# Chapitre 4 : les nombres complexes

L1 MATH103_MISPI

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Sommaire

1. Introduction
2. Représentation algébrique des nombres complexes
3. Argument, forme trigonométrique
4. Applications
5. Polynômes

# Sommaire

1 Introduction

2 Représentation algébrique des nombres complexes

3 Argument, forme trigonométrique

4 Applications

5 Polynômes

# Introduction

L'idée des nombres complexes est due aux mathématiciens italiens de l'université de Bologne, Dal Ferro, Tartaglia, Cardan :

ils ont imaginé, vers 1550, une « racine carrée de -1 » pour résoudre les équations du troisième degré

On sait d'ailleurs, à un niveau plus simple, que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans **R**.

Grâce aux progrès de l'Algèbre, les nombres complexes ont acquis, depuis, un statut mathématique prodigieux

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Sommaire

1 Introduction

2 Représentation algébrique des nombres complexes

3 Argument, forme trigonométrique

4 Applications

5 Polynômes

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Forme algébrique

La construction rigoureuse de l'ensemble des nombres complexes n'est pas au programme de ce cours.
Il est possible de la présenter à partir des couples de nombres réels $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ (ceux-là même qui vont donner $x + iy$) pour lesquels on définit des notions de somme et de produit de manière appropriée :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \times (x', y') = (x\,x' - y\,y', x\,y' + x'\,y)$$

On peut vérifier que ces opérations ont les mêmes propriétés que les opérations $+$ et $\times$ habituelles dans $\mathbf{R}$ : commutativité, associativité, distributivité de $\times$ par rapport à $+$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Forme algébrique

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \times (x', y') = (x\,x' - y\,y', x\,y' + x'\,y)$$

$(0, 0)$ est élément neutre pour $+$ : il joue le rôle de 0 dans $\mathbf{R}$
$(1, 0)$ est élément neutre pour $\times$ : il joue le rôle de 1 dans $\mathbf{R}$

**On remarque que :**

$$(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$$

$$(x, 0) \times (x', 0) = (x\,x', 0)$$

Avec ces couples particuliers, on calcule comme dans $\mathbf{R}$...

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Forme algébrique

Les réels correspondent alors aux couples de la forme $(x, 0)$ qu'on **note** plus simplement $x$ et on introduit l'élément

$$i \overset{déf}{=} (0, 1)$$

qui est tel que $i^2 = (-1, 0)$ c'est-à-dire $-1$ avec la convention précédente *i. e.* $i^2 = -1$. Comme on a :

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \times (y, 0)$$

(le vérifier !), on obtient la **notation usuelle** $x + i\,y$

# Forme algébrique

On écrira finalement :

$$\mathbf{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbf{R}\}$$

$x$ s'appelle la partie réelle de $z$, notée $x = \mathrm{Re}(z)$,
$y$ s'appelle la partie imaginaire de $z$, notée $y = \mathrm{Im}(z)$.

**L'écriture d'un nombre complexe $z$ sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbf{R}$ est la *forme algébrique* de $z$.**
On a $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ et

$$z = z' \iff \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z') \text{ et } \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z')$$
$$z \in \mathbf{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$$
$$z = 0 \iff x = y = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Opérations

On munit **C** de deux opérations :

- **Addition :** si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

- **Multiplication :** si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

On a $i = 0 + 1 \cdot i$ : en appliquant les règles ci-dessus on obtient

$$i^2 = -1$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Opérations

On munit **C** de deux opérations :

- **Addition :** si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

- **Multiplication :** si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

Ces règles, appliquées aux réels, retombent sur les opérations usuelles : on peut formellement calculer comme dans **R**, avec la particularité liée à l'utilisation de $i$

# Plan complexe

On représente $z = x + iy$ par le point $M(x, y)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal qui prend alors le nom de « plan complexe ».

**Vocabulaire :** on dit que $M(x, y)$ est le *point image* de $z = x + iy$, on le note alors $M(z)$, ou, de façon équivalente, que $z$ est l'*affixe* (*n.m.*) de $M$ et on le note $z_M$ ou $\mathrm{aff(M)}$.

$Ox$ est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z_M = x \in \mathbf{R}$ (axe réel),

$Oy$ est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z_M = iy,\ y \in \mathbf{R}$ (axe des imaginaires purs)
0 est à la fois réel et imaginaire pur !

# Plan complexe

On peut aussi représenter $z = x + iy$ par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$z$ est alors aussi l'affixe de $\overrightarrow{u}$

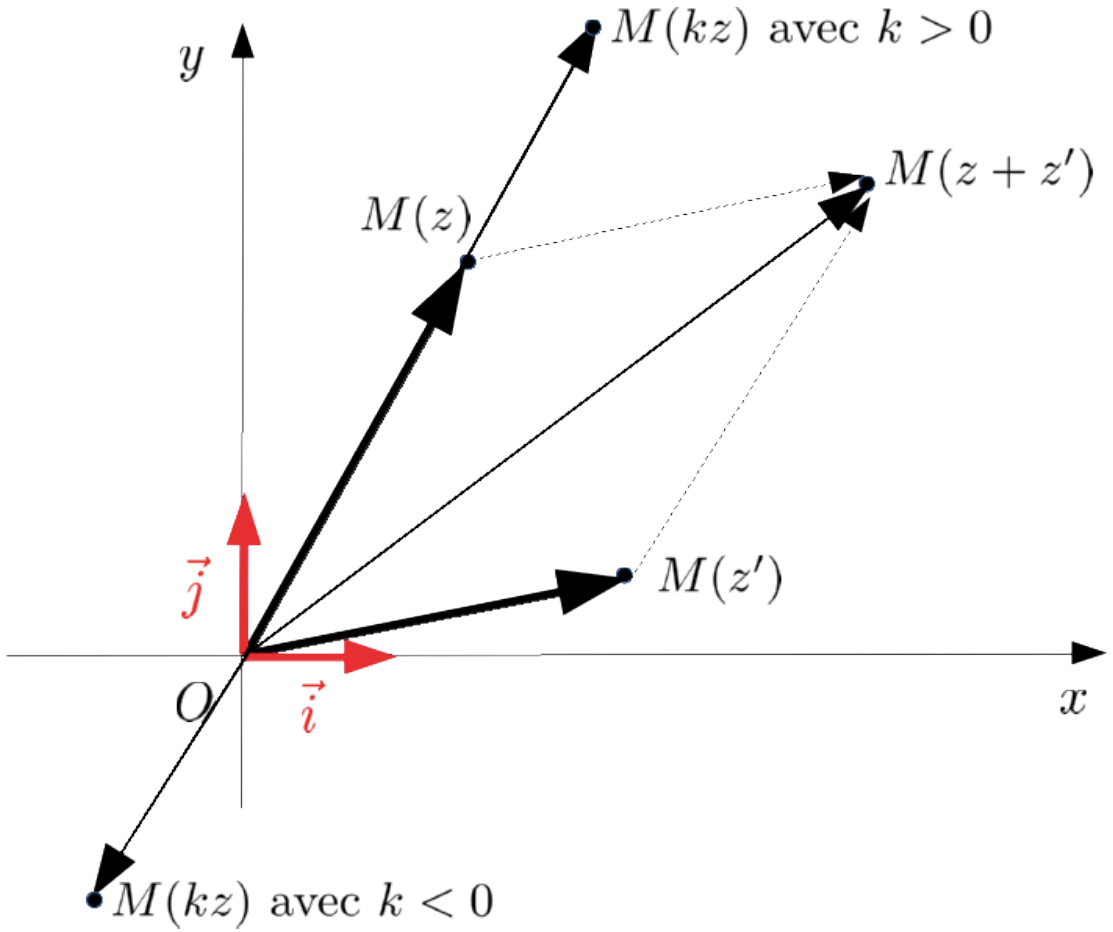
Si $A$ et $B$ sont des points d'affixes respectifs $z_A$ et $z_B$ alors

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$$

car

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

# Plan complexe et opérations



# Conjugaison, module

## Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe (avec $x,\ y \in \mathbf{R}$).

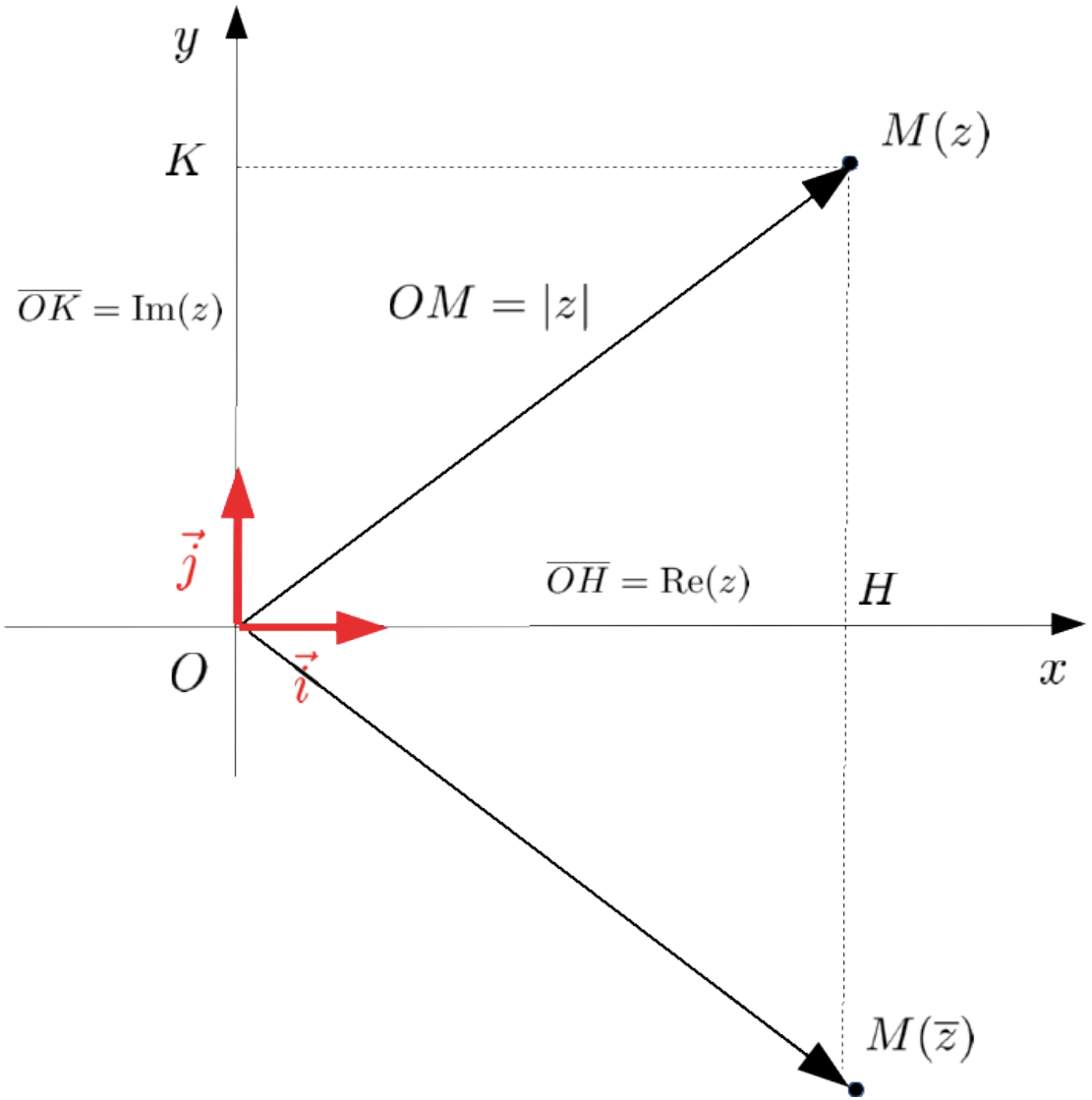
- On appelle *conjugué* de $z$, et on note $\overline{z}$, le nombre complexe

$$\overline{z} = x - iy$$

- On appelle *module* de $z$, et on note $|z|$, le réel positif ou nul

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

# Conjugaison, module



# Conjugaison, module

Ces deux quantités sont liées, en effet :

$$z\,\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2.$$

Donc

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

**Remarque**

*Si $z \in \mathbf{R}$ alors on a $z = x = \mathrm{Re}\, z$ et donc $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$.*

Le module généralise la notion de valeur absolue d'un réel

# Module et géométrie

Si $\overrightarrow{u}$ a pour affixe $z$ alors $\| \overrightarrow{u} \| = |z|$

Si $A$ et $B$ sont des points d'affixes respectifs $z_A$ et $z_B$ alors

$$AB = \| \overrightarrow{AB} \| = |z_B - z_A|$$

# Propriétés de la conjugaison

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbf{R} \iff \overline{z} = z$
- $z$ est imaginaire pur $\iff \overline{z} = -z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{z\,z'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ où $z' \neq 0$
- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Propriétés du module

- $z = 0 \iff |z| = 0$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z\,z'| = |z|\,|z'|, \quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $|z^n| = |z|^n$ pour $n \in \mathbf{N}$

  Idem pour $n \in \mathbf{Z}$ (avec $z \neq 0$ si $n < 0$)

# Calcul d'un inverse

Il est utile de savoir manipuler conjugaison et module pour calculer sans avoir recours à la forme algébrique. Par exemple, pour l'inverse d'un nombre complexe $z = x + iy \neq 0$ :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

La première égalité est obtenue « en multipliant et divisant par le conjugué »

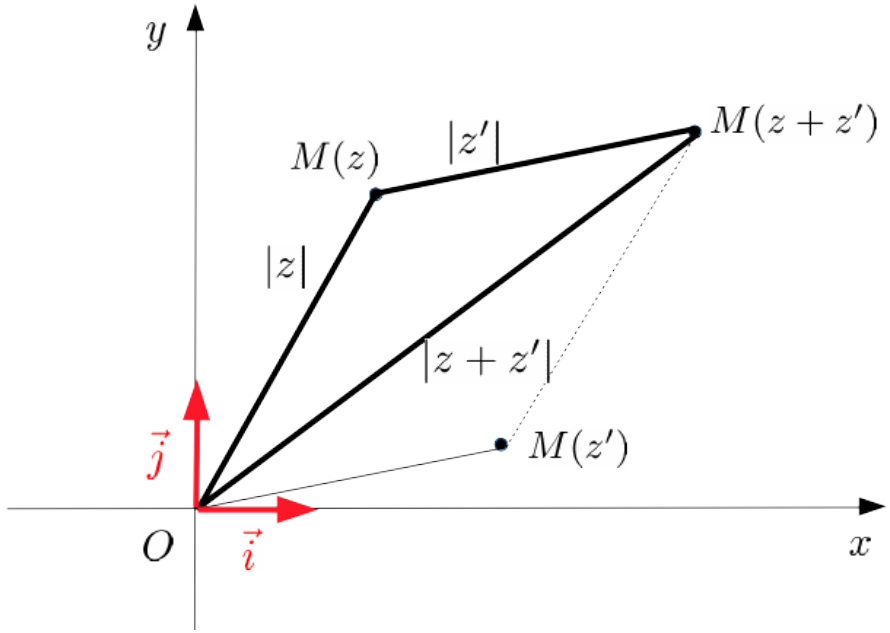
**Cas particulier :** si $|z| = 1$ alors $\frac{1}{z} = \overline{z}$

# Propriétés du module

Inégalités triangulaires :

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

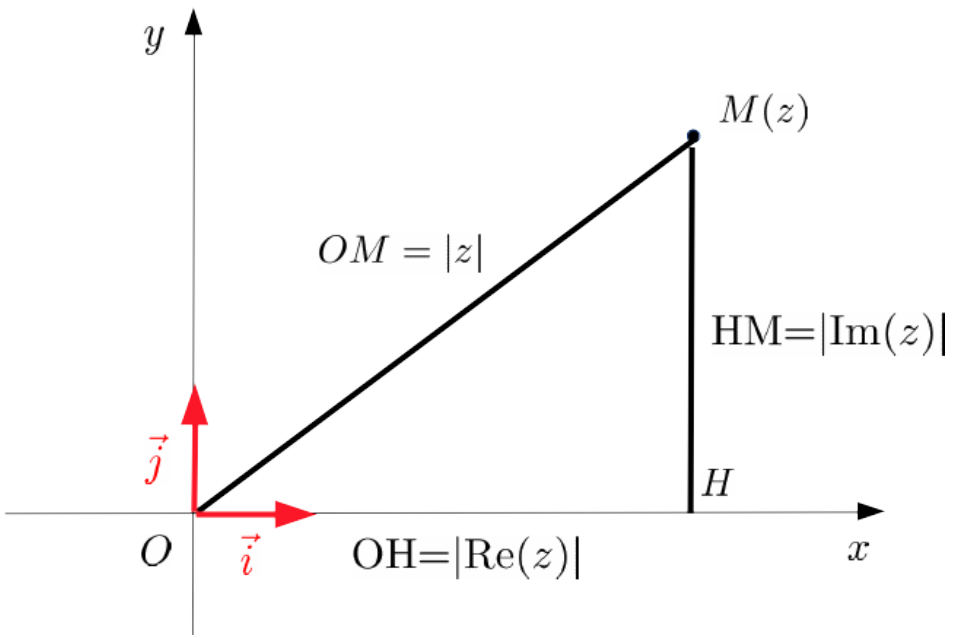
Interprétation dans le triangle $OM(z)M(z+z')$ :



# Propriétés du module

Interprétation dans le triangle rectangle $OHM(z)$

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im} z| \leq |z|$$



# À propos des carrés

- Ne pas confondre $z^2$ et $|z|^2$ :

$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ tandis que $|z|^2 = x^2 + y^2$

On vérifiera en exercice que l'égalité a lieu uniquement pour les réels

- Calcul de $|z + z'|^2$ :

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z+z'}) \\ &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) \\ &= z\,\overline{z} + z'\,\overline{z'} + z\,\overline{z'} + z'\,\overline{z} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\,\overline{z'} + \overline{z\,\overline{z'}} \end{aligned}$$

$$\boxed{|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\,\overline{z'})}$$

# Retour sur l'inégalité triangulaire

$$\boxed{|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\,\overline{z'}\right)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z\,\overline{z'}| \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z|\,|z'| \\ &\leq (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

d'où

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|.$$

La *1re* inégalité triangulaire est démontrée.

# Remarques

De la 1re inégalité triangulaire, on déduit :

$$|z| = |z + z' - z'| \leq |z + z'| + |-z'| \text{ d'où } |z| - |z'| \leq |z + z'|.$$

En échangeant les rôles de $z$ et $z'$, on obtient :

$$|z'| - |z| \leq |z + z'|.$$

Et finalement le *2e* inégalité triangulaire

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'|.$$

En réalité,

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Sommaire

1 Introduction

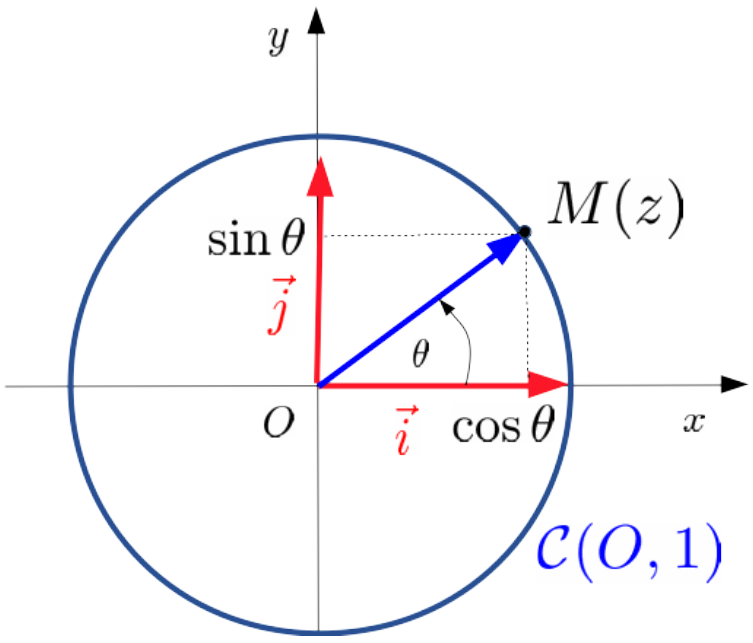
2 Représentation algébrique des nombres complexes

3 Argument, forme trigonométrique

4 Applications

5 Polynômes

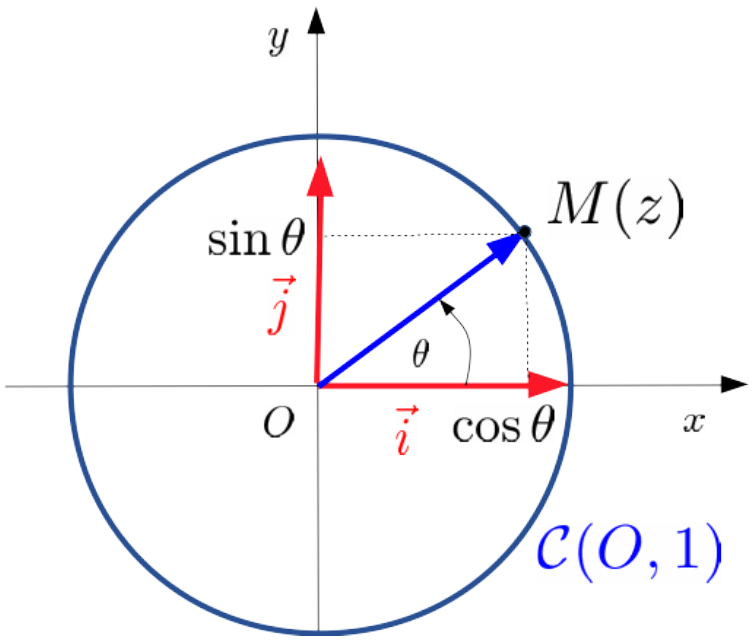
# Cercle trigonométrique




Le cercle trigonométrique est l'ensemble des points du plan dont l'affixe est de module égal à 1. C'est l'image dans le plan complexe de l'ensemble

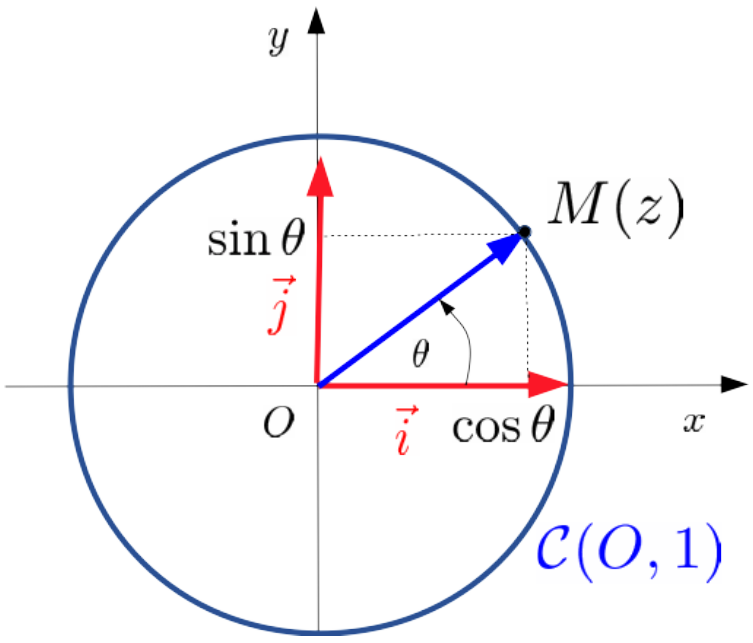
$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbf{C} : |z| = 1 \}$$

# Cercle trigonométrique



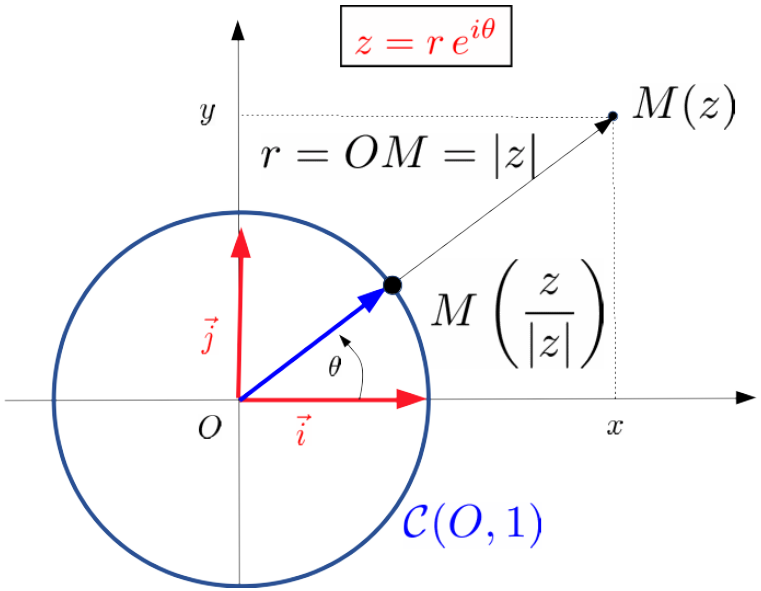

Si $z \in \mathbb{U}$, le point image $M(z)$ appartient au cercle trigonométrique et on sait y associer un réel $\theta$, mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM(z)})$

# Cercle trigonométrique




$M(z)$ a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ et on a $z = \cos\theta + i\sin\theta$

# Argument

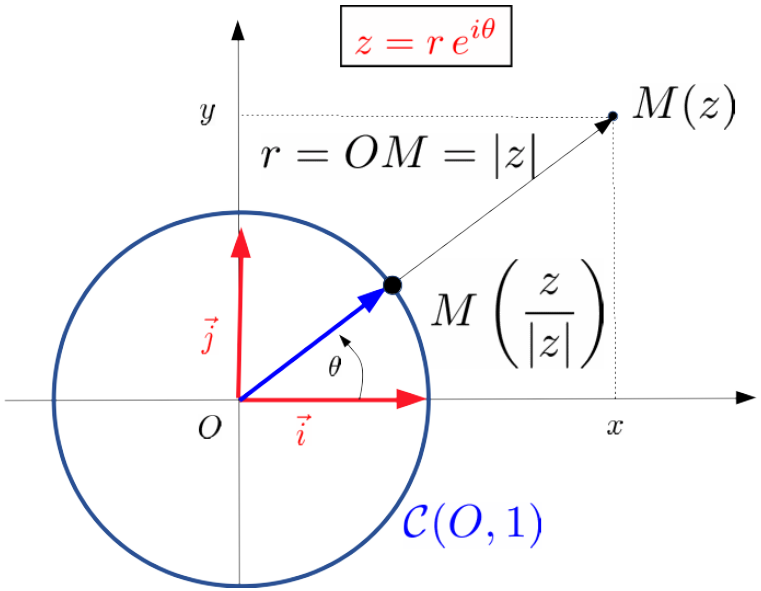



Si $z \in \mathbf{C}^*$, alors $u = \dfrac{z}{|z|}$ appartient à $\mathbb{U}$. On peut donc lui associer $\theta$ tel que $u = \cos\theta + i\sin\theta$ et on obtient

$$\boxed{z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

C'est « la » *forme trigonométrique* de $z$.

# Argument

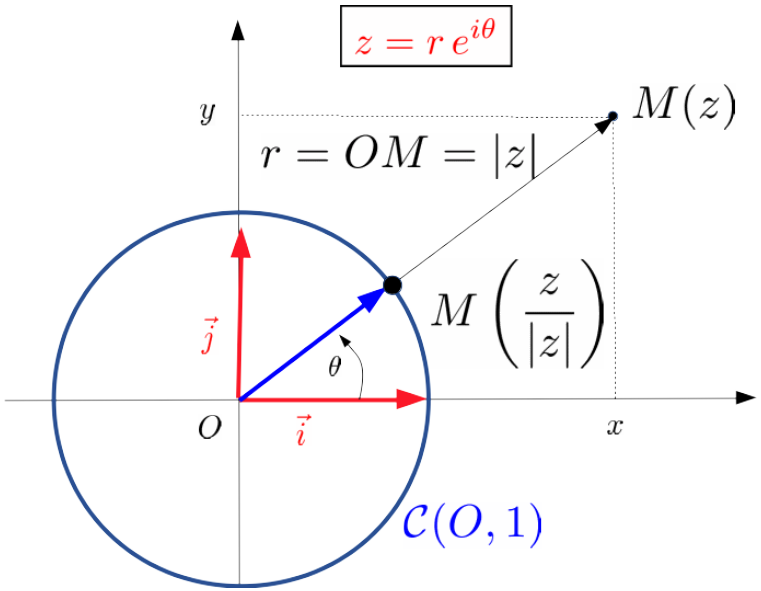



## Définition

Un *argument* du nombre complexe non nul $z$ est un réel $\theta$ tel que

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

# Argument



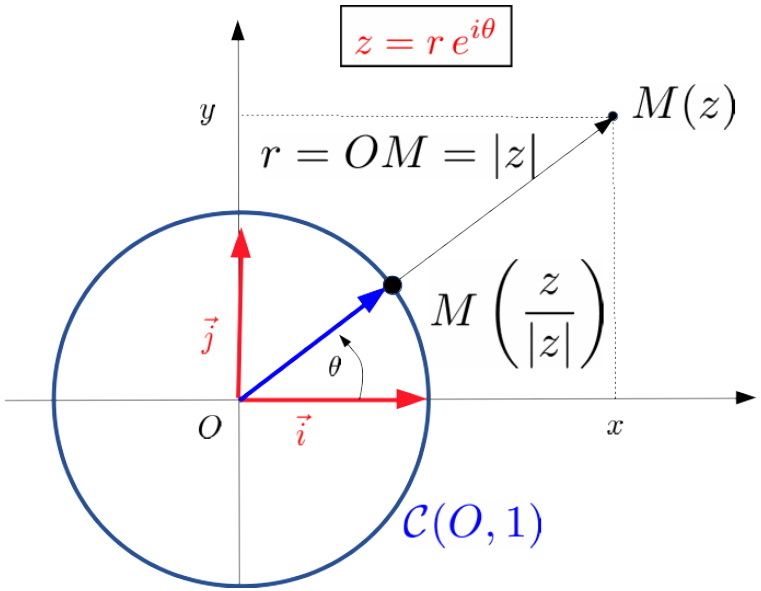

Si $\theta$ est l'un de ces réels alors tous les autres sont de la forme $\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbf{Z}$ quelconque. On écrit

$$\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$$

**Remarque**

*Si $z = 0$ on a $|z| = 0$ mais $\arg(z)$ n'est pas défini.*

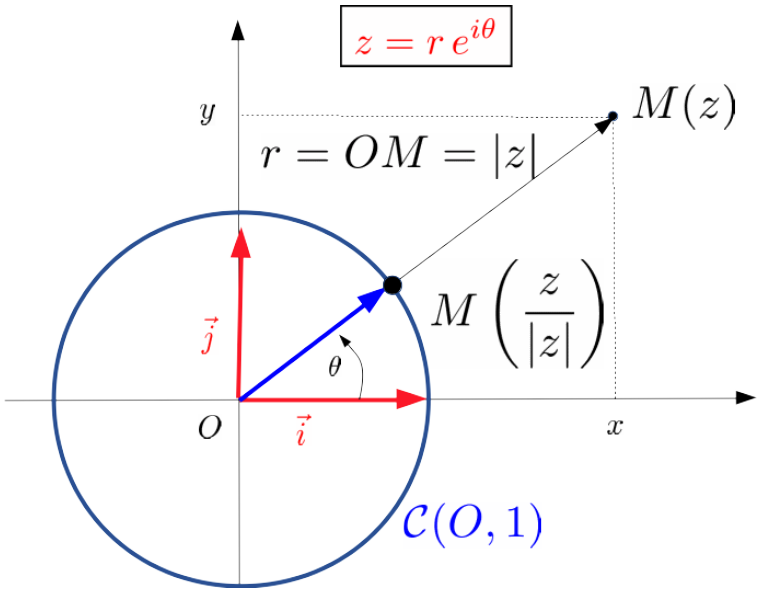
# Argument




De la forme trigonométrique à la forme algébrique :

$$x = |z|\cos\theta, \quad y = |z|\sin\theta$$

# Argument




De la forme algébrique à la forme trigonométrique :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

# Argument d'un produit

## Proposition

*Soient* $z$, $z' \in \mathbf{C}^*$. *Alors* $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

***Preuve :*** si $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$ on a :

$$\begin{aligned} z\,z' &= |z|\,|z|'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= |zz'|\,((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')) \\ &= |zz'|\,(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) \end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité enoncée. ■

# Argument d'un produit

**Proposition**

*Soient* $z$, $z' \in \mathbf{C}^*$. *Alors* $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

Cette propriété justifie, à cause de la similitude avec les propriétés des exposants, l'introduction de la notation

$$e^{i\theta} \overset{déf}{=} \cos\theta + i\sin\theta$$

Avec cette notation, elle s'écrit en effet simplement :

$$e^{i\theta}\, e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Tout nombre complexe non nul s'écrit alors sous *forme exponentielle*

$$z = r\, e^{i\theta} \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Exemples

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot (\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right))$$

donc $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + \mathrm{i}) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ d'où

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$z = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$ donc $|-1| = 1$ et $\arg(-1) \equiv \pi\,[2\pi]$ d'où

$$-1 = e^{i\pi}$$

$z = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ donc $|i| = 1$ et $\arg(\mathrm{i}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ d'où

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Attention !

Soient $r \in \mathbf{R}$ (signé *a priori*), $\theta \in \mathbf{R}$ et $z = r\,e^{i\theta}$

- Si $r = 0$ alors $z = 0$ et $|z| = r = 0$ (pas d'argument défini),
- si $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$,
- si $r < 0$ alors $|z| = -r$ et $\arg(z) \equiv \theta + \pi\,[2\pi]$

  On a en effet dans ce cas $r\,e^{i\theta} = (-r)\,e^{i(\theta+\pi)}$ car $e^{i\pi} = -1$.

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Propriétés -1-

Soient $z = r\,e^{i\theta}$, $z' = r'\,e^{i\theta'}$ avec $r$, $r' > 0$ (*forme exponentielle*). Alors :

- $\boxed{z = z' \iff r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta'\ [2\pi]}$
- $z\,z' = r\,r'\,e^{i(\theta+\theta')}$
- si $z \neq 0$ alors

$$\boxed{\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]}$$

En particulier, si $z' \neq 0$ alors $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Propriétés -2-

Soit $z = r\,e^{i\theta}$, $r > 0$, alors :

- $\overline{z} = r\,e^{-i\theta}$ donc $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg z [2\pi]$,
- $\forall n \in \mathbf{Z}, \quad z^n = r^n\,e^{in\theta}$, donc $\arg(z^n) \equiv n \arg z\,[2\pi]$
- $z \in \mathbf{R}^* \iff \arg z \equiv 0\,[\pi]$,
- $z$ imaginaire pur non nul $\iff \arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$

# Angles et arguments

Du point de vue géométrique on obtient :

## Proposition

*Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ des vecteurs non nuls d'affixes respectifs $z$ et $z'$. Alors :*

$$(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}'}) \equiv \arg z' - \arg z \equiv \arg \frac{z'}{z} [2\pi]$$

*Soient quatre points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$, $D(z_D)$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :*

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} [2\pi]$$

# Sommaire

1 Introduction

2 Représentation algébrique des nombres complexes

3 Argument, forme trigonométrique

4 Applications

5 Polynômes

# Racines $n$-ièmes

## Définition

Soient $z$ un nombre complexe et $n$ un entier naturel non nul. On appelle *racine n-ième* de $z$ tout nombre complexe $Z$ tel que $Z^n = z$.

## Proposition

*Pour $n \in \mathbf{N}^*$, tout nombre complexe non nul $z = r\,e^{i\theta}$, $r > 0$, possède exactement n racine(s) n-ieme(s) $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$ données par*

$$Z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

# Racines $n$-ièmes

## Définition

Soient $z$ un nombre complexe et $n$ un entier naturel non nul. On appelle *racine n-ième* de $z$ tout nombre complexe $Z$ tel que $Z^n = z$.

## Proposition

*Pour $n \in \mathbf{N}^*$, tout nombre complexe non nul $z = r\,e^{i\theta}$, $r > 0$, possède exactement n racine(s) n-ieme(s) $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$ données par*

$$Z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

# Preuve

On cherche $Z$ sous la forme $Z = \rho\, e^{i\varphi}$, $\rho > 0$ : $Z^n = \rho^n\, e^{in\varphi}$

$$Z^n = z \iff \rho^n\, e^{in\varphi} = r\, e^{i\theta} \iff \rho^n = r \text{ et } n\varphi \equiv \theta\,[2\pi]$$

$$\begin{aligned} \rho^n = r &\iff \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\varphi \equiv \theta\,[2\pi] &\iff \exists k \in \mathbf{Z},\ n\varphi = \theta + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z},\ \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{aligned}$$

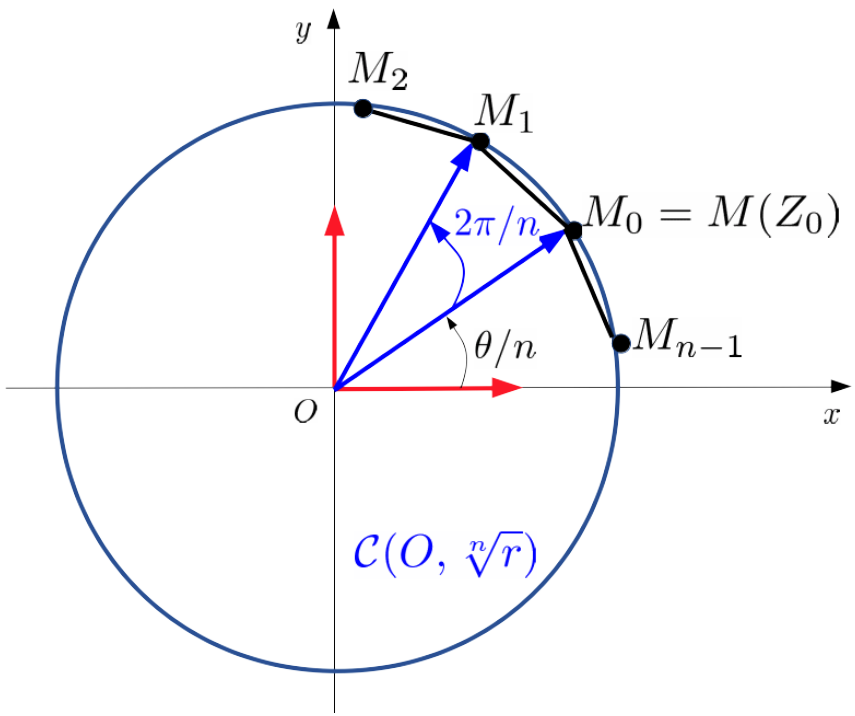
Posons $Z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ : pour $k = n$ on obtient comme argument $\dfrac{\theta}{n} + 2\pi$ donc $Z_n = Z_0$ et, plus généralement, $Z_{k+n} = Z_k$. Il suffit donc de prendre $k \in [\![0, n-1]\!]$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Racines $n$-ièmes

$$Z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\ k \in [\![0, n-1]\!]$$

Les points images $M_k = M(Z_k)$ appartiennent à $\mathcal{C}(O, \sqrt[n]{r})$ et forment les sommets d'un polygone convexe régulier à $n$ sommets :



# Cas particulier : les « racines $n$-ièmes de l'unité »

## Proposition

*Pour $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $Z^n = 1$ possède exactement $n$ solution(s) (les « racines n-ièmes de l'unité »)*

*Ce sont les nombres complexes*

$$1, u, u^2, \cdots, u^{n-1} \text{ avec } u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

En effet, si $z = 1$ alors on a $r = 1$ et $\theta \equiv 0[2\pi]$, donc

$$Z_k = \sqrt[n]{1}\, e^{i(\frac{0}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = e^{i(\frac{2k\pi}{n})} = \left(e^{i(\frac{2\pi}{n})}\right)^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

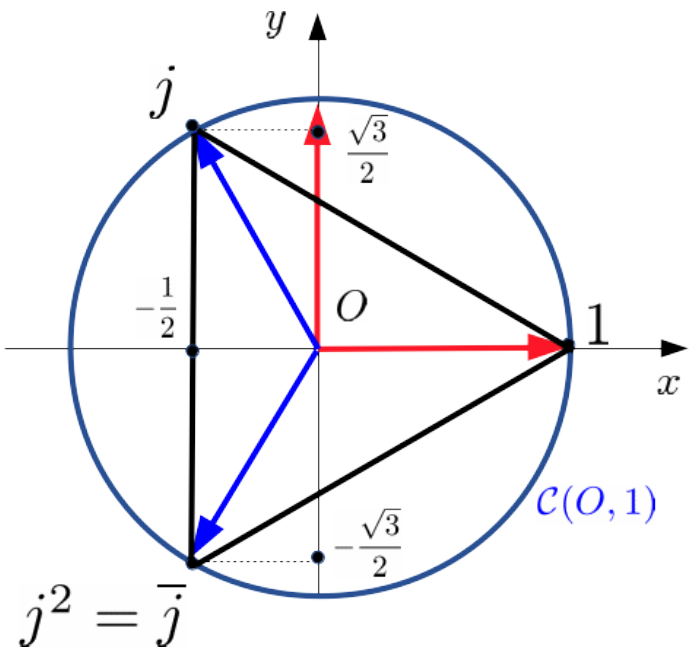
# Exemples

**Racines cubiques de 1 :**

$$Z_0 = 1, Z_1 = e^{i(\frac{2\pi}{3})} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, Z_2 = e^{i(\frac{4\pi}{3})} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{Z_1}$$

On note souvent $j = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$ :

Les racines cubiques de 1 sont alors 1, $j$ et $j^2 = \bar{j}$



# Exemples

**Racines cubiques de** 2 **:** les précédentes, multipliées par $\sqrt[3]{2}$.

**Racines 4-ièmes de** $z = 1 + i$ **:**

$$z = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad Z_k = \sqrt[8]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\right)}, \; k = 0, 1, 2, 3$$

# Racines carrées - Méthode exponentielle

On cherche à résoudre $Z^2 = z$ où $z \neq 0$ est donné sous la forme

$$z = r\, e^{i\theta} \text{ avec } r > 0.$$

On applique ce qui précède avec $n = 2$ :

$$Z_k = \sqrt{r}\, e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)},\ k = 0, 1$$

On a donc deux racines carrées opposées car

$$Z_0 = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } Z_1 = \sqrt{r}\, e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} = e^{i\frac{\theta}{2}}\, e^{i\pi} = -Z_0$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Racines carrées - Méthode algébrique

On pose $z = x + iy$, $Z = X + iY$ et on déduit de l'équation $Z^2 = z$, d'inconnue $Z$, un système d'équations d'inconnues $X$, $Y$ :

$$Z^2 = z \iff X^2 - Y^2 + 2iXY = z = x + iy$$
$$\iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$$

On a aussi $|Z|^2 = |Z^2| = |z|$ donc $X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui permet d'obtenir $X^2$ et $Y^2$ :

$$X^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} + x), \quad Y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$$

# Racines carrées - Méthode algébrique

$$Z = X + iY, \quad X^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2}+x), \quad Y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2}-x)$$

Cela donne quatre possibilités, mais l'équation $2XY = y$ donne le signe du produit $XY$ ($= sign(y)$), il reste donc deux possibilités.

On obtient finalement deux solutions opposées.

# Exemple

$$z = 3 + 4i$$

On pose $Z = X + iY$ et on a :

$$Z^2 = 3 + 4i \iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = 3 \quad (1) \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \quad (2) \\ 2XY = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X^2 = 4 \quad (1) + (2) \\ Y^2 = 1 \quad (2) - (1) \\ XY = 2 > 0 \end{cases}$$

$$\iff X = 2, Y = 1 \text{ ou } X = -2, Y = -1$$

$$\iff Z = 2 + i \text{ ou } Z = -2 - i$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Cas d'un réel

## Remarque

*Dans le cas particulier important où $z = x$ est un réel :*

- *si $x > 0$, on retrouve les racines usuelles $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$,*
- *si $x < 0$, on écrit $z = -|x| = i^2|x|$*

  *et on obtient les racines (imaginaires pures) conjuguées $\pm i\sqrt{|x|} = \pm i\sqrt{-x}$*

# Cas d'un réel, exemple

**Exemple :** les racines carrées de $-2$ dans **C** sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$

Pourquoi la notation $\sqrt{-2}$ doit-elle être proscrite ?

# Cas d'un réel, exemple

**Exemple :** les racines carrées de $-2$ dans **C** sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$

Dans **R** tout nombre **a** $>$ **0** possède deux racines carrées distinctes qui sont des réels de signes opposés : $\sqrt{a} > 0$ et $-\sqrt{a} < 0$

Le symbole $\sqrt{\ }$ permet donc de sélectionner celle des racines qui est positive

# Cas d'un réel, exemple

**Exemple :** les racines carrées de $-2$ dans $\mathbf{C}$ sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$

Un nombre complexe n'est pas « signé » au sens où il n'existe pas de *relation d'ordre total sur* $\mathbf{C}$ telle que les opérations $+$ et $\times$ soient compatibles avec l'ordre : parmi $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$, il n'y en a pas un qui soit « positif »

On s'interdira donc d'écrire, par exemple $i = \sqrt{-1}$

Ceux qui le font, parmi les mathématiciens ou physiciens, ont leur propres motivations et, surtout, ils savent ce qu'ils font !

# Équations du second degré

Soient $a$, $b$, $c$ trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On veut résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$.
Le principe est le même que dans **R**. On part de l'identité :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Posons alors $\Delta = b^2 - 4ac$ : ce nombre complexe admet dans **C** deux racines carrées opposées $\delta$ et $-\delta$, calculées par l'une des deux méthodes précédentes. On obtient les solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Exemple

$$z^2 + (3 - i)z + 2(1 - i) = 0$$

$\Delta = (3 - i)^2 - 8(1 - i) = 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = (\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})^2 = (1 + i)^2.$

On a donc, par exemple, $\delta = 1 + i$ et on obtient les solutions :

$$z_1 = \frac{-3 + i + 1 + i}{2} = -1 + i, \qquad z_2 = \frac{-3 + i - 1 - i}{2} = -2.$$

# Cas particulier

$a, b, c$ réels et $\Delta < 0$

Les racines complexes de $\Delta$ sont $\pm i\sqrt{-\Delta}$ et **les solutions de l'équation sont complexes non réelles conjuguées l'une de l'autre** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Exemple

$$x^2 + x + 1 = 0$$

On trouve $\Delta = -3$ et on obtient dans **C** les racines complexes conjuguées :

$$x' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = j^2 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j$$

**Attention :** écrire $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ est une faute

# Formule de Moivre

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Ceci permet d'obtenir $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ sous forme d'une expression polynomiale en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

# Exemple

$$\cos(3\theta) \text{ et } \sin(3\theta)$$

**Moivre :** $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$

**Binôme de Newton :**
$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\\ \sin(3\theta) &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

On a utilisé $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Elles permettent de linéariser une expression polynomiale en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ (transformation inverse de la précédente)

# Exemples

1. Forme linéarisée de $\cos^3\theta$ :

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}}{8} \\
&= \frac{\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{8} \\
&= \frac{1}{4}(\cos(3\theta)+3\cos\theta)
\end{aligned}$$

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Exemples

2. Forme linéarisée de $\cos^2\theta \sin^4\theta$ :

$$\cos^2\theta \sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$$

$$= \frac{1}{2^6}(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta})(e^{4i\theta}-4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}-4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta})$$

$$= \frac{1}{2^6}(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta})(e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta})$$

$$= \frac{1}{2^6}(e^{6i\theta}+e^{-6i\theta}-2e^{4i\theta}-2e^{-4i\theta}-e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}+4)$$

$$= \frac{1}{32}(\cos(6\theta)-2\cos(4\theta)-\cos(2\theta)+2)$$

# Sommaire

1 Introduction

2 Représentation algébrique des nombres complexes

3 Argument, forme trigonométrique

4 Applications

5 Polynômes

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Polynômes à coefficients complexes

L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est noté $\mathbf{C}[X]$

**Exemple :** $P = X^4 + (2 - i)\,X^3 + i\,X + 1$

On a bien sûr $\mathbf{R}[X] \subset \mathbf{C}[X]$ mais le résultat fondamental suivant est satisfait dans $\mathbf{C}[X]$ (admis)

# Polynômes à coefficients complexes

**Théorème (de d'Alembert-Gauss)**

*Un polynôme non constant de* $\mathbf{C}[X]$ *possède au moins une racine dans* $\mathbf{C}$.

**Conséquences :**

- Les polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1
- Tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n \in \mathbf{N}^*$ possède exactement $n$ racines comptées avec leur multiplicité (une racine double compte pour deux, etc.)

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Cas des polynômes à coefficients réels

Soit $P$ un polynôme à coefficients réels, de degré $n \in \mathbf{N}^*$.

- $P \in \mathbf{C}[X]$ : il possède donc $n$ racines réelles ou complexes (comptées avec leur multiplicité)

# Cas des polynômes à coefficients réels

Soit $P$ un polynôme à coefficients réels, de degré $n \in \mathbf{N}^*$.

- Pour tout nombre complexe $\alpha$, $P(\alpha) = 0 \iff P(\overline{\alpha}) = 0$ :

  $\alpha$ est une racine de $P$ si et seulement si $\overline{\alpha}$ en est une

**Exemple**

$X^3 - 1$ a pour racines 1, $j$ et $\bar{j}$

(1 est son propre conjugué)

# Cas des polynômes à coefficients réels

**Conséquence :** résultat énoncé dans le chapitre 3

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré et ceux du second degré à discriminant strictement négatif.

**Preuve abrégée :** si $\alpha$ est une racine (complexe) non réelle de $P \in \mathbf{R}[X]$ alors $\overline{\alpha}$ aussi et on peut factoriser $P$ par $(X-\alpha)$ et $(X-\overline{\alpha})$. Or

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$$

est un polynôme à coefficients réels et de discriminant $\Delta = 4(\mathrm{Re}(\alpha)^2 - |\alpha|^2) < 0$ qui est *irréductible* dans $\mathbf{R}[X]$.

SCIENCES ET MONTAGNE
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

# Cas des polynômes à coefficients réels

**Conséquence :** résultat énoncé dans le chapitre 3

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré et ceux du second degré à discriminant strictement négatif.

**Exemple**

$P = X^4 + X^2 + 1$ : voir l'exercice proposé en TD