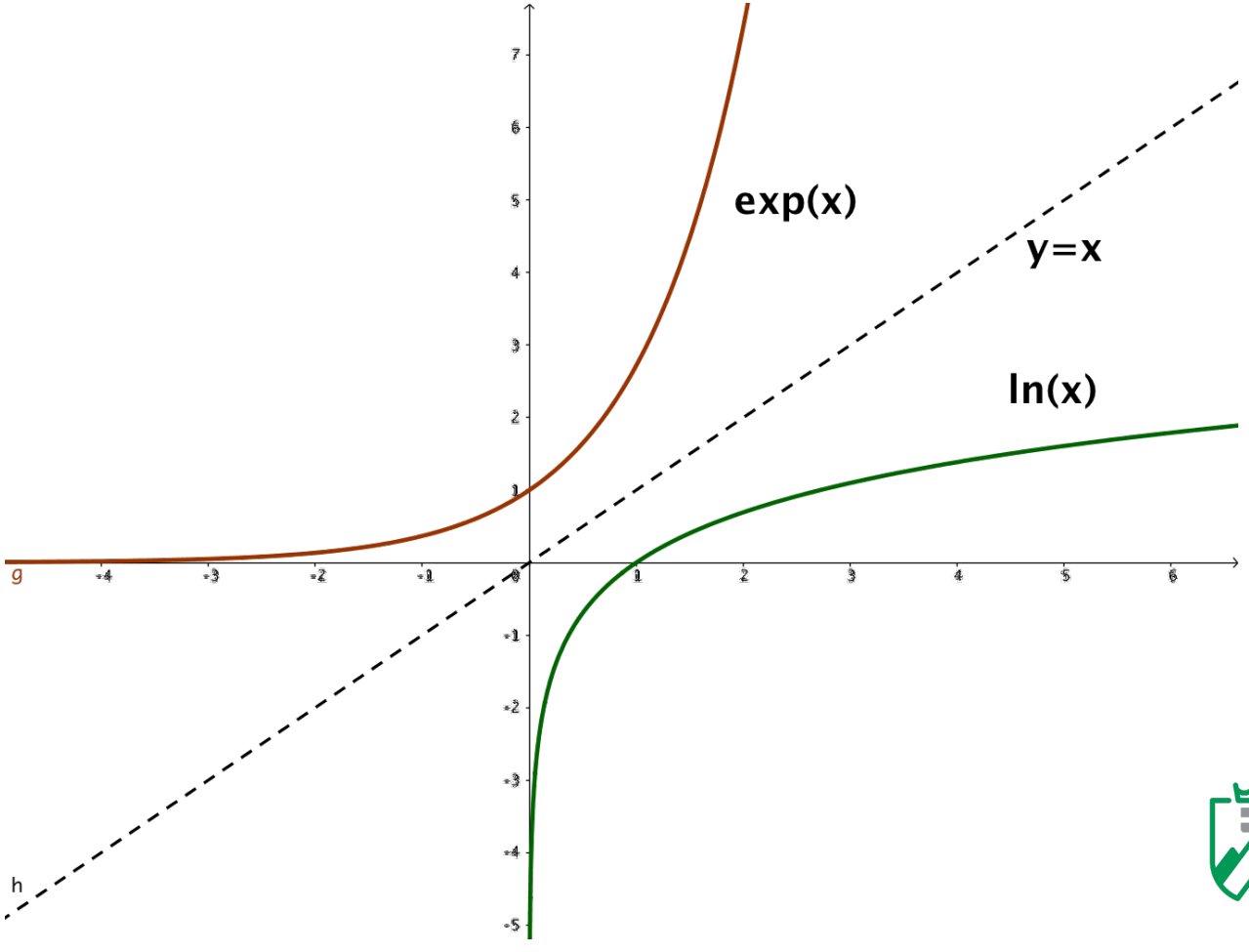
2 Logarithme népérien, fonction exponentielle

3 Fonctions puissances

4 Fonctions trigonométriques

Logarithme népérien, fonction exponentielle

Les fonctions logarithme et exponentielle ont été étudiées en classe de terminale



L'essentiel des rappels sont dans le polycopié

Il est impératif de les lire : toutes les définitions et tous les résultats sont à connaître parfaitement. En particulier :

- Si $u : I \to \mathbf{R}_+^*$ est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $\ln u : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(u(x)) \end{array} \right.$ est dérivable et

$$(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ pour tout } x \in I$$

- Si $u : I \to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I, ne s'annulant pas sur I, alors $\ln |u| : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(|u|(x)) \end{array} \right.$ est dérivable et

$$(\ln |u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ pour tout } x \in I$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

- Si $u : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction dérivable sur I, alors

$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \exp(u(x)) \end{array} \right.$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \exp(u(x))u'(x)$$

Exemples

Pour $x < 0$, $(\ln(-x))' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$

Pour $x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, $(\ln(\cos x))' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $(\ln|x^2 - 1|)' = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

Pour $x \in \mathbf{R}$, $(e^{\frac{x^2}{2}})' = x\, e^{\frac{x^2}{2}}$

Sommaire

1 Quelques rappels

2 Logarithme népérien, fonction exponentielle

3 Fonctions puissances

4 Fonctions trigonométriques

Exposants réels

Ce qui est déjà connu : exposants entiers

$$2^3 \overset{déf}{=} 2 \times 2 \times 2 \quad \text{et} \quad 2^{-3} \overset{déf}{=} \frac{1}{2^3}$$

Extension facile :

Si $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ on peut définir 2^r comme l'*unique* réel positif X tel que $X^q = 2^p$. Ainsi, $2^{3/2}$ est l'unique réel positif X tel que $X^2 = 2^3 = 8$, donc :

$$2^{3/2} = \sqrt{8}$$

mais comment définir $2^{\sqrt{3}}$?

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Exposants réels

On cherche une définition cohérente avec les propriétés des exposants entiers

En particulier on devra avoir $2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2 < \cdots$
et e^x, avec cette définition, devra correspondre à $\exp(x)$

Une définition « raisonnable » serait telle que
$\ln(2^{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}\ln 2$, et on aurait donc

$$2^{\sqrt{3}} = \exp(\sqrt{3}\ln 2)$$

Le membre de droite, qui est déjà défini, servira de définition pour le membre de gauche !

Exposants réels

On cherche une définition cohérente avec les propriétés des exposants entiers

En particulier on devra avoir $2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2 < \cdots$
et e^x, avec cette définition, devra correspondre à $\exp(x)$

Une définition « raisonnable » serait telle que
$\ln(2^{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}\ln 2$, et on aurait donc

$$2^{\sqrt{3}} = \exp(\sqrt{3}\ln 2)$$

Le membre de droite, qui est déjà défini, servira de définition pour le membre de gauche !

Exposants réels

Pour **a** $>$ **0** et $b \in \mathbf{R}$ on pose $a^b := e^{b \ln a}$

Exemples :

$$a^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln a} = e^{\ln \sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \simeq 3,3 \quad \text{donc} \quad 2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2$$

Exposants réels

Pour $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ et $b \in \mathbf{R}$ on pose $a^b := e^{b \ln a}$

Contrat rempli :

Pour $a > 0$ et $b \in \mathbf{Z}$ on retrouve la définition classique

Pour $a > 0$, $a' > 0$, $b \in \mathbf{R}$ et $b' \in \mathbf{R}$:

$$a^b a^{b'} = a^{b+b'} \quad (aa')^b = a^b a'^b$$

$$((a)^b)^{b'} = a^{bb'}$$

$$\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'} \quad \frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$$

Fonctions puissances

Définition

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On appelle fonction puissance α la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h_\alpha(x) = x^\alpha$ où

$$x^\alpha \overset{déf}{=} e^{\alpha \ln x}$$

La fonction $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

En effet, pour $x > 0$:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Fonctions puissances

$$\boxed{h'_\alpha(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Conséquences :

- Si $\alpha > 0$, h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
- Si $\alpha < 0$, h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

Remarque : $x^0 = 1$, pour tout $x \in]0, +\infty[$

Limites des fonctions puissances

Si $\alpha < 0$ alors

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha \ln x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\alpha \ln x} = +\infty$

Limites des fonctions puissances

Si $\alpha > 0$ alors

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha \ln x} = +\infty$

Limites des fonctions puissances

Si $\alpha > 0$ alors

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\alpha \ln x} = 0$

On peut donc prolonger h_α par continuité à droite en $x = 0$ en posant

$$h_\alpha(0) = 0^\alpha \overset{déf}{=} 0$$

- Si $\alpha \in]0, 1[$ alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{h_\alpha(x) - h_\alpha(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha - 1} = +\infty$

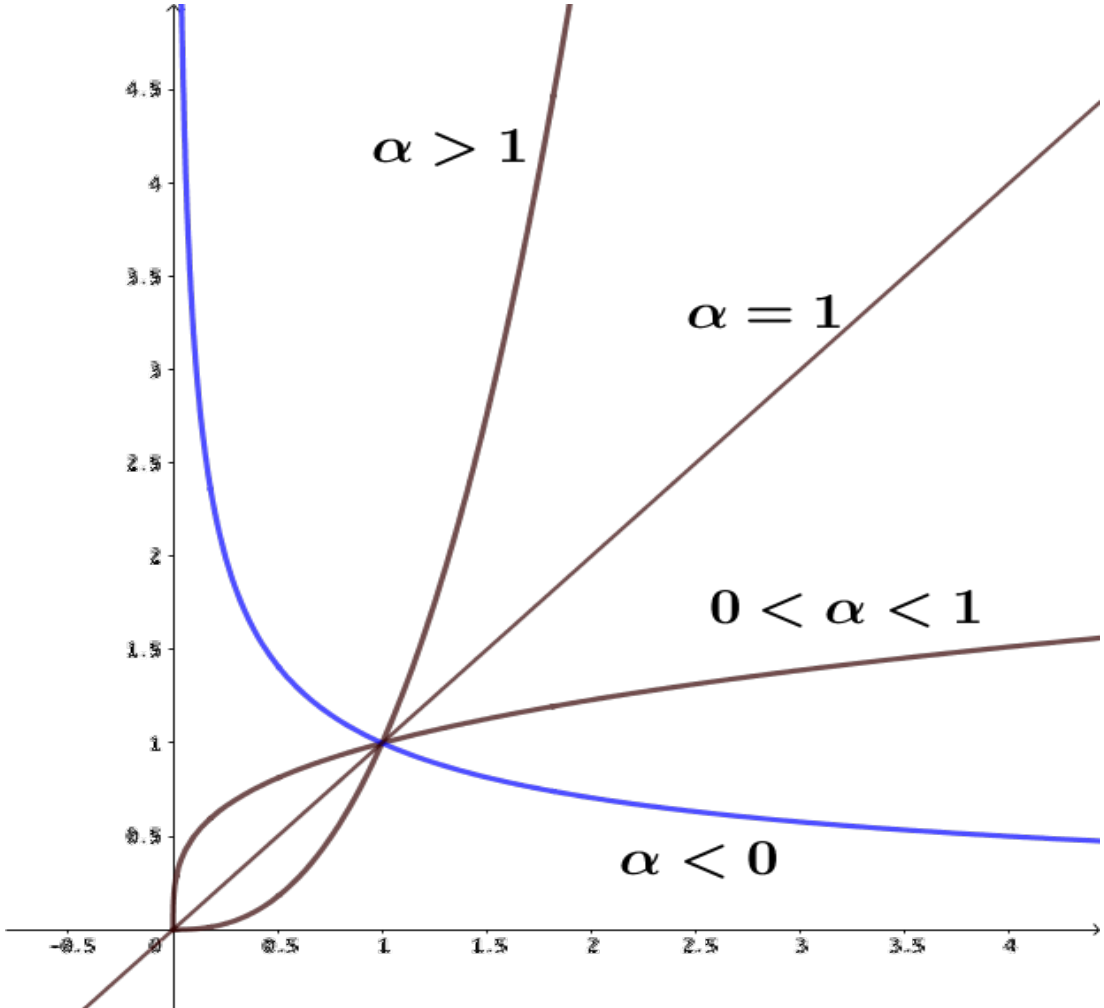
$\longrightarrow$ tangente verticale en $x = 0$

- Si $\alpha > 1$ alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{h_\alpha(x) - h_\alpha(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha - 1} = 0$

$\longrightarrow$ tangente horizontale en $x = 0$

Fonctions puissances : représentations graphiques

$\alpha \in]0,1[$: même allure que $\sqrt{x}$
$\alpha > 1$: même allure que x^2



Racines n-ièmes

Définition

Pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ et $x \geq 0$, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel $X \geq 0$ tel que $X^n = x$.

Pour $x > 0$ on vérifie immédiatement que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Attention : comme on le sait déjà pour $\sqrt{x}$,

pas de dérivabilité en 0

Dérivée de u^α

- Si $u : I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ est une fonction dérivable sur I, alors

$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & u(x)^\alpha \end{array} \right.$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = (u(x)^\alpha)' = \alpha\, u(x)^{\alpha-1} u'(x)$$

ATTENTION : ne pas confondre $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto a^x$. Pour $a > 0$:

$(x^a)' = ?$

$(a^x)' = ?$

Dérivée de u^α

- Si $u : I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ est une fonction dérivable sur I, alors

$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & u(x)^\alpha \end{array} \right.$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = (u(x)^\alpha)' = \alpha\, u(x)^{\alpha-1} u'(x)$$

ATTENTION : ne pas confondre $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto a^x$. Pour $a > 0$:

$$(x^a)' = a\, x^{a-1}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$$

Croissances comparées

- Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0^{(+)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Ces résultats peuvent être retenus de la façon suivante :

« **En cas de forme indéterminée en $+\infty$, c'est l'exponentielle de x qui l'emporte sur les puissances de x qui elles-mêmes l'emportent sur le logarithme de x** »

Sommaire

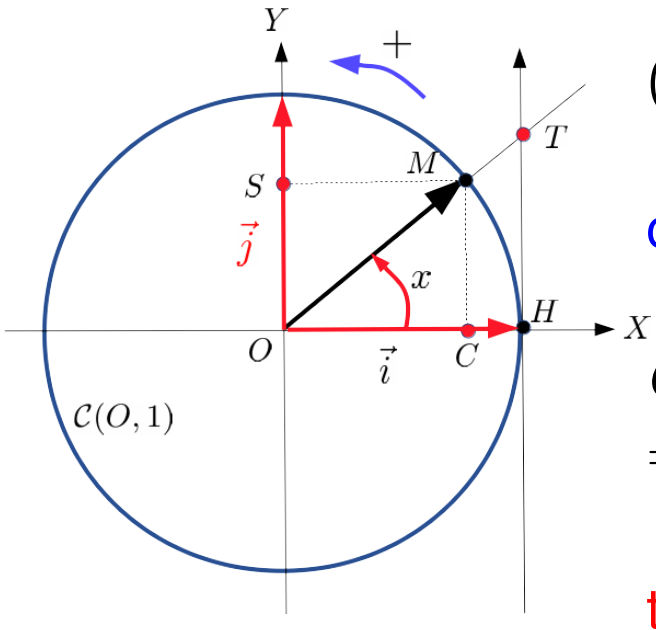
1 Quelques rappels

2 Logarithme népérien, fonction exponentielle

3 Fonctions puissances

4 Fonctions trigonométriques

Cercle trigonométrique



x : une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$

$\cos x \overset{déf}{=} \overline{OC}, \quad \sin x \overset{déf}{=} \overline{OS}$

$OM^2 = 1 \overset{Pythagore}{=} OC^2 + OS^2$

$\Longrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\tan x \overset{déf}{=} \overline{HT} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (Thalès).

$(\cos x, \sin x)$ sont les coordonnées de $M \in \mathcal{C}(0,1)$ tel que $(\overrightarrow{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) \equiv x\ [2\pi]$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Fonctions sinus et cosinus

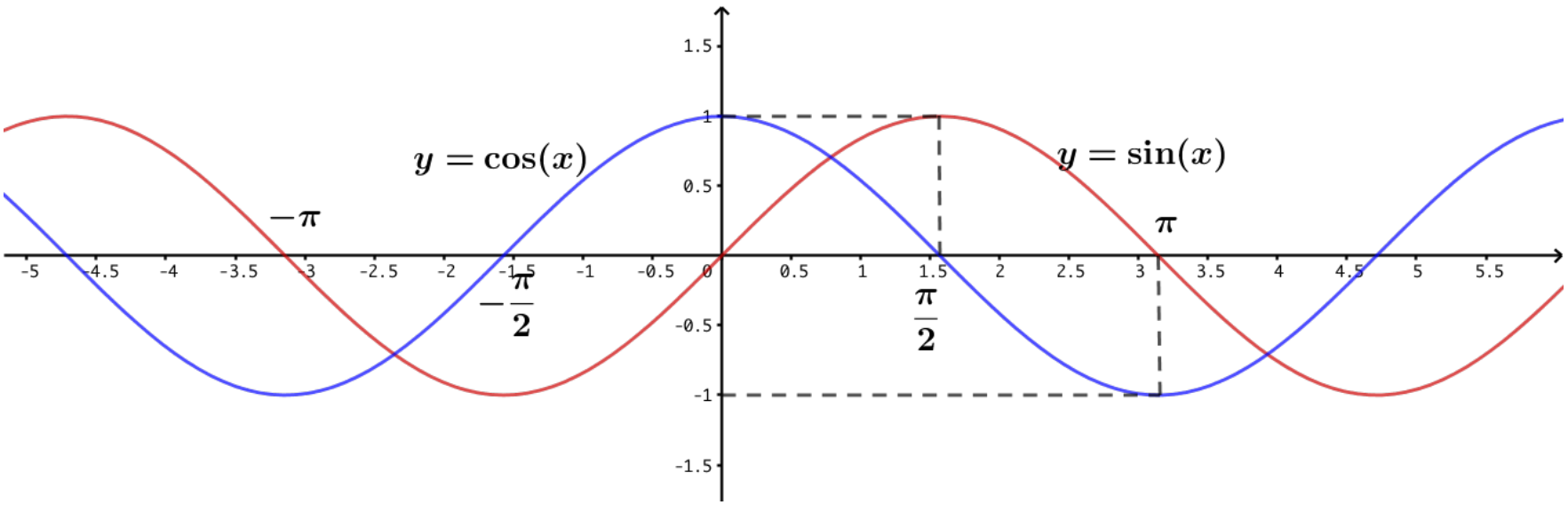
- La fonction sinus, notée sin, est une fonction périodique de période 2π, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$

$$\forall\, x \in \mathbf{R},\ (\sin x)' = \cos x$$

- La fonction cosinus, notée cos, est une fonction périodique de période 2π, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$

$$\forall\, x \in \mathbf{R},\ (\cos x)' = -\sin x$$

Fonctions sinus et cosinus



SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

La fonction tangente

- La fonction tangente, notée tan, est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

C'est une fonction périodique de période π, continue et dérivable sur $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\},\ (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Elle est strictement croissante sur tout intervalle de son domaine. On vérifie sans peine que :

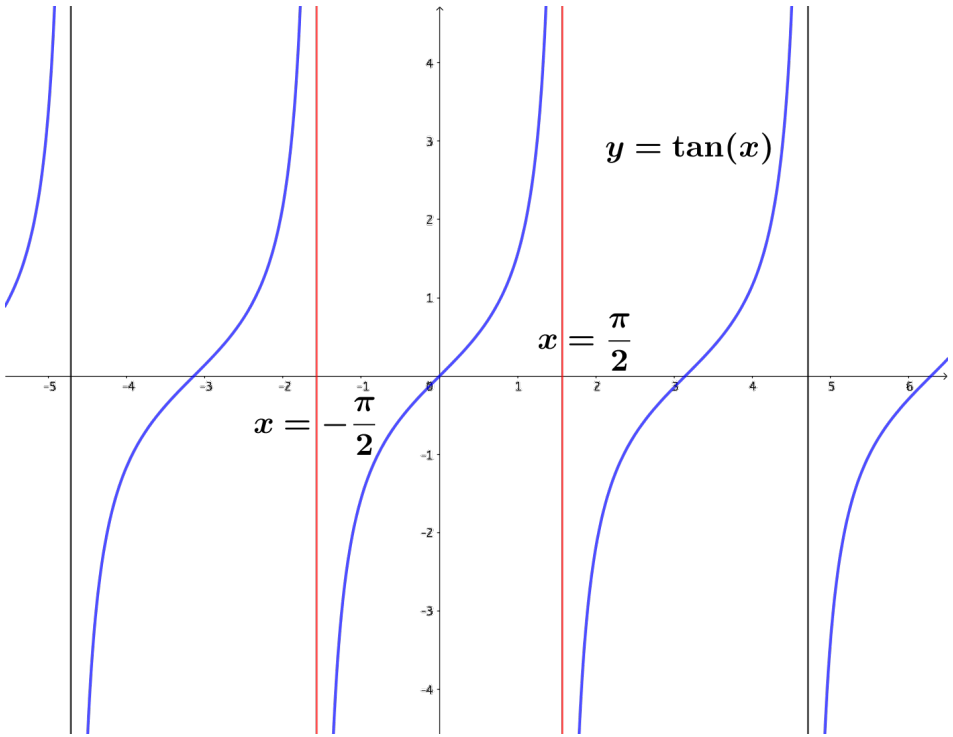
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \text{ et } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

La fonction tangente

Les droites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, sont asymptotes verticales

La fonction tan définit une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur **R**.



Toutes les formules trigonométriques se retrouvent à partir d'un petit nombre d'entre elles.

Ce premier groupe de formules se retrouve aisément à l'aide du cercle trigonométrique :

$$\begin{array}{lcllcl}
\sin(-x) & = & -\sin x, & \cos(-x) & = & \cos x, \\
\sin(x+\pi) & = & -\sin x, & \cos(x+\pi) & = & -\cos x, \\
\sin(\pi-x) & = & \sin x, & \cos(\pi-x) & = & -\cos x, \\
\sin(x+\frac{\pi}{2}) & = & \cos x, & \cos(x+\frac{\pi}{2}) & = & -\sin x, \\
\sin(\frac{\pi}{2}-x) & = & \cos x, & \cos(\frac{\pi}{2}-x) & = & \sin x.
\end{array}$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Il est recommandé de mémoriser les cinq formules suivantes, si possible en les visualisant telles qu'écrites ci-dessous :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, && (1)\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b, && (2)\\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b, && (3)\\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b. && (4)
\end{aligned}$$

Elles permettent de retrouver toutes les autres formules à l'aide de calculs simples : **indispensable de s'entraîner**

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Exemples de calculs

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\ &= \frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b} \\ &= \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\end{aligned}$$

(diviser numérateur et dénominateur par le produit $\cos a \cos b$),

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a+a) \\ &= \cos^2 a-\sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a\end{aligned}$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Transformer un produit en somme

- Pour transformer $\cos a \times \cos b$ sous forme d'une somme, il suffit d'ajouter membre à membre les égalités (1) et (2) :

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

On obtient de façon similaire :

$$\sin a \times \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Transformer une somme en produit

- Pour transformer $\cos p + \cos q$ sous forme d'un produit :

$$cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

$$\text{On pose } \begin{cases} a+b &= p \\ a-b &= q \end{cases} \text{ i. e. } \begin{cases} a &= \dfrac{p+q}{2} \\ b &= \dfrac{p-q}{2} \end{cases} \text{, d'où :}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On obtient de façon similaire :

$$\begin{aligned} \cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Autres formules usuelles

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\ &= 2\cos^2 x - 1, \\ &= 1 - 2\sin^2 x, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin(2x) &= 2\cos x \sin x, \\ \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}, \end{aligned}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

ou, de façon équivalente :

$$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Autres formules usuelles

Si, pour $x \neq \pi + 2k\pi$, on pose $t = \tan\dfrac{x}{2}$, on a :

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}}$$

Par exemple : $\cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$

et on divise numérateur et dénominateur par $\cos^2\dfrac{x}{2}$ ...

Résolution d'équation et d'inéquations

À retrouver à l'aide du cercle trigonométrique

$$\cos x = \cos\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2\ell\pi,\ (k,\ell) \in \mathbf{Z}^2$$

$$\sin x = \sin\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2\ell\pi,\ (k,\ell) \in \mathbf{Z}^2$$

$$\tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\tan x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Résolution d'équation et d'inéquations

À retrouver à l'aide du cercle trigonométrique

Soit $\alpha \in [0, \pi]$. Alors :

$\cos x \geq \cos \alpha \iff x \in [-\alpha + 2k\pi, \alpha + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbf{Z}$

Soit $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Alors :

$\sin x \geq \sin \alpha \iff x \in [\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbf{Z}$

Exemple d'équation

$$\cos x + \cos 2x = 0 \text{ sur }]-\pi, \pi]$$

Première méthode

$$\cos x + \cos 2x = 0 \iff \cos 2x = -\cos x \iff \cos 2x = \cos(x+\pi)$$

On a donc :

$$2x = x + \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -x - \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

D'où $x = \pi + 2k\pi \quad$ ou $\quad x = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Sur $]-\pi, \pi]$, on obtient $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \pi\right\}$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

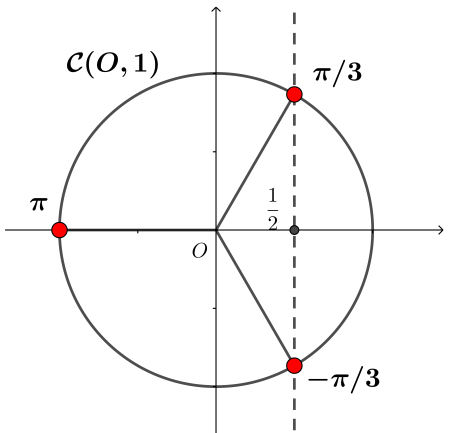
Exemple d'équation

$$\cos x + \cos 2x = 0 \text{ sur }]-\pi, \pi]$$

$$x = \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Remarque : la première famille de solutions est contenue dans la deuxième. En effet, en prenant $k = 2 + 3\ell$ dans la deuxième, ($\ell \in \mathbf{Z}$) on obtient $x = \pi + 2\ell\pi$.

On le voit plus simplement avec les points « images » des solutions :



Exemple d'équation

$$\cos x + \cos 2x = 0 \text{ sur }]-\pi, \pi]$$

Deuxième méthode : changement d'inconnue

On a $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et on pose $X = \cos x$:

$$\longrightarrow \quad 2X^2 + X - 1 = 0$$

Les solutions sont $X_1 = -1$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$

$$\longrightarrow \text{ résoudre } \cos x = -1 \text{ et } \cos x = \frac{1}{2}$$

Sur $]-\pi, \pi]$, on obtient à nouveau $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \pi\right\}$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Exemple d'équation

$$\cos x + \cos 2x = 0 \text{ sur }]-\pi, \pi]$$

Troisième méthode : transformation de somme en produit

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos 2x = 0 &\iff 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\
&\iff \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\
&\iff \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\
&\iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \pi + 2k\pi
\end{aligned}$$

Sur $]-\pi, \pi]$, on retrouve bien $\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Exemple d'inéquation

$$\cos x + \cos 2x \geq 0 \text{ sur }]-\pi, \pi]$$

Le changement d'inconnue $X = \cos x$ vu auparavant nous ramène à l'inéquation $2X^2 + X - 1 \geq 0$.
En appliquant la règle sur le signe du trinôme on obtient $X \leq -1$ ou $X \geq \frac{1}{2}$. Ensuite :

$$\cos x \leq -1 \iff \cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos x \geq \frac{1}{2} \iff \cos x \geq \cos \frac{\pi}{3} \iff x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right].$$

L'ensemble des solutions sur $]-\pi, \pi]$ est $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \{\pi\}$.

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Remarque

$$\cos x + \cos 2x \geq 0 \text{ sur }]-\pi, \pi]$$

On peut aussi reprendre la factorisation issue de la transformation de somme en produit et faire un tableau de signes en s'aidant du cercle trigonométrique.

$$\cos x + \cos 2x \geq 0 \iff 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\cos\left(\frac{x}{2}\right)$	$+$		$+$		$+$		0
$\cos x + \cos(2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0

On retrouve l'ensemble $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \{\pi\}$.

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC