

Chapitre 4 : les nombres complexes

L1 MATH103_MISPI

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Représentation algébrique des nombres complexes
- 3 Argument, forme trigonométrique
- 4 Applications
- 5 Polynômes

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Représentation algébrique des nombres complexes
- 3 Argument, forme trigonométrique
- 4 Applications
- 5 Polynômes

Introduction

L'idée des nombres complexes est due aux mathématiciens italiens de l'université de Bologne, Dal Ferro, Tartaglia, Cardan :

ils ont imaginé, vers 1550, une « racine carrée de -1 » pour résoudre les équations du troisième degré

On sait d'ailleurs, à un niveau plus simple, que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbf{R}$.

Grâce aux progrès de l'Algèbre, les nombres complexes ont acquis, depuis, un statut mathématique prodigieux

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Représentation algébrique des nombres complexes
- 3 Argument, forme trigonométrique
- 4 Applications
- 5 Polynômes

Forme algébrique

La construction rigoureuse de l'ensemble des nombres complexes n'est pas au programme de ce cours.

Il est possible de la présenter à partir des couples de nombres réels $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ (ceux-là même qui vont donner $x + iy$) pour lesquels on définit des notions de somme et de produit de manière appropriée :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \times (x', y') = (x x' - y y', x y' + x' y)$$

On peut vérifier que ces opérations ont les mêmes propriétés que les opérations $+$ et $\times$ habituelles dans $\mathbf{R}$: commutativité, associativité, distributivité de $\times$ par rapport à $+$

Forme algébrique

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \times (x', y') = (x x' - y y', x y' + x' y)$$

$(0, 0)$ est élément neutre pour $+$: il joue le rôle de 0 dans $\mathbf{R}$

$(1, 0)$ est élément neutre pour $\times$: il joue le rôle de 1 dans $\mathbf{R}$

On remarque que :

$$(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$$

$$(x, 0) \times (x', 0) = (x x', 0)$$

Avec ces couples particuliers, on calcule comme dans $\mathbf{R}$...

Forme algébrique

Les réels correspondent alors aux couples de la forme $(x, 0)$ qu'on **note** plus simplement x et on introduit l'élément

$$i \stackrel{\text{déf}}{=} (0, 1)$$

qui est tel que $i^2 = (-1, 0)$ c'est-à-dire -1 avec la convention précédente *i. e.* $i^2 = -1$. Comme on a :

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \times (y, 0)$$

(le vérifier !), on obtient la **notation usuelle** $x + iy$

Forme algébrique

On écrira finalement :

$$\mathbf{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbf{R}\}$$

x s'appelle la **partie réelle** de z , notée $x = \operatorname{Re}(z)$,
 y s'appelle la **partie imaginaire** de z , notée $y = \operatorname{Im}(z)$.

L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbf{R}$ est la **forme algébrique de z .**

On a $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ et

$$z = z' \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$$

$$z \in \mathbf{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$$

$$z = 0 \iff x = y = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$$

Opérations

On munit $\mathbf{C}$ de deux opérations :

- **Addition** : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

- **Multiplication** : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

On a $i = 0 + 1 \cdot i$: en appliquant les règles ci-dessus on obtient

$$i^2 = -1$$

Opérations

On munit $\mathbf{C}$ de deux opérations :

- **Addition** : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

- **Multiplication** : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

Ces règles, appliquées aux réels, retombent sur les opérations usuelles : on peut formellement calculer comme dans $\mathbf{R}$, avec la particularité liée à l'utilisation de i

Plan complexe

On représente $z = x + iy$ par le point $M(x, y)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal qui prend alors le nom de « plan complexe ».

Vocabulaire : on dit que $M(x, y)$ est le *point image* de $z = x + iy$, on le note alors $M(z)$, ou, de façon équivalente, que z est l'*affixe* (*n.m.*) de M et on le note z_M ou $\text{aff}(M)$.

Ox est l'ensemble des points M d'affixe $z_M = x \in \mathbf{R}$ (axe réel),

Oy est l'ensemble des points M d'affixe $z_M = iy$, $y \in \mathbf{R}$ (axe des imaginaires purs)

0 est à la fois réel et imaginaire pur !

Plan complexe

On peut aussi représenter $z = x + iy$ par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

z est alors aussi l'afixe de $\vec{u}$

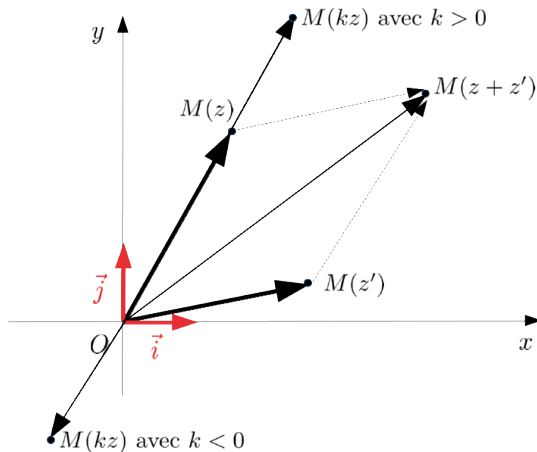
Si A et B sont des points d'affixes respectifs z_A et z_B alors

$$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$$

car

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Plan complexe et opérations



Conjugaison, module

Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe (avec $x, y \in \mathbf{R}$).

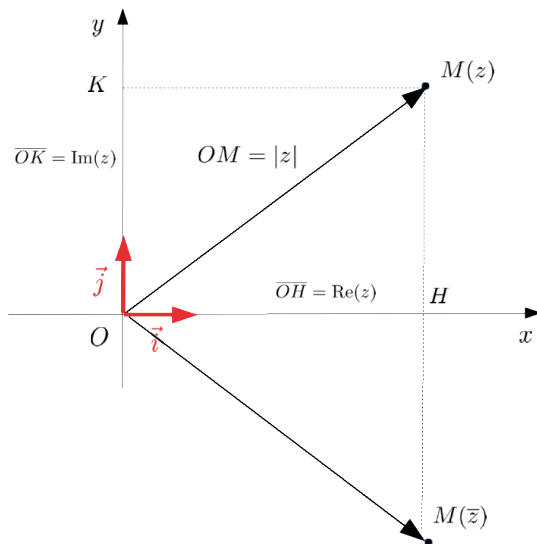
- On appelle *conjugué* de z , et on note $\bar{z}$, le nombre complexe

$$\bar{z} = x - iy$$

- On appelle *module* de z , et on note $|z|$, le réel positif ou nul

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Conjugaison, module



Conjugaison, module

Ces deux quantités sont liées, en effet :

$$z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Donc

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Remarque

Si $z \in \mathbf{R}$ alors on a $z = x = \operatorname{Re} z$ et donc $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$.

Le module généralise la notion de valeur absolue d'un réel

Module et géométrie

Si $\vec{u}$ a pour affixe z alors $\|\vec{u}\| = |z|$

Si A et B sont des points d'affixes respectifs z_A et z_B alors

$$AB = \|\vec{AB}\| = |z_B - z_A|$$

Propriétés de la conjugaison

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbf{R} \iff \overline{z} = z$
- z est imaginaire pur $\iff \overline{z} = -z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{z z'} = \overline{z} \overline{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ où $z' \neq 0$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

Propriétés du module

- $z = 0 \iff |z| = 0$

- $|\bar{z}| = |z|$

- $|z z'| = |z| |z'|, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

- $|z^n| = |z|^n$ pour $n \in \mathbf{N}$

Idem pour $n \in \mathbf{Z}$ (avec $z \neq 0$ si $n < 0$)

Calcul d'un inverse

Il est utile de savoir manipuler conjugaison et module pour calculer sans avoir recours à la forme algébrique. Par exemple, pour l'inverse d'un nombre complexe $z = x + iy \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

La première égalité est obtenue « en multipliant et divisant par le conjugué »

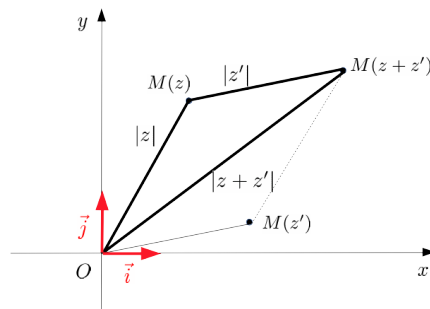
Cas particulier : si $|z| = 1$ alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$

Propriétés du module

Inégalités triangulaires :

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

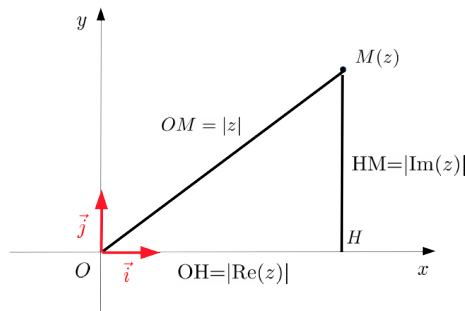
Interprétation dans le triangle $OM(z)M(z + z')$:



Propriétés du module

Interprétation dans le triangle rectangle $OHM(z)$

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$



À propos des carrés

- Ne pas confondre z^2 et $|z|^2$:

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \text{ tandis que } |z|^2 = x^2 + y^2$$

On vérifiera en exercice que l'égalité a lieu uniquement pour les réels

- Calcul de $|z + z'|^2$:

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\overline{z + z'}) \\ &= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z'\bar{z}' + z\bar{z}' + z'\bar{z} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} \end{aligned}$$

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$$

Retour sur l'inégalité triangulaire

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \overline{z'})$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2 |z \overline{z'}| \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2 |z| |z'| \\ &\leq (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

d'où

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

La 1^{re} inégalité triangulaire est démontrée.

Remarques

De la 1^{re} inégalité triangulaire, on déduit :

$$|z| = |z + z' - z'| \leq |z + z'| + |-z'| \text{ d'où } |z| - |z'| \leq |z + z'|.$$

En échangeant les rôles de z et z' , on obtient :

$$|z'| - |z| \leq |z + z'|.$$

Et finalement le 2^e inégalité triangulaire

$$||z| - |z'||| \leq |z + z'|.$$

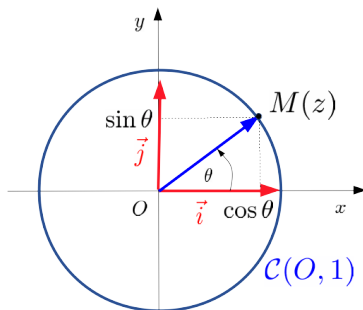
En réalité,

$$||z| - |z'||| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Représentation algébrique des nombres complexes
- 3 Argument, forme trigonométrique**
- 4 Applications
- 5 Polynômes

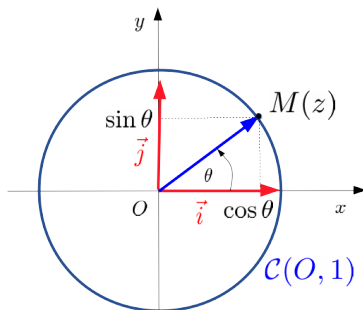
Cercle trigonométrique



Le cercle trigonométrique est l'ensemble des points du plan dont l'affixe est de module égal à 1. C'est l'image dans le plan complexe de l'ensemble

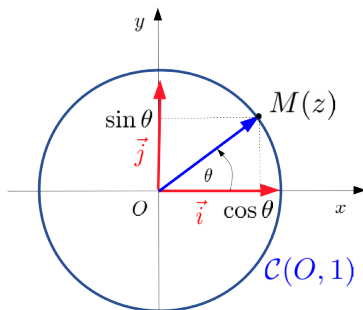
$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbf{C} : |z| = 1 \}$$

Cercle trigonométrique



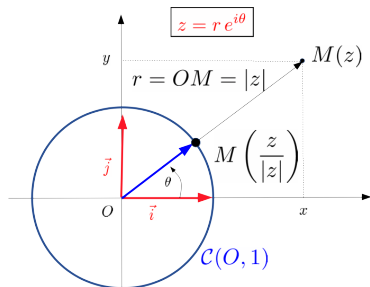
Si $z \in \mathbb{U}$, le point image $M(z)$ appartient au cercle trigonométrique et on sait y associer un réel θ , mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM(z)})$

Cercle trigonométrique



$M(z)$ a pour coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$ et on a $z = \cos \theta + i \sin \theta$

Argument

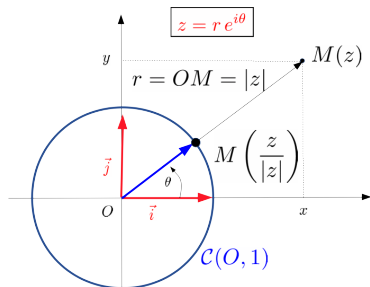


Si $z \in \mathbf{C}^*$, alors $u = \frac{z}{|z|}$ appartient à $\mathbb{U}$. On peut donc lui associer θ tel que $u = \cos \theta + i \sin \theta$ et on obtient

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

C'est « la » *forme trigonométrique* de z .

Argument

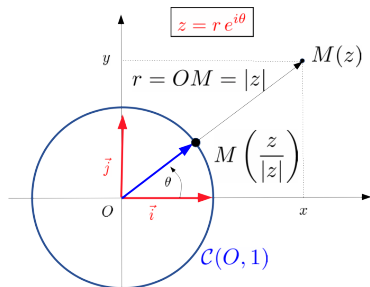


Définition

Un *argument* du nombre complexe non nul z est un réel θ tel que

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Argument



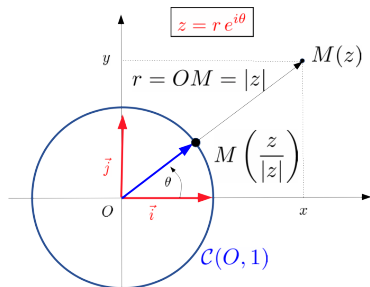
Si θ est l'un de ces réels alors tous les autres sont de la forme $\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbf{Z}$ quelconque. On écrit

$$\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$$

Remarque

Si $z = 0$ on a $|z| = 0$ mais $\arg(z)$ n'est pas défini.

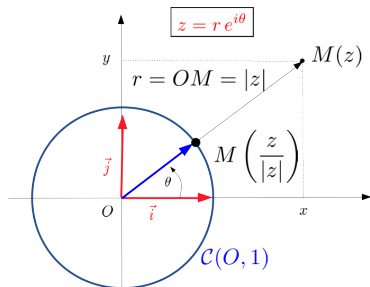
Argument



De la forme trigonométrique à la forme algébrique :

$$x = |z| \cos \theta, \quad y = |z| \sin \theta$$

Argument



De la forme algébrique à la forme trigonométrique :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Argument d'un produit

Proposition

Soient $z, z' \in \mathbf{C}^*$. Alors $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

Preuve : si $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = |z'| (\cos \theta' + i \sin \theta')$
on a :

$$\begin{aligned} z z' &= |z| |z'| (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= |zz'| ((\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i (\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')) \\ &= |zz'| (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité énoncée. ■

Argument d'un produit

Proposition

Soient $z, z' \in \mathbf{C}^*$. Alors $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

Cette propriété justifie, à cause de la similitude avec les propriétés des exposants, l'introduction de la notation

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{déf}}{=} \cos \theta + i \sin \theta$$

Avec cette notation, elle s'écrit en effet simplement :

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Tout nombre complexe non nul s'écrit alors sous *forme exponentielle*

$$z = r e^{i\theta} \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta \equiv \arg(z) [2\pi]$$

Exemples

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\text{donc } |1 + i| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ d'où}$$

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = -1 = \cos \pi + i \sin \pi \text{ donc } |-1| = 1 \text{ et } \arg(-1) \equiv \pi [2\pi] \text{ d'où}$$

$$-1 = e^{i\pi}$$

$$z = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ donc } |i| = 1 \text{ et } \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ d'où}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Attention !

Soient $r \in \mathbf{R}$ (signé *a priori*), $\theta \in \mathbf{R}$ et $z = r e^{i\theta}$

- Si $r = 0$ alors $z = 0$ et $|z| = r = 0$ (pas d'argument défini),
- si $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$,
- si $r < 0$ alors $|z| = -r$ et $\arg(z) \equiv \theta + \pi [2\pi]$

On a en effet dans ce cas $r e^{i\theta} = (-r) e^{i(\theta+\pi)}$ car $e^{i\pi} = -1$.

Propriétés -1-

Soient $z = r e^{i\theta}$, $z' = r' e^{i\theta'}$ avec $r, r' > 0$ (*forme exponentielle*). Alors :

- $z = z' \iff r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' [2\pi]$

- $z z' = r r' e^{i(\theta+\theta')}$

- si $z \neq 0$ alors

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$$

En particulier, si $z' \neq 0$ alors $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$

Propriétés -2-

Soit $z = r e^{i\theta}$, $r > 0$, alors :

- $\bar{z} = r e^{-i\theta}$ donc $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z [2\pi]$,
- $\forall n \in \mathbf{Z}, \quad z^n = r^n e^{in\theta}$, donc $\arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi]$
- $z \in \mathbf{R}^* \iff \arg z \equiv 0 [\pi]$,
- z imaginaire pur non nul $\iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

Angles et arguments

Du point de vue géométrique on obtient :

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs non nuls d'affixes respectifs z et z' . Alors :

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \equiv \arg z' - \arg z \equiv \arg \frac{z'}{z} [2\pi]$$

Soient quatre points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$, $D(z_D)$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

$$(\widehat{\overline{AB}, \overline{CD}}) \equiv \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} [2\pi]$$

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Représentation algébrique des nombres complexes
- 3 Argument, forme trigonométrique
- 4 Applications**
- 5 Polynômes

Racines n -ièmes

Définition

Soient z un nombre complexe et n un entier naturel non nul. On appelle *racine n -ième* de z tout nombre complexe Z tel que $Z^n = z$.

Proposition

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, tout nombre complexe non nul $z = r e^{i\theta}$, $r > 0$, possède exactement n racine(s) n -ième(s) $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ données par

$$Z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Racines n -ièmes

Définition

Soient z un nombre complexe et n un entier naturel non nul. On appelle *racine n -ième* de z tout nombre complexe Z tel que $Z^n = z$.

Proposition

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, tout nombre complexe non nul $z = r e^{i\theta}$, $r > 0$, possède exactement n racine(s) n -ième(s) $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ données par

$$Z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Preuve

On cherche Z sous la forme $Z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$: $Z^n = \rho^n e^{in\varphi}$

$$Z^n = z \iff \rho^n e^{in\varphi} = r e^{i\theta} \iff \rho^n = r \text{ et } n\varphi \equiv \theta [2\pi]$$

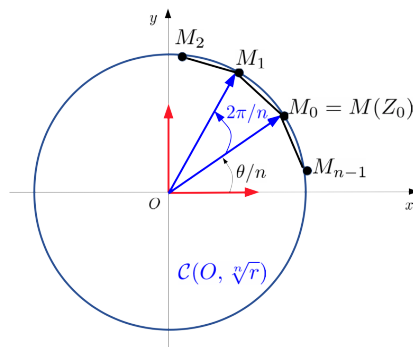
$$\begin{aligned} \rho^n = r &\iff \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\varphi \equiv \theta [2\pi] &\iff \exists k \in \mathbf{Z}, n\varphi = \theta + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z}, \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Posons $Z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$: pour $k = n$ on obtient comme argument $\frac{\theta}{n} + 2\pi$ donc $Z_n = Z_0$ et, plus généralement, $Z_{k+n} = Z_k$. Il suffit donc de prendre $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

Racines n -ièmes

$$Z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

Les points images $M_k = M(Z_k)$ appartiennent à $\mathcal{C}(O, \sqrt[n]{r})$ et forment les sommets d'un polygone convexe régulier à n sommets :



Cas particulier : les « racines n -ièmes de l'unité »

Proposition

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $Z^n = 1$ possède exactement n solution(s) (les « racines n -ièmes de l'unité »)

Ce sont les nombres complexes

$$1, u, u^2, \dots, u^{n-1} \text{ avec } u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

En effet, si $z = 1$ alors on a $r = 1$ et $\theta \equiv 0[2\pi]$, donc

$$Z_k = \sqrt[n]{1} e^{i(\frac{0}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = e^{i(\frac{2k\pi}{n})} = \left(e^{i(\frac{2\pi}{n})}\right)^k, \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

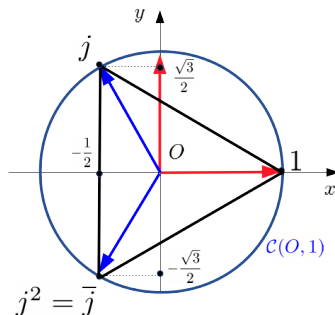
Exemples

Racines cubiques de 1 :

$$Z_0 = 1, Z_1 = e^{i(\frac{2\pi}{3})} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, Z_2 = e^{i(\frac{4\pi}{3})} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{Z_1}$$

On note souvent $j = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$:

Les racines cubiques de 1 sont alors 1, j et $j^2 = \bar{j}$



Exemples

Racines cubiques de 2 : les précédentes, multipliées par $\sqrt[3]{2}$.

Racines 4-ièmes de $z = 1 + i$:

$$z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad Z_k = \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2})}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Racines carrées - Méthode exponentielle

On cherche à résoudre $Z^2 = z$ où $z \neq 0$ est donné sous la forme

$$z = r e^{i\theta} \text{ avec } r > 0.$$

On applique ce qui précède avec $n = 2$:

$$Z_k = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)}, \quad k = 0, 1$$

On a donc deux racines carrées opposées car

$$Z_0 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } Z_1 = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} = e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\pi} = -Z_0$$

Racines carrées - Méthode algébrique

On pose $z = x + iy$, $Z = X + iY$ et on déduit de l'équation $Z^2 = z$, d'inconnue Z , un système d'équations d'inconnues X, Y :

$$\begin{aligned} Z^2 = z &\iff X^2 - Y^2 + 2iXY = z = x + iy \\ &\iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi $|Z|^2 = |Z^2| = |z|$ donc $X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui permet d'obtenir X^2 et Y^2 :

$$X^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} + x), \quad Y^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} - x)$$

Racines carrées - Méthode algébrique

$$Z = X + iY, \quad X^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} + x), \quad Y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$$

Cela donne quatre possibilités, mais l'équation $2XY = y$ donne le signe du produit XY ($= \text{sign}(y)$), il reste donc deux possibilités.

On obtient finalement deux solutions opposées.

Exemple

$$z = 3 + 4i$$

On pose $Z = X + iY$ et on a :

$$Z^2 = 3 + 4i \iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = 3 & (1) \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{9 + 16} = 5 & (2) \\ 2XY = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X^2 = 4 & (1) + (2) \\ Y^2 = 1 & (2) - (1) \\ XY = 2 > 0 \end{cases}$$

$$\iff X = 2, Y = 1 \text{ ou } X = -2, Y = -1$$

$$\iff Z = 2 + i \text{ ou } Z = -2 - i$$

Cas d'un réel

Remarque

Dans le cas particulier important où $z = x$ est un réel :

- *si $x > 0$, on retrouve les racines usuelles $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$,*
- ***si $x < 0$** , on écrit $z = -|x| = i^2|x|$*

*et on obtient les **racines (imaginaires pures) conjuguées***
 $\pm i\sqrt{|x|} = \pm i\sqrt{-x}$

Cas d'un réel, exemple

Exemple : les racines carrées de -2 dans $\mathbf{C}$ sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$

Pourquoi la notation $\sqrt{-2}$ doit-elle être proscrite ?

Cas d'un réel, exemple

Exemple : les racines carrées de -2 dans $\mathbf{C}$ sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$

Dans $\mathbf{R}$ tout nombre $a > 0$ possède deux racines carrées distinctes qui sont des réels de signes opposés : $\sqrt{a} > 0$ et $-\sqrt{a} < 0$

Le symbole $\sqrt{}$ permet donc de sélectionner celle des racines qui est positive

Cas d'un réel, exemple

Exemple : les racines carrées de -2 dans $\mathbf{C}$ sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$

Un nombre complexe n'est pas « signé » au sens où il n'existe pas de *relation d'ordre total* telle que les opérations $+$ et $\times$ soient compatibles avec l'ordre : parmi $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$, il n'y en a pas un qui soit « positif »

On s'interdira donc d'écrire, par exemple $i = \sqrt{-1}$

Ceux qui le font, parmi les mathématiciens ou physiciens, ont leur propres motivations et, surtout, ils savent ce qu'ils font !

Équations du second degré

Soient a , b , c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On veut résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Le principe est le même que dans **R**. On part de l'identité :

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

Posons alors $\Delta = b^2 - 4ac$: ce nombre complexe admet dans **C** deux racines carrées opposées δ et $-\delta$, calculées par l'une des deux méthodes précédentes. On obtient les solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Exemple

$$z^2 + (3 - i)z + 2(1 - i) = 0$$

$$\Delta = (3 - i)^2 - 8(1 - i) = 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = (\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})^2 = (1 + i)^2.$$

On a donc, par exemple, $\delta = 1 + i$ et on obtient les solutions :

$$z_1 = \frac{-3 + i + 1 + i}{2} = -1 + i, \quad z_2 = \frac{-3 + i - 1 - i}{2} = -2.$$

Cas particulier

a, b, c réels et $\Delta < 0$

Les racines complexes de Δ sont $\pm i\sqrt{-\Delta}$ et **les solutions de l'équation sont complexes non réelles conjuguées l'une de l'autre :**

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple

$$x^2 + x + 1 = 0$$

On trouve $\Delta = -3$ et on obtient dans $\mathbf{C}$ les racines complexes conjuguées :

$$x' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = j^2 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j$$

Attention : écrire $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ est une faute

Formule de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Ceci permet d'obtenir $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ sous forme d'une expression polynomiale en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exemple

$\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$

Moivre : $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$

Binôme de Newton :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

On a utilisé $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Elles permettent de linéariser une expression polynomiale en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ (transformation inverse de la précédente)

Exemples

1. Forme linéarisée de $\cos^3 \theta$:

$$\begin{aligned}\cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} \\ &= \frac{(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{8} \\ &= \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos \theta)\end{aligned}$$

Exemples

2. Forme linéarisée de $\cos^2 \theta \sin^4 \theta$:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \theta \sin^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{2^6} (e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}) (e^{4i\theta} - 4e^{3i\theta} e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta} e^{-2i\theta} - 4e^{i\theta} e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}) \\
 &= \frac{1}{2^6} (e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}) (e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) \\
 &= \frac{1}{2^6} (e^{6i\theta} + e^{-6i\theta} - 2e^{4i\theta} - 2e^{-4i\theta} - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} + 4) \\
 &= \frac{1}{32} (\cos(6\theta) - 2\cos(4\theta) - \cos(2\theta) + 2)
 \end{aligned}$$

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Représentation algébrique des nombres complexes
- 3 Argument, forme trigonométrique
- 4 Applications
- 5 Polynômes**

Polynômes à coefficients complexes

L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est noté $\mathbf{C}[X]$

Exemple : $P = X^4 + (2 - i)X^3 + iX + 1$

On a bien sûr $\mathbf{R}[X] \subset \mathbf{C}[X]$ mais le résultat fondamental suivant est satisfait dans $\mathbf{C}[X]$ (admis)

Polynômes à coefficients complexes

Théorème (de d'Alembert-Gauss)

Un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbf{C}$.

Conséquences :

- Les polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1
- Tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n \in \mathbf{N}^*$ possède exactement n racines comptées avec leur multiplicité (une racine double compte pour deux, etc.)

Cas des polynômes à coefficients réels

Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré $n \in \mathbf{N}^*$.

- $P \in \mathbf{C}[X]$: il possède donc n racines réelles ou complexes (comptées avec leur multiplicité)

Cas des polynômes à coefficients réels

Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré $n \in \mathbf{N}^*$.

- Pour tout nombre complexe α , $P(\alpha) = 0 \iff P(\bar{\alpha}) = 0$:
 α est une racine de P si et seulement si $\bar{\alpha}$ en est une

Exemple

$X^3 - 1$ a pour racines 1 , j et $\bar{j}$
(1 est son propre conjugué)

Cas des polynômes à coefficients réels

Conséquence : résultat énoncé dans le chapitre 3

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré et ceux du second degré à discriminant strictement négatif.

Preuve abrégée : si α est une racine (complexe) non réelle de $P \in \mathbf{R}[X]$ alors $\bar{\alpha}$ aussi et on peut factoriser P par $(X - \alpha)$ et $(X - \bar{\alpha})$. Or

$$(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$$

est un polynôme à coefficients réels et de discriminant $\Delta = 4(\operatorname{Re}(\alpha)^2 - |\alpha|^2) < 0$ qui est *irréductible* dans $\mathbf{R}[X]$.

Cas des polynômes à coefficients réels

Conséquence : résultat énoncé dans le chapitre 3

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré et ceux du second degré à discriminant strictement négatif.

Exemple

$P = X^4 + X^2 + 1$: voir l'exercice proposé en TD